Оглавление

3

Целочисленные функции

ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА составляют костяк дискретной математики, и нам часто требуется преобразовывать дробные или произвольные действительные числа в целые. В этой главе наша цель — познакомиться с такого рода преобразованиями и приобрести навыки работы с ними, а также немного изучить их замечательные свойства.

3.1 Полы и потолки

Начнем с настила пола (floor) и перекрытия потолка (ceil), а именно — с функций "пол" (наибольшее целое) и "потолок" (наименьшее целое), которые определены для всех действительных чисел x следующим образом:

$$\begin{aligned} \lfloor x \rfloor &= \text{наибольшее целое, не превышающее } x\,; \\ \lceil x \rceil &= \text{наименьшее целое, не меньшее } x\,. \end{aligned} \tag{3.1}$$

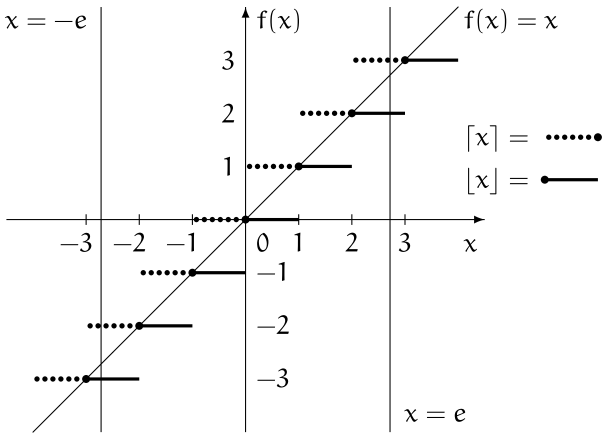
Эти обозначения (и названия) были введены Кеннетом Айверсоном (Kenneth E. Iverson) в начале 1960-х годов [191, с. 12]. Он обнаружил, что наборщики вполне могли бы справиться с этими символами, срезав верхушки и основания символов '[' и ']'. Его обозначения стали настолько распространенными, что сейчас они используются в технических статьях без каких-либо пояснений. До недавнего времени для наибольшего целого $\leqslant x$ часто использовалось обозначение '[x]', при этом эквивалентное обозначение для наименьшего целого отсутствовало. Некоторые авторы пытались использовать ']x[' (понятно, что из этого ничего не могло получиться).

)Бppp...(

Помимо разных вариантов обозначений, имеются разные варианты самих функций. Например, некоторые калькуляторы имеют функцию INT, определенную как $\lfloor x \rfloor$ при положительном

x и $\lceil x \rceil$ при отрицательном x. Вероятно, разработчики этих калькуляторов хотели, чтобы их функция INT удовлетворяла тождеству $\mathrm{INT}(-x) = -\mathrm{INT}(x)$. Но мы остаемся приверженцами наших пола и потолка, поскольку у них имеются свойства гораздо более привлекательные.

Один из способов поближе познакомиться с функциями пола и потолка — взглянуть на их графики, напоминающие ступеньки над и под прямой $f(x) = x$:



Из этого графика, например, видно, что

$$\lfloor e \rfloor = 2\,, \qquad \lfloor -e \rfloor = -3\,,$$
$$\lceil e \rceil = 3\,, \qquad \lceil -e \rceil = -2\,,$$

поскольку $e = 2.71828\ldots$.

Взглянув на эту иллюстрацию, можно заметить ряд фактов относительно полов и потолков. Начнем с того, что, поскольку функция пола лежит под диагональю $f(x) = x$, справедливо соотношение $\lfloor x \rfloor \leqslant x$; аналогично $\lceil x \rceil \geqslant x$. (Конечно, эти факты следуют непосредственно из определения функций.) В целых точках эти две функции совпадают:

$$\lfloor x \rfloor = x \quad \iff \quad x \text{ целое} \quad \iff \quad \lceil x \rceil = x\,.$$

(Здесь символ '$\iff$' означает "тогда и только тогда".) Если же они не совпадают, то потолок ровно на 1 выше пола:

$$\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = [x \text{ не целое}]\,. \tag{3.2}$$

Красивое применение обозначений, введенных Айверсоном!

Если сдвинуть диагональ вниз на 1, то она окажется полностью под функцией "пол", так что $x - 1 < \lfloor x \rfloor$; аналогично $x + 1 > \lceil x \rceil$. Объединив эти наблюдения, получаем

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x \leqslant \lceil x \rceil < x + 1\,. \tag{3.3}$$

Наконец, эти функции являются отражениями друг друга относительно обеих осей:

$$\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil ; \qquad \lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor . \tag{3.4}$$

Таким образом, каждая функция легко выражается через другую, что помогает объяснить, почему функция "потолок" раньше не имела собственного обозначения. Тем не менее потолки встречаются так часто, что заслуживают отдельного обозначения, так же как отдельные обозначения были введены для возрастающих и убывающих степеней. Математики издавна имеют синус и косинус, тангенс и котангенс, секанс и косеканс, максимум и минимум, а теперь у нас есть пол и потолок.

На следующей неделе обещали подвезти стены...

Для настоящего доказательства свойств этих функций (а не просто разглядывания картинок) особенно полезны следующие правила:

$$\begin{aligned}
\lfloor x \rfloor = n \quad &\iff \quad n \leqslant x < n+1, && \text{(а)}\\
\lfloor x \rfloor = n \quad &\iff \quad x-1 < n \leqslant x, && \text{(б)}\\
\lceil x \rceil = n \quad &\iff \quad n-1 < x \leqslant n, && \text{(в)}\\
\lceil x \rceil = n \quad &\iff \quad x \leqslant n < x+1. && \text{(г)}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

(Во всех случаях считается, что n — целое, а x — действительное.) Правила (а) и (в) следуют непосредственно из определения (3.1); правила (б) и (г) — те же самые, просто неравенства преобразованы так, что в средине оказывается n.

Целочисленное слагаемое можно свободно вносить и выносить в/за скобки пола/потолка:

На радость ослику Иа...
— Переводчик

$$\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n, \qquad n \text{ — целое.} \tag{3.6}$$

(Правило (3.5, а) гласит, что это утверждение эквивалентно неравенствам $\lfloor x \rfloor + n \leqslant x+n < \lfloor x \rfloor + n + 1$.) Но аналоги этой операции типа вынесения за скобки постоянного множителя в общем случае недопустимы. Например, $\lfloor nx \rfloor \neq n\lfloor x \rfloor$ при $n = 2$ и $x = 1/2$. Это означает, что скобки пола и потолка сравнительно негибки. Обычно мы счастливы, если удается от них избавиться или что-то доказать при их наличии.

Оказывается, что имеется масса ситуаций, когда скобки пола и потолка избыточны, так что их можно удалять или вставлять, как вам угодно. Например, любое неравенство между действительным и целым числами эквивалентно неравенству с полом или потолком между целыми числами:

$$\begin{aligned} x<n &\iff \lfloor x\rfloor<n\,, && \text{(а)}\\ n<x &\iff n<\lceil x\rceil\,, && \text{(б)}\\ x\leqslant n &\iff \lceil x\rceil\leqslant n\,, && \text{(в)}\\ n\leqslant x &\iff n\leqslant\lfloor x\rfloor\,. && \text{(г)} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Эти правила легко доказать. Например, если $x<n$, то, конечно же, $\lfloor x\rfloor<n$, поскольку $\lfloor x\rfloor\leqslant x$. И наоборот, если $\lfloor x\rfloor<n$, то должно выполняться $x<n$, поскольку $x<\lfloor x\rfloor+1$ и $\lfloor x\rfloor+1\leqslant n$.

Было бы хорошо, если бы эти четыре правила в (3.7) так же легко запоминались, как и доказывались. Каждое неравенство без пола или потолка соответствует такому же неравенству с полом или с потолком; но нужно дважды подумать, прежде чем решить, какое из них подходит.

Разность между x и $\lfloor x\rfloor$ называется *дробной частью* x и встречается в приложениях достаточно часто, чтобы заслужить собственное обозначение:

$$\{x\}\;=\;x-\lfloor x\rfloor\,. \tag{3.8}$$

Лучше все же не записывать дробную часть как $\{x\}$ в случаях, когда есть шанс спутать ее с множеством, состоящим из единственного элемента x.

Иногда $\lfloor x\rfloor$ называют *целой частью* x, поскольку $x=\lfloor x\rfloor+\{x\}$. Если действительное число x можно записать в виде $x=n+\theta$, где n — целое число, а $0\leqslant\theta<1$, то согласно (3.5, а) можно заключить, что $n=\lfloor x\rfloor$ и $\theta=\{x\}$.

Равенство (3.6) не выполняется, если n — произвольное действительное число. Но в общем случае для $\lfloor x+y\rfloor$ имеются две возможности. Если записать $x=\lfloor x\rfloor+\{x\}$ и $y=\lfloor y\rfloor+\{y\}$, то получим $\lfloor x+y\rfloor=\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+\lfloor\{x\}+\{y\}\rfloor$. А поскольку $0\leqslant\{x\}+\{y\}<2$, оказывается, что иногда $\lfloor x+y\rfloor$ равно $\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor$, а в остальных случаях это $\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+1$.

Второй случай реализуется тогда и только тогда, когда выполняется "перенос" за десятичную точку при сложении дробных частей $\{x\}$ и $\{y\}$.

3.2 Применения пола и потолка

Итак, базовый инструментарий для работы с полами и потолками у нас есть. Опробуем их на деле, начав с простой задачки: что такое $\lceil\lg 35\rceil$? (Следуя предложению Эдварда М. Рейнгольда (Edward M. Reingold), мы используем 'lg' для обозначения логарифма по основанию 2.) Ну а поскольку $2^5<35\leqslant 2^6$, взятие логарифма дает нам $5<\lg 35\leqslant 6$, откуда согласно (3.5, в) $\lceil\lg 35\rceil=6$.

Заметим, что число 35 при записи в двоичной системе счисления состоит из шести битов: $35=(100011)_2$. Всегда ли верно, что $\lceil\lg n\rceil$ представляет собой длину n в двоичном виде? Не всегда. Нам нужны те же 6 бит и для записи $32=(100000)_2$, так что $\lceil \lg n \rceil$ — неверный ответ на поставленный вопрос. (Он неверен, только когда n представляет собой степень 2, но это означает, что он неверен в бесконечном числе случаев.) Правильный ответ можно найти, заметив, что для записи числа n, такого, что $2^{m-1} \leqslant n < 2^m$, требуется m бит; (3.5, a) говорит нам, что $m-1 = \lfloor \lg n \rfloor$, так что $m = \lfloor \lg n \rfloor + 1$. То есть для записи любого $n > 0$ требуется $\lfloor \lg n \rfloor + 1$ бит. Аналогичные рассуждения дают другой вариант ответа $\lceil \lg(n+1) \rceil$; эта формула справедлива и для $n = 0$, если считать, что для записи $n = 0$ в двоичном виде требуется 0 бит.

Давайте теперь рассмотрим выражения с несколькими полами или потолками. Что такое $\lceil \lfloor x \rfloor \rceil$? Это просто: поскольку $\lfloor x \rfloor$ — целое число, $\lceil \lfloor x \rfloor \rceil$ — это просто $\lfloor x \rfloor$. Этому же равно любое другое выражение, в котором наиболее глубоко вложенный $\lfloor x \rfloor$ окружен любым количеством полов и потолков.

Вот более сложная задача: докажите или опровергните утверждение

$$\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor \qquad \text{для действительного } x \geqslant 0. \tag{3.9}$$

Очевидно, что равенство достигается, когда x — целое число, так как $x = \lfloor x \rfloor$. Равенство выполняется и для частных случаев $\pi = 3.14159\ldots$, $e = 2.71828\ldots$ и $\phi = (1+\sqrt{5})/2 = 1.61803\ldots$, поскольку во всех этих случаях мы получаем $1 = 1$. Безуспешные попытки найти контрпример наводят на мысль, что равенство справедливо в общем случае, так что давайте попытаемся его доказать.

Ну конечно, первые действительные числа, приходящие на ум, — это π, e и ϕ, разве не так?

Скептицизм полезен для здоровья только до определенной степени. Скептическое отношение к намерениям и планам (особенно своим), вероятно, избавит вас от волнений и обеспечит спокойную жизнь. Но проявление слишком скептического отношения наверняка заставит вас все время быть прикованным к работе, вместо того чтобы позволить себе выкроить время для физических упражнений

Кстати, когда мы сталкиваемся с задачей "доказать или опровергнуть", то обычно начинаем с попыток опровержения при помощи контрпримера по двум причинам: опровержение потенциально проще (достаточно одного опровергающего контрпримера), а его поиски будят спящие творческие силы. Даже если утверждение истинно, поиски контрпримеров зачастую приводят к доказательству — как только скептик понимает, почему контрпример невозможен. И вообще, скептицизм полезен для здоровья.

Если бы мы пытались доказать, что $\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$ при помощи анализа, то для этого можно было бы начать с разбиения x на целую и дробную части $\lfloor x \rfloor + \{x\} = n + \theta$ с последующим разложением квадратного корня, применяя биномиальную теорему: $(n+\theta)^{1/2} = n^{1/2} + n^{-1/2}\theta/2 - n^{-3/2}\theta^2/8 + \cdots$. Но это слишком громоздкий, непрактичный подход.

Гораздо проще воспользоваться имеющимся инструментарием. Вот возможная стратегия: разобрать наружный пол и квадратный корень в $\lfloor\sqrt{\lfloor x\rfloor}\rfloor$, затем удалить внутренний пол, после чего собрать разобранное, чтобы получить $\lfloor\sqrt{x}\rfloor$. Положим $m = \lfloor\sqrt{\lfloor x\rfloor}\rfloor$ и воспользуемся правилом (3.5, a), получая $m \leqslant \sqrt{\lfloor x\rfloor} < m+1$. Тем самым мы избавляемся от скобок наружного пола, ничего при этом не теряя. Применим возведение в квадрат, поскольку все три выражения неотрицательны. При этом мы получим $m^2 \leqslant \lfloor x\rfloor < (m+1)^2$. Так мы избавляемся от квадратного корня. Затем мы удаляем пол, воспользовавшись правилом (3.7, г) для левого неравенства и (3.7, а) для правого: $m^2 \leqslant x < (m+1)^2$. Теперь восстановить проделанное не составляет особого труда: извлечь квадратные корни, получив $m \leqslant \sqrt{x} < m+1$, и воспользоваться правилом (3.5, a), чтобы получить $m = \lfloor\sqrt{x}\rfloor$. Таким образом, $\lfloor\sqrt{\lfloor x\rfloor}\rfloor = m = \lfloor\sqrt{x}\rfloor$, т.е. утверждение оказалось истинным. Аналогично доказывается, что

и восстановления сил. Чрезмерный скептицизм — это прямая дорога к состоянию "конченного человека", когда вы становитесь настолько озабочены соблюдением строгости и законченности, что уже никогда не можете ничего довести до конца.
— Скептик

$$\lceil\sqrt{\lceil x\rceil}\rceil = \lceil\sqrt{x}\rceil \qquad \text{для действительного } x \geqslant 0.$$

Только что найденное доказательство не так сильно полагается на свойства квадратных корней. Более пристальный взгляд показывает, что можно обобщить лежащие в основе доказательства идеи и доказать более общее утверждение. Пусть $f(x)$ — некоторая непрерывная монотонно возрастающая функция, обладающая тем свойством, что

$$f(x) = \text{целое число} \qquad \Longrightarrow \qquad x = \text{целое число}.$$

(Символ '$\Longrightarrow$' означает "отсюда следует".) Тогда

$$\lfloor f(x)\rfloor = \lfloor f(\lfloor x\rfloor)\rfloor \qquad \text{и} \qquad \lceil f(x)\rceil = \lceil f(\lceil x\rceil)\rceil \tag{3.10}$$

Это наблюдение было сделано Р.Д. Мак-Элисом (R. J. McEliece), когда он заканчивал университет.

всякий раз, когда определены функции $f(x)$, $f(\lfloor x\rfloor)$ и $f(\lceil x\rceil)$. Поскольку до этого мы занимались полами, давайте докажем это общее свойство для потолков, тем более что для полов доказательство почти такое же. Если $x = \lceil x\rceil$, то доказывать нечего. В противном случае $x < \lceil x\rceil$, а $f(x) < f(\lceil x\rceil)$, поскольку f — возрастающая функция. Следовательно, $\lceil f(x)\rceil \leqslant \lceil f(\lceil x\rceil)\rceil$, так как $\lceil\,\rceil$ — функция неубывающая. Если $\lceil f(x)\rceil < \lceil f(\lceil x\rceil)\rceil$, то, поскольку функция f непрерывна, должно существовать число y, такое, что $x \leqslant y < \lceil x\rceil$ и $f(y) = \lceil f(x)\rceil$. Это y является целым числом в силу специального свойства f. Но между $\lfloor x\rfloor$ и $\lceil x\rceil$ не может быть никакого целого числа. Это противоречие означает, что должно выполняться $\lceil f(x)\rceil = \lceil f(\lceil x\rceil)\rceil$.

Важный частный случай этой теоремы заслуживает того, чтобы быть явно упомянутым:

$$\left\lfloor \frac{x+m}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor + m}{n} \right\rfloor \quad \text{и} \quad \left\lceil \frac{x+m}{n} \right\rceil = \left\lceil \frac{\lceil x \rceil + m}{n} \right\rceil, \tag{3.11}$$

если m и n — целые числа, а знаменатель n положителен. Например, пусть $m = 0$; тогда $\lfloor\lfloor\lfloor x/10\rfloor/10\rfloor/10\rfloor = \lfloor x/1000\rfloor$. Троекратное деление на 10 и отбрасывание цифр остатка — это то же, что и деление на 1000 с последующим отбрасыванием всего остатка.

Попробуем теперь доказать или опровергнуть следующее утверждение:

$$\left\lceil \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rceil \stackrel{?}{=} \left\lceil \sqrt{x} \right\rceil \qquad \text{при действительном } x \geqslant 0.$$

Оно справедливо при $x = \pi$ и $x = e$, но не выполняется при $x = \phi$. Этого достаточно, чтобы утверждать, что в общем случае оно неверно.

ОТСТУПЛЕНИЕ Перед тем как идти дальше, давайте на минуту прервемся и рассмотрим различные уровни задач, которые могут предлагаться в математических книгах.

Уровень 1. Для явно указанных объекта x и свойства $P(x)$ надо *доказать* истинность $P(x)$. Например, "докажите, что $\lfloor\pi\rfloor = 3$". Задача требует доказательства некоторого предполагаемого факта.

Уровень 2. Для явно указанных множества X и свойства $P(x)$ надо доказать истинность $P(x)$ *для всех* $x \in X$. Например, "докажите, что $\lfloor x\rfloor \leqslant x$ для всех действительных x". Задача вновь состоит в поиске доказательства, которое в этот раз имеет общий характер. Мы работаем уже не с арифметикой, а с алгеброй.

Уровень 3. Для явно указанных множества X и свойства $P(x)$ надо доказать *или опровергнуть* истинность $P(x)$ для всех $x \in X$. Например, "докажите или опровергните, что $\left\lceil\sqrt{\lfloor x\rfloor}\right\rceil = \lceil\sqrt{x}\rceil$ для всех действительных $x \geqslant 0$". Здесь в задачу добавляется дополнительный уровень неопределенности — результат может оказаться как тем, так и другим. Это ближе к реальным ситуациям, с которыми постоянно сталкивается математик: утверждения в книгах обычно истинны, но в реальной исследовательской работе к новому надо относиться непредвзято. Если утверждение ложно, задача состоит в том, чтобы найти контрпример. Если утверждение истинно, следует доказать его, как и в случае задачи второго уровня.

В других моих книгах "доказать или опровергнуть" в 99.44% случаев означает то же самое, что и "доказать". К данной книге это утверждение не относится.

Уровень 4. Для явно указанных множества X и свойства $P(x)$ надо найти *необходимое и достаточное условие* $Q(x)$ того, что $P(x)$ истинно. Например, "найдите необходимое и достаточное условие того, что $\lfloor x \rfloor \geqslant \lceil x \rceil$". Задача состоит в том, чтобы найти Q, такое, что $P(x) \iff Q(x)$. Конечно, всегда имеется тривиальный ответ $Q(x) = P(x)$, но задача подразумевает поиск настолько простого условия, насколько это возможно. Для поиска работающего простого условия необходимо творчество. (Например, в нашем случае ответ — "$\lfloor x \rfloor \geqslant \lceil x \rceil \iff x$ является целым числом".) Дополнительный элемент исследования, необходимый для поиска $Q(x)$, делает эту разновидность задач более сложной, но и более типичной для математика, работающего в "реальной жизни". Ну и, конечно же, должно быть доказано, что $P(x)$ истинно тогда и только тогда, когда истинно $Q(x)$.

Но не проще.
— А. Эйнштейн (A. Einstein)

Уровень 5. Для явно указанного множества X найти *интересное общее свойство* $P(x)$ его элементов. Это область чистой науки, где, по мнению студентов, царит полный хаос. Это настоящая математика, которую авторы учебников крайне редко допускают в свои книги. КОНЕЦ ОТСТУПЛЕНИЯ

Давайте вернемся к нашему вопросу и переведем его с уровня 3 на уровень 4: какое условие является необходимым и достаточным для того, чтобы $\lceil \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rceil = \lceil \sqrt{x} \rceil$? Мы уже выяснили, что равенство выполняется при $x = 3.142$, но не при $x = 1.618$; дальнейшие эксперименты показывают нам, что оно не выполняется и при x, лежащем между 9 и 10. Более того, можно обнаружить, что условие не выполняется при $m^2 < x < m^2 + 1$, поскольку при этом в левой части мы получаем m, а в правой — $m + 1$. Во всех прочих случаях, где определен $\sqrt{x}$, а именно при $x = 0$ или $m^2 + 1 \leqslant x \leqslant (m+1)^2$, мы получаем равенство. Таким образом, для выполнения равенства необходимым и достаточным является следующее условие: либо x — целое число, либо $\sqrt{\lfloor x \rfloor}$ — не целое число.

Для следующей задачи рассмотрим сначала новое удобное обозначение, предложенное Ч. Э. Р. Хоаром (C. A. R. Hoare) и Лайлом Рэмшоу (Lyle Ramshaw), для интервалов действительной прямой: $[\alpha \,..\, \beta]$ означает множество действительных чисел x, таких, что $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$. Это множество называется *замкнутым интервалом*, поскольку он включает обе конечные точки α и β. Интервал $(\alpha \,..\, \beta)$, не включающий ни одной из конечных точек, состоит из всех x, таких, что $\alpha < x < \beta$; такой интервал называется *открытым интервалом*. Интервалы $[\alpha \,..\, \beta)$ и $(\alpha \,..\, \beta]$, содержащие только по одной конечной точке, определяются аналогично и называются *полуоткрытыми*.

Пессимисты называют их полузамкнутыми.

Сколько целых чисел содержится в таких интервалах? Полуоткрытые интервалы проще, так что начнем с них. Фактически полуоткрытые интервалы почти всегда удобнее открытых или закрытых. Например, они аддитивны — при объединении полуоткрытых интервалов $[\alpha\,..\,\beta)$ и $[\beta\,..\,\gamma)$ получается полуоткрытый интервал $[\alpha\,..\,\gamma)$. В случае открытых интервалов это не получается, так как точка β оказывается исключенной; для замкнутых интервалов проблема иная — точка β оказывается включенной дважды.

Вернемся к нашей задаче. Если α и β — целые числа, ответ прост: интервал $[\alpha\,..\,\beta)$ содержит $\beta-\alpha$ целых чисел α, $\alpha+1$, $\ldots$, $\beta-1$ при условии, что $\alpha\leqslant\beta$. Аналогично интервал $(\alpha\,..\,\beta]$ содержит $\beta-\alpha$ целых чисел при том же условии. Но наша задача более трудная, так как по условию α и β — произвольные действительные числа. Но эту задачу можно свести к более простой, поскольку для целых n согласно (3.7)

$$\begin{aligned} \alpha \leqslant n < \beta \qquad &\iff \qquad \lceil\alpha\rceil \leqslant n < \lceil\beta\rceil\,, \\ \alpha < n \leqslant \beta \qquad &\iff \qquad \lfloor\alpha\rfloor < n \leqslant \lfloor\beta\rfloor\,. \end{aligned}$$

Интервалы справа имеют целые конечные точки и содержат столько же целых чисел, что и интервалы слева с действительными конечными точками. Поэтому интервал $[\alpha\,..\,\beta)$ содержит ровно $\lceil\beta\rceil-\lceil\alpha\rceil$ целых чисел, а $(\alpha\,..\,\beta]$ — $\lfloor\beta\rfloor-\lfloor\alpha\rfloor$. Это один из случаев, когда нам надо не избавляться от скобок пола или потолка, а, напротив, добавить их.

О мнемонических правилах: знаете, как запомнить первые знаки числа π? Они соответствуют количеству букв в словах стишка "это я знаю и помню прекрасно, пи многие знаки мне лишни, напрасны".

Кстати, имеется мнемоническое правило для запоминания, когда следует применять полы, а когда — потолки: полуоткрытые интервалы, которые включают не правую, а левую конечную точку (такие, как $0\leqslant\theta<1$), используются несколько чаще тех, которые включают правую точку, а не левую, так же как полы используются чаще потолков. Но по закону Мэрфи правило противоположно ожидаемому — потолки соответствуют интервалам $[\alpha\,..\,\beta)$, а полы — интервалам $(\alpha\,..\,\beta]$.

Аналогичный анализ показывает, что закрытый интервал $[\alpha\,..\,\beta]$ содержит ровно $\lfloor\beta\rfloor-\lceil\alpha\rceil+1$ целых чисел, а открытый интервал $(\alpha\,..\,\beta)$ — ровно $\lceil\beta\rceil-\lfloor\alpha\rfloor-1$, но в последнем случае мы налагаем дополнительное ограничение $\alpha\neq\beta$, чтобы эта формула не смущала нас заявлением о том, что пустой интервал $(\alpha\,..\,\alpha)$ содержит -1 целых чисел. Подытожим найденные факты:

интервал	количество целых чисел	ограничение	
$[\alpha\,..\,\beta]$	$\lfloor\beta\rfloor - \lceil\alpha\rceil + 1$	$\alpha \leqslant \beta$,	
$[\alpha\,..\,\beta)$	$\lceil\beta\rceil - \lceil\alpha\rceil$	$\alpha \leqslant \beta$,	(3.12)
$(\alpha\,..\,\beta]$	$\lfloor\beta\rfloor - \lfloor\alpha\rfloor$	$\alpha \leqslant \beta$,	
$(\alpha\,..\,\beta)$	$\lceil\beta\rceil - \lfloor\alpha\rfloor - 1$	$\alpha < \beta$.	

А вот задача, от которой мы не сможем отказаться. В "Клубе конкретной математики" есть казино (только для покупателей этой книги), в котором имеется рулетка с колесом на тысячу гнезд, пронумерованных от 1 до 1000. Если при вращении колеса выпадает номер n, который делится на пол своего кубического корня, т.е. если

$$\lfloor\sqrt[3]{n}\rfloor \setminus n\,,$$

то это номер выигрышный, и казино платит нам 5 долларов; в противном случае это проигрышный номер, и мы платим 1 доллар казино. (Обозначение '$a \backslash b$', которое читается как "a делит b", означает, что b в точности кратно a; это отношение детально рассматривается в главе 4.) Можно ли "сделать деньги", играя в казино?

Опрос в аудитории дал следующие результаты: 28 студентов отказались играть, 13 захотели рискнуть, остальные решили не отвечать на вопрос.

Можно вычислить средний выигрыш — т.е. сумму, которую мы выигрываем (или теряем) за одну игру, — подсчитав сперва количество W выигрышных номеров и $L = 1000 - W$ проигрышных. Если каждый номер выпадет по одному разу в серии из 1000 игр, мы выиграем $5W$ долларов и проиграем L долларов, так что средний выигрыш составляет

$$\frac{5W - L}{1000} = \frac{5W - (1000 - W)}{1000} = \frac{6W - 1000}{1000}\,.$$

Если имеется не менее 167 выигрышных номеров, мы получаем прибыль, в противном случае выигрывает казино.

Но как же нам подсчитать количество выигрышных номеров среди 1000? Несложно обнаружить закономерность. Номера от 1 до $2^3 - 1 = 7$ выигрышные, так как для каждого из них $\lfloor\sqrt[3]{n}\rfloor = 1$. Среди номеров от $2^3 = 8$ до $3^3 - 1 = 26$ выигрышными являются только четные номера. Среди номеров от $3^3 = 27$ до $4^3 - 1 = 63$ — только те, которые делятся на 3, и т.д.

Систематический анализ задачи возможен при помощи методов суммирования из главы 2 с привлечением записи Айверсона для логических выражений:

$$
\begin{aligned}
W &= \sum_{n=1}^{1000} [n \text{— выигрышный номер}] = \\
&= \sum_{1\leqslant n\leqslant 1000} \bigl[\lfloor\sqrt[3]{n}\rfloor \backslash n\bigr] = \sum_{k,n} \bigl[k=\lfloor\sqrt[3]{n}\rfloor\bigr][k\backslash n][1\leqslant n\leqslant 1000] = \\
&= \sum_{k,m,n} \bigl[k^3\leqslant n<(k+1)^3\bigr][n=km][1\leqslant n\leqslant 1000] = \\
&= 1+\sum_{k,m} \bigl[k^3\leqslant km<(k+1)^3\bigr][1\leqslant k<10] = \\
&= 1+\sum_{k,m} \bigl[m\in\bigl[k^2\,..\,(k+1)^3/k\bigr)\bigr][1\leqslant k<10] = \\
&= 1+\sum_{1\leqslant k<10} \bigl(\lceil k^2+3k+3+1/k\rceil-\lceil k^2\rceil\bigr) = \\
&= 1+\sum_{1\leqslant k<10} (3k+4) = 1+\frac{7+31}{2}\cdot 9 = 172\,.
\end{aligned}
$$

Этот вывод заслуживает внимательного изучения. Обратите внимание, что в шестой строке использована наша формула (3.12) для количества целых чисел в полуоткрытом интервале. Единственная “сложность” состоит в рассмотрении при переходе от третьей строки к четвертой $n = 1000$ как отдельного случая. (Неравенство $k^3 \leqslant n < (k+1)^3$ нелегко объединить с неравенством $1 \leqslant n \leqslant 1000$ при $k = 10$.) В общем случае граничные условия — одно из наиболее критичных мест при работе с суммами.

Вот именно!

В последней строке выясняется, что $W = 172$; следовательно, наш средний выигрыш в одной игре равен $(6\cdot 172-1000)/1000$ долларам, т.е. 3.2 цента. Можно ожидать, что, сделав 100 ставок по доллару, вы станете богаче примерно на 3.20 доллара (если, конечно, казино не сделает так, что одни числа будут более равны, чем другие).

Где, вы говорите, находится это казино?

Задача о казино, которую мы только что так благополучно решили, представляет собой приукрашенную версию сухого вопроса “сколько целых чисел n, где $1 \leqslant n \leqslant 1000$, удовлетворяют отношению $\lfloor\sqrt[3]{n}\rfloor \backslash n$?” Математически это два одинаковых вопроса. Однако иногда сто́ит приукрасить задачу. Мы воспользовались более богатым словарем (“выигрышные номера” и “проигрышные номера”), что помогло нам лучше понять происходящее.

Обобщим задачу. Предположим, мы изменили 1000 на 1000000 или на еще большее число N (считаем, что у казино большие связи, и достать колесо побольше для него не проблема). Сколько выигрышных номеров имеется теперь?

В этом случае вполне приемлемы те же рассуждения, что и ранее, но надо быть поосторожнее с самым большим значением k, которое мы для удобства обозначим как K:

$$K = \lfloor \sqrt[3]{N} \rfloor .$$

(Ранее K было равно 10.) Общее количество выигрышных номеров для произвольного N становится равным

$$\begin{aligned} W &= \sum_{1 \leqslant k < K} (3k+4) + \sum_m \bigl[K^3 \leqslant Km \leqslant N\bigr] = \\ &= \tfrac{1}{2}(7+3K+1)(K-1) + \sum_m \bigl[m \in [K^2 \,..\, N/K]\bigr] = \\ &= \tfrac{3}{2}K^2 + \tfrac{5}{2}K - 4 + \sum_m \bigl[m \in [K^2 \,..\, N/K]\bigr] . \end{aligned}$$

Мы знаем, что оставшаяся сумма равна $\lfloor N/K \rfloor - \lceil K^2 \rceil + 1 = \lfloor N/K \rfloor - K^2 + 1$; следовательно, формула

$$W = \lfloor N/K \rfloor + \tfrac{1}{2}K^2 + \tfrac{5}{2}K - 3 , \qquad K = \lfloor \sqrt[3]{N} \rfloor \tag{3.13}$$

дает общий ответ для колеса с N гнездами.

Первые два члена этой формулы приближенно равны $N^{2/3} + \frac{1}{2}N^{2/3} = \frac{3}{2}N^{2/3}$, а остальные члены при большом N оказываются гораздо меньшими. В главе 9 мы научимся выводить выражения наподобие

$$W = \tfrac{3}{2}N^{2/3} + O(N^{1/3}) ,$$

где $O(N^{1/3})$ означает величину, не превосходящую некоторой константы, умноженной на $N^{1/3}$. Какой бы ни была константа, мы знаем, что она не зависит от N; так что при большом N вклад O-члена в W будет мал по сравнению с $\frac{3}{2}N^{2/3}$. Например, в следующей таблице показано, насколько значения $\frac{3}{2}N^{2/3}$ близки к значениям W:

N	$\frac{3}{2}N^{2/3}$	W	Погрешность, %
1 000	150.0	172	12.791
10 000	696.2	746	6.670
100 000	3231.7	3343	3.331
1 000 000	15000.0	15247	1.620
10 000 000	69623.8	70158	0.761
100 000 000	323165.2	324322	0.357
1 000 000 000	1500000.0	1502497	0.166

Вполне нормальное приближение.

Приближенные формулы полезны постольку, поскольку они проще формул с полами и потолками. Однако зачастую важна абсолютная точность, в особенности при малых значениях N, с которыми обычно приходится иметь дело на практике. Например, владелец казино может опрометчиво предположить, что при $N = 1000$ имеется только $\frac{3}{2}N^{2/3} = 150$ выигрышных номеров (в этом случае доход казино составил бы 10 центов).

Завершим раздел рассмотрением так называемых спектров. Определим *спектр* действительного числа α как бесконечное мультимножество целых чисел

$$\mathrm{Spec}(\alpha) = \{\lfloor\alpha\rfloor, \lfloor 2\alpha\rfloor, \lfloor 3\alpha\rfloor, \ldots\}.$$

(Мультимножество — это то же самое, что и множество, но оно может содержать повторяющиеся элементы.) Например, спектр $1/2$ начинается следующим образом: $\{0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots\}$.

Легко доказать, что двух одинаковых спектров не существует, т.е. из $\alpha \neq \beta$ следует $\mathrm{Spec}(\alpha) \neq \mathrm{Spec}(\beta)$. Предположим без потери общности, что $\alpha < \beta$. Существует такое положительное целое число m, что $m(\beta - \alpha) \geqslant 1$. (В действительности таковым является любое целое $m \geqslant \lceil 1/(\beta - \alpha)\rceil$; но не будем постоянно хвастать нашим знанием полов и потолков.) Следовательно, $m\beta - m\alpha \geqslant 1$ и $\lfloor m\beta\rfloor > \lfloor m\alpha\rfloor$. Таким образом, $\mathrm{Spec}(\beta)$ содержит менее m элементов $\leqslant \lfloor m\alpha\rfloor$, в то время как $\mathrm{Spec}(\alpha)$ содержит их как минимум m.

…без нахождения общности…

Спектры обладают рядом красивых свойств. Рассмотрим, например, мультимножества

$$\mathrm{Spec}(\sqrt{2}\,) = \\ = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 21, 22, 24, \ldots\},$$
$$\mathrm{Spec}(2 + \sqrt{2}\,) = \\ = \{3, 6, 10, 13, 17, 20, 23, 27, 30, 34, 37, 40, 44, 47, 51, \ldots\}.$$

“Если x есть некоторое иррациональное число, меньшее единицы, то можно взять один из двух рядов величин m/x, $m/(1-x)$, где m — целое число; каждое число, принадлежащее к тому или иному ряду, и только оно одно, будет заключено между любыми двумя заданными последовательными числами”.
— Рэлей (Rayleigh) [304]

Спектр $\mathrm{Spec}(\sqrt{2}\,)$ легко вычислить на калькуляторе, а n-й элемент спектра $\mathrm{Spec}(2 + \sqrt{2}\,)$ согласно (3.6) ровно на $2n$ больше n-го элемента спектра $\mathrm{Spec}(\sqrt{2}\,)$. Более внимательное рассмотрение показывает, что эти два спектра связаны гораздо более удивительным образом: похоже, что любое число, которого нет в одном спектре, имеется в другом, но никакое число не содержится одновременно в обоих спектрах! И это на самом деле так: положительные целые числа представляют собой объединение непересекающихся множеств $\mathrm{Spec}(\sqrt{2}\,)$ и $\mathrm{Spec}(2 + \sqrt{2}\,)$. Говорят, что эти спектры образуют *разбиение* (*partition*) положительных целых чисел.

Для доказательства этого факта подсчитаем, сколько элементов в множестве $\mathrm{Spec}(\sqrt{2}\,)$ не превышают n и сколько таких же элементов в множестве $\mathrm{Spec}(2+\sqrt{2}\,)$. Если для любого n в сумме их окажется n, то эти два спектра и в самом деле образуют разбиение всех целых положительных чисел.

Верно: при возрастании n на 1 должно возрастать только одно из этих чисел.

Пусть α положительно. Количество элементов в $\mathrm{Spec}(\alpha)$, таких, что они $\leqslant n$, равно

$$\begin{aligned} N(\alpha, n) &= \sum_{k>0} \big[\lfloor k\alpha \rfloor \leqslant n\big] = \\ &= \sum_{k>0} \big[\lfloor k\alpha \rfloor < n+1\big] = \\ &= \sum_{k>0} [k\alpha < n+1] = \\ &= \sum_{k} \big[0 < k < (n+1)/\alpha\big] = \\ &= \lceil (n+1)/\alpha \rceil - 1\,. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Два момента в этом выводе особенно интересны. Во-первых, в нем для замены '$\leqslant$' на '$<$' используется правило

$$m \leqslant n \quad\Longleftrightarrow\quad m < n+1\,, \qquad m \text{ и } n \text{— целые}, \tag{3.15}$$

так что в соответствии с (3.7) можно убрать скобки пола. Во-вторых, и это более тонкий момент, суммирование выполняется по всем $k > 0$, а не $k \geqslant 1$, поскольку величина $(n+1)/\alpha$ может быть меньше 1 при определенных n и α. Если попытаться применить (3.12) для определения количества целых чисел в интервале $[1\,..\,(n+1)/\alpha)$, в отличие от количества целых чисел в интервале $(0\,..\,(n+1)/\alpha)$, то получится верный ответ, но вывод при этом окажется неверен в силу несоблюдения условий его применимости.

Итак, у нас есть формула для $N(\alpha, n)$. Теперь можно проверить, образуют ли $\mathrm{Spec}(\sqrt{2}\,)$ и $\mathrm{Spec}(2+\sqrt{2}\,)$ разбиение положительных целых чисел, путем проверки, выполняется ли соотношение $N(\sqrt{2}, n) + N(2+\sqrt{2}, n) = n$ для всех целых чисел $n > 0$, используя для этого (3.14):

$$\begin{aligned} &\left\lceil \frac{n+1}{\sqrt{2}} \right\rceil - 1 + \left\lceil \frac{n+1}{2+\sqrt{2}} \right\rceil - 1 = n \\ \Longleftrightarrow\quad &\left\lfloor \frac{n+1}{\sqrt{2}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{2+\sqrt{2}} \right\rfloor = n \qquad \text{согласно (3.2)}, \end{aligned}$$

$$\iff \quad \frac{n+1}{\sqrt{2}} - \left\{\frac{n+1}{\sqrt{2}}\right\} + {} \\ + \frac{n+1}{2+\sqrt{2}} - \left\{\frac{n+1}{2+\sqrt{2}}\right\} = n \quad \text{согласно (3.8).}$$

Все упрощается благодаря изящному равенству

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{2}} = 1\,,$$

так что наше условие сводится к проверке, верно ли, что

$$\left\{\frac{n+1}{\sqrt{2}}\right\} + \left\{\frac{n+1}{2+\sqrt{2}}\right\} = 1$$

для всех $n > 0$. А это верно, потому что перед нами дробные части нецелых чисел, которые в сумме дают целое число $n+1$. Значит, мы действительно имеем дело с разбиением.

3.3 Рекуррентности с полом и потолком

Полы и потолки добавляют новое интересное измерение в изучение рекуррентных соотношений. Давайте для начала рассмотрим рекуррентность

$$\begin{aligned} K_0 &= 1\,; \\ K_{n+1} &= 1 + \min(2K_{\lfloor n/2 \rfloor}, 3K_{\lfloor n/3 \rfloor}) \qquad \text{при } n \geqslant 0. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Так, например, K_1 равно $1+\min(2K_0, 3K_0) = 3$, а начало последовательности имеет вид 1, 3, 3, 4, 7, 7, 7, 9, 9, 10, 13, ... Один из авторов этой книги с присущей ему скромностью решил назвать эти числа числами Кнута.

В упр. 25 требуется доказать или опровергнуть, что $K_n \geqslant n$ при всех $n \geqslant 0$. Первые несколько перечисленных чисел K удовлетворяют этому неравенству, так что, похоже, оно может выполняться и в общем случае. Давайте попробуем доказать его по индукции. База индукции при $n = 0$ непосредственно следует из определения рекуррентности. Для шага индукции предположим, что неравенство выполняется для всех значений до некоторого фиксированного неотрицательного n, и попытаемся показать, что $K_{n+1} \geqslant n+1$. Из рекуррентного соотношения нам известно, что $K_{n+1} = 1+\min(2K_{\lfloor n/2 \rfloor}, 3K_{\lfloor n/3 \rfloor})$. Гипотеза индукции гласит, что $2K_{\lfloor n/2 \rfloor} \geqslant 2\lfloor n/2 \rfloor$ и $3K_{\lfloor n/3 \rfloor} \geqslant 3\lfloor n/3 \rfloor$. Однако $2\lfloor n/2 \rfloor$ может быть равным самое меньшее $n-1$, а $3\lfloor n/3 \rfloor$ может быть равным самое меньшее $n-2$. Самое большее, что нам удается заключить из гипотезы индукции, — это то, что $K_{n+1} \geqslant 1+(n-2)$, но этого чуть-чуть не хватает до $K_{n+1} \geqslant n+1$.

Теперь у нас есть причины усомниться в верности неравенства $K_n \geqslant n$, так что давайте попробуем его опровергнуть. Если нам удастся найти такое n, что либо $2K_{\lfloor n/2 \rfloor} < n$, либо $3K_{\lfloor n/3 \rfloor} < n$, — другими словами, такое, что

$$K_{\lfloor n/2 \rfloor} < n/2 \qquad \text{или} \qquad K_{\lfloor n/3 \rfloor} < n/3 ,$$

то мы получим $K_{n+1} < n + 1$. Возможно ли это? Ответ мы пока что не дадим, чтобы не портить впечатление от упр. 25.

Рекуррентные соотношения с полами и/или потолками часто возникают в информатике; это связано с тем, что масса алгоритмов основана на принципе "разделяй и властвуй", которые часто сводят задачу размера n к решению аналогичных задач меньших размеров, являющихся долями n. Например, один из способов отсортировать n записей (где $n > 1$) состоит в разделении их на две примерно равные части, одну — размером $\lceil n/2 \rceil$ и вторую — размером $\lfloor n/2 \rfloor$. (Между прочим, формула

$$n = \lceil n/2 \rceil + \lfloor n/2 \rfloor \tag{3.17}$$

часто оказывается очень кстати при решении такого рода задач.) После того, как каждая из частей отсортирована по отдельности (тем же рекурсивно примененным методом), их можно объединить в требуемом порядке, выполняя не более $n - 1$ сравнений. Таким образом, общее количество сравнений не превышает $f(n)$, где

$$\begin{aligned} f(1) &= 0 , \\ f(n) &= f(\lceil n/2 \rceil) + f(\lfloor n/2 \rfloor) + n - 1 \qquad \text{при } n > 1. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Решение этой рекуррентности приводится в упр. 34.

Задача Иосифа из главы 1 содержит подобную рекуррентность, которую можно привести к виду

$$\begin{aligned} J(1) &= 1 ; \\ J(n) &= 2J(\lfloor n/2 \rfloor) - (-1)^n \qquad \text{при } n > 1. \end{aligned}$$

Теперь мы уже оснащены гораздо бо́льшим количеством методов по сравнению с главой 1, так что давайте рассмотрим более приближенную к реальности задачу Иосифа, в которой убивают каждого третьего, а не второго. Если применить методы из главы 1 к этой более сложной задаче, то мы придем к рекуррентности вида

$$J_3(n) = \left(\left\lceil \tfrac{3}{2} J_3\big(\lfloor \tfrac{2}{3} n \rfloor\big) + a_n \right\rceil \bmod n \right) + 1 ,$$

где 'mod' — это функция, с которой мы вскоре познакомимся, а $a_n = -2$, $+1$ или $-\frac{1}{2}$ соответственно при $n \bmod 3 = 0$, 1 или 2. Но на эту рекуррентность страшно даже смотреть, не то что ее решать.

Есть и другой подход к задаче Иосифа, который приводит к более благоприятной ситуации. Всякий раз, когда счет пропускает человека, оставляя его на этом круге в живых, ему можно присваивать новый номер. Таким образом, 1-й и 2-й человек становятся $n+1$-м и $n+2$-м, затем 3-го казнят; 4-й и 5-й становятся $n+3$-м и $n+4$-м, затем 6-го казнят; ...; $3k+1$-й и $3k+2$-й становятся $n+2k+1$-м и $n+2k+2$-м, затем $3k+3$-го казнят; ...; затем $3n$-го казнят (или он остается в живых). Например, при $n = 10$ перенумерация имеет следующий вид:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12		13	14		15	16		17
18			19	20			21		22
			23	24					25
			26						27
			28						
			29						
			30						

Казнимый k-м человек прекращает существование вместе с номером $3k$. Так что можно вывести, кто спасется, если определить исходный номер человека с номером $3n$.

Если $N > n$, то жертва с номером N должна была иметь некоторый предыдущий номер, найти который можно следующим образом: поскольку $N = n + 2k + 1$ или $N = n + 2k + 2$, то $k = \lfloor (N-n-1)/2 \rfloor$. Предыдущий номер был соответственно $3k+1$ или $3k + 2$. То есть он был равен $3k + (N - n - 2k) = k + N - n$. Следовательно, номер спасшегося $J_3(n)$ можно вычислить следующим образом:

$$N := 3n;$$
$$\textbf{пока } N > n, \textbf{ выполнять } \ N := \left\lfloor \frac{N-n-1}{2} \right\rfloor + N - n;$$
$$J_3(n) := N.$$

"Not too slow, not too fast".
— Л. Армстронг (L. Armstrong)

Это не аналитическая запись $J_3(n)$ и даже не рекуррентное соотношение. Но как минимум это алгоритм, который при большом n позволяет достаточно быстро получить интересующий нас ответ.

К счастью, имеется возможность упрощения этого алгоритма путем использования переменной $D = 3n + 1 - N$ вместо N. (Это изменение соответствует присвоению номеров, уменьшающихся от $3n$ до 1 вместо увеличивающихся от 1 до $3n$.) Тогда усложненное правило присвоения значений N приобретает вид

$$D := 3n+1-\left(\left\lfloor\frac{(3n+1-D)-n-1}{2}\right\rfloor+(3n+1-D)-n\right) =$$
$$= n+D-\left\lfloor\frac{2n-D}{2}\right\rfloor = D-\left\lfloor\frac{-D}{2}\right\rfloor = D+\left\lceil\frac{D}{2}\right\rceil = \left\lceil\tfrac{3}{2}D\right\rceil,$$

и алгоритм можно переписать следующим образом:

$D := 1$;
пока $D \leqslant 2n$, **выполнять** $D := \lceil\frac{3}{2}D\rceil$;
$J_3(n) := 3n+1-D$.

Ага! Это уже гораздо лучше, так как n очень просто входит в вычисления. Фактически, при помощи аналогичных рассуждений можно показать, что если уничтожается каждый q-й человек, то номер уцелевшего $J_q(n)$ можно вычислить следующим образом:

$D := 1$;
пока $D \leqslant (q-1)n$, **выполнять** $D := \lceil\frac{q}{q-1}D\rceil$; (3.19)
$J_q(n) := qn+1-D$.

В случае $q = 2$, который хорошо нам знаком, D растет до 2^{m+1} при $n = 2^m+l$; следовательно, $J_2(n) = 2(2^m+l)+1-2^{m+1} = 2l+1$. Отлично.

Знакома ли вам так же хорошо оценка 2?

В (3.19) вычисляется последовательность целых чисел, которая может быть определена при помощи следующего рекуррентного соотношения:

$$D_0^{(q)} = 1;$$
$$D_n^{(q)} = \left\lceil\frac{q}{q-1}D_{n-1}^{(q)}\right\rceil \qquad \text{при } n > 0. \tag{3.20}$$

Непохоже, чтобы эти числа были как-то связаны с известными функциями простым образом, за исключением $q = 2$; следовательно, вряд ли удастся найти для них приемлемую аналитическую запись. Но если принять последовательность $D_n^{(q)}$ как “известную”, то решение обобщенной задачи Иосифа очень легко описать: номер спасшегося $J_q(n)$ равен $qn+1-D_k^{(q)}$, где k — наименьшее возможное число, такое, что $D_k^{(q)} > (q-1)n$.

“Известную”, как, например, гармонические числа. Э. М. Одлыжко (A. M. Odlyzko) и Г. С. Вильф (H. S. Wilf) показали [283], что $D_n^{(3)} = \lfloor(\frac{3}{2})^n C\rfloor$, где $C \approx 1.622270503$.

3.4 ‘MOD’: бинарная операция

Если m и n — целые положительные числа, то частное от деления n на m равно $\lfloor n/m \rfloor$. Полезно ввести простое обозначение и для остатка от этого деления. Обозначим его ‘$n \bmod m$’. Основная формула

$$n = \underbrace{m\lfloor n/m \rfloor}_{\text{частное}} + \underbrace{n \bmod m}_{\text{остаток}}$$

гласит, что можно выразить $n \bmod m$ как $n - m\lfloor n/m \rfloor$. Можно обобщить эту формулу и на отрицательные целые числа, а фактически и на произвольные действительные числа:

$$x \bmod y = x - y\lfloor x/y \rfloor \qquad \text{при } y \neq 0. \tag{3.21}$$

Откуда взялось название «‘mod’: бинарная операция»? Вы узнаете это в следующей главе.

Тем самым ‘mod’ определяется как бинарная операция, такая же, как сложение или вычитание. Неформально математики давно пользуются mod, вычисляя различные величины по модулю 10, по модулю 2π и т.д., но формально это обозначение утвердилось только в последние десятилетия. Так что это — новое обозначение для старого понятия.

Можно легко уловить смысл $x \bmod y$ для положительных действительных чисел x и y интуитивно. Представим себя бегуном по окружности длиной y, точкам которой назначены действительные значения из интервала $[0\,..\,y)$. Если пройти по окружности расстояние x, начиная с точки 0, то мы окажемся в точке $x \bmod y$. (При этом мы $\lfloor x/y \rfloor$ раз пройдем через точку 0.)

Остерегайтесь языков программирования, в которых используется иное определение. (В частности, это относится к языкам программирования С и С++. — Переводчик)

При отрицательных x или y следует внимательно рассмотреть определение операции, чтобы точно понять, что же в этом случае означает операция ‘mod’. Вот некоторые примеры с целыми значениями:

$$\begin{aligned}
5 \bmod 3 &= 5 - 3\lfloor 5/3 \rfloor &&= 2\,,\\
5 \bmod -3 &= 5 - (-3)\lfloor 5/(-3) \rfloor &&= -1\,,\\
-5 \bmod 3 &= -5 - 3\lfloor -5/3 \rfloor &&= 1\,,\\
-5 \bmod -3 &= -5 - (-3)\lfloor -5/(-3) \rfloor &&= -2\,.
\end{aligned}$$

*Может, назвать его мофигом?**

Число после ‘mod’ называется *модулем*; как называть число перед ‘mod’, пока что не придумали. В приложениях модуль

* В оригинале — “modumor”. Непереводимая игра слов, основанная на созвучии второй части слова “модуль” (modulus) слову “less” (меньше), а второй части слова “modumor” — слову “more” (больше). — Переводчик

обычно положителен, но данное выше определение сохраняет смысл и при отрицательных значениях. В обоих случаях значение $x \bmod y$ находится между 0 и модулем:

$$0 \leqslant x \bmod y < y \qquad \text{при } y > 0,$$
$$0 \geqslant x \bmod y > y \qquad \text{при } y < 0.$$

Но что делать с $y = 0$? Определение (3.21), чтобы избежать деления на 0, оставляет данный случай неопределенным, но для полноты можно определить

$$x \bmod 0 = x. \tag{3.22}$$

Нет модуля — нет и операции!
— Переводчик

Это соглашение сохраняет то свойство, что $x \bmod y$ всегда отличается от x на величину, кратную y. (Может показаться более естественным сделать эту функцию непрерывной в 0 при помощи следующего определения: $x \bmod 0 = \lim_{y\to 0} x \bmod y = 0$. Но в главе 4 мы увидим, что это сделало бы ее менее полезной. Непрерывность — не самый важный аспект операции mod.)

Мы уже сталкивались с одним замаскированным частным случаем операции mod, когда записывали число x в виде суммы его целой и дробной частей: $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$. Дробная часть может быть записана также как $x \bmod 1$, потому что

$$x = \lfloor x \rfloor + x \bmod 1 .$$

Обратите внимание, что в этой формуле круглые скобки не нужны: считается, что знак связывает операнды сильнее, чем знаки сложения и вычитания (т.е. *приоритет* этого оператора выше приоритетов операторов сложения или вычитания. — *Примеч. пер.*).

При определении операции mod использовалась функция “пол”, в то время как функция “потолок” такого внимания не была удостоена. Возможно, стоило бы воспользоваться функцией “потолок” для определения аналога операции mod наподобие

$$x \operatorname{mumble} y = y\lceil x/y \rceil - x .$$

В 1970-е годы был популярен стиль “mod”. Может, стоит назвать новую функцию не “mumble”, а “punk” (панк)?

Нет — я автор, как хочу, так и называю! Мне нравится “mumble”.

(“Mumble” — нечленораздельное бормотание (англ.). — *Примеч. пер.*) В случае нашей аналогии с бегом по кругу это соответствует расстоянию, которое осталось пробежать бегуну, преодолевшему расстояние x, чтобы попасть в исходную точку 0. Но, конечно же, требуется более подходящее название, чем ‘mumble’. Впрочем, если бы нашлось применение этой операции, за названием дело бы не стало…

Дистрибутивный закон представляет собой наиболее важное алгебраическое свойство операции mod:

$$c(x \bmod y) \;=\; (cx) \bmod (cy) \qquad (3.23)$$

Заметим, что x mumble $y = (-x) \bmod y$.

для всех действительных c, x и y. (Если кто-то предпочитает считать, что оператор mod связывает операнды слабее умножения, он может убрать скобки из правой части равенства.) Этот закон легко доказать, исходя из определения (3.21), так как

$$c(x \bmod y) = c(x - y\lfloor x/y \rfloor) = cx - cy\lfloor cx/cy \rfloor = cx \bmod cy\,,$$

если $cy \neq 0$; случаи с нулевыми модулями тривиальны. Приведенные ранее четыре примера с ± 5 и ± 3 дважды иллюстрируют этот закон при $c = -1$. Тождество типа (3.23) действует успокаивающе, ибо оно позволяет надеяться, что операция 'mod' определена надлежащим образом.

А попросту — в остатке?

В оставшейся части этого раздела мы рассмотрим приложение операции 'mod', в котором она оказывается весьма полезной, хотя и не играет центральной роли. Рассматриваемая задача часто возникает в многочисленных ситуациях, когда надо максимально равномерно разбить n предметов на m групп.

Предположим, например, что у нас есть n коротких строк текста, которые надо разместить в m столбцах. По эстетическим соображениям желательно, чтобы столбцы располагались в убывающем по высоте порядке (фактически — в неубывающем порядке) и чтобы высота столбцов была примерно одинакова — никакие два из них не должны отличаться по высоте более чем на одну строку текста. Если 37 строк текста разбиваются на пять столбцов, то предпочтительно такое их размещение, как показано справа:

8	8	8	8	5
line 1	line 9	line 17	line 25	line 33
line 2	line 10	line 18	line 26	line 34
line 3	line 11	line 19	line 27	line 35
line 4	line 12	line 20	line 28	line 36
line 5	line 13	line 21	line 29	line 37
line 6	line 14	line 22	line 30	
line 7	line 15	line 23	line 31	
line 8	line 16	line 24	line 32	

8	8	7	7	7
line 1	line 9	line 17	line 24	line 31
line 2	line 10	line 18	line 25	line 32
line 3	line 11	line 19	line 26	line 33
line 4	line 12	line 20	line 27	line 34
line 5	line 13	line 21	line 28	line 35
line 6	line 14	line 22	line 29	line 36
line 7	line 15	line 23	line 30	line 37
line 8	line 16			

Кроме того, хотелось бы распределить строки текста "постолбцово", т.е. вначале решается, сколько строк будет в первом столбце, затем — во втором, третьем и так далее в соответствии с порядком чтения текста человеком. Построчное распределение автоматически приведет к требуемому размещению, но порядок чтения строк при этом окажется нарушенным (мы получили бы нечто подобное размещению справа, но в первом столбце были бы строки 1, 6, 11, ..., 36, а не 1, 2, 3, ..., 8, как должно быть).

Построчную стратегию распределения использовать нельзя, но она позволяет определить,сколько строк разместится в каждом столбце. Если n не кратно m, то в процессе построчного размещения выясняется, что длинные столбцы должны содержать по $\lceil n/m \rceil$ строк, а короткие — по $\lfloor n/m \rfloor$. Длинных столбцов будет ровно $n \bmod m$ (и, как выясняется, ровно $n \operatorname{mumble} m$ коротких).

Давайте обобщим терминологию и поговорим о 'предметах' и 'группах' вместо 'строк' и 'столбцов'. Только что мы выяснили, что первая группа должна содержать $\lceil n/m \rceil$ предметов; следовательно, можно попробовать такую схему последовательного распределения: для распределения n предметов по m группам при $m > 0$ поместим $\lceil n/m \rceil$ предметов в одну группу, а затем рекурсивно применим ту же процедуру к остальным $n' = n - \lceil n/m \rceil$ оставшимся предметам для их размещения в $m' = m - 1$ прочих группах.

Например, если $n = 314$, а $m = 6$, то распределение выполняется следующим образом:

Оставшиеся предметы	Оставшиеся группы	⌈Предметов в группе⌉
314	6	53
261	5	53
208	4	52
156	3	52
104	2	52
52	1	52

Как видите, схема работает — мы получаем группы практически неизменного размера, несмотря на то, что делитель изменяется.

Почему она работает? В общем случае можно предположить, что $n = qm + r$, где $q = \lfloor n/m \rfloor$ и $r = n \bmod m$. Если $r = 0$, процесс размещения прост: мы помещаем $\lceil n/m \rceil = q$ предметов в первую группу и заменяем n на $n' = n - q$, оставляя $n' = qm'$ предметов для размещения в остальных $m' = m - 1$ группах. Если же $r > 0$, мы помещаем $\lceil n/m \rceil = q + 1$ предметов в первую группу и заменяем n на $n' = n - q - 1$, оставляя $n' = qm' + r - 1$ предметов для последующих групп. Новый остаток $r' = r - 1$, а q остается тем же самым. Отсюда следует, что получится r групп с $q + 1$ предметами, за которыми следуют $m - r$ групп с q предметами.

Сколько предметов окажется в k-й группе? Для ответа на этот вопрос нам нужна формула, которая давала бы $\lceil n/m \rceil$ при

$k \leqslant n \bmod m$ и $\lfloor n/m \rfloor$ в противном случае. Нетрудно убедиться, что требуемым условиям отвечает формула

$$\left\lceil \frac{n-k+1}{m} \right\rceil,$$

поскольку она сводится к $q + \lceil (r-k+1)/m \rceil$, если, как и в предыдущем абзаце, записать $n = qm + r$ (здесь $q = \lfloor n/m \rfloor$). Получаем, что $\lceil (r-k+1)/m \rceil = [k \leqslant r]$, если $1 \leqslant k \leqslant m$ и $0 \leqslant r < m$. Следовательно, можно записать следующее тождество, которое выражает разбиение n на m как можно более равных частей в невозрастающем порядке:

$$n = \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil + \left\lceil \frac{n-1}{m} \right\rceil + \cdots + \left\lceil \frac{n-m+1}{m} \right\rceil. \qquad (3.24)$$

Это тождество справедливо при любом целом положительном m и при любом целом n (положительном, отрицательном или нуле). Мы уже сталкивались со случаем $m = 2$ в (3.17), хотя и записанном в несколько ином виде: $n = \lceil n/2 \rceil + \lfloor n/2 \rfloor$.

Если бы мы пожелали, чтобы все части располагались в неубывающем порядке — когда меньшие группы предшествуют бо́льшим, — можно было бы действовать тем же способом, но с $\lfloor n/m \rfloor$ предметами в первой группе, получая соответствующее тождество

$$n = \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{m} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n+m-1}{m} \right\rfloor. \qquad (3.25)$$

Тождества (3.25) и (3.24) можно преобразовывать друг в друга, пользуясь либо соотношением (3.4), либо тождеством из упр. 12.

Некоторые утверждают, что слишком опасно заменять что-либо на mx. (Имеются в виду ракеты MX. — Переводчик)

Теперь, если в (3.25) заменить n на $\lfloor mx \rfloor$ и применить правило (3.11) для удаления полов внутри полов, то получится тождество, выполняющееся при всех действительных x:

$$\lfloor mx \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{m} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor x + \frac{m-1}{m} \right\rfloor. \qquad (3.26)$$

Это в некоторой степени удивительный результат, так как функция "пол" является целочисленной аппроксимацией действительной величины, и тем не менее единственное приближение слева оказывается равным сумме целого набора приближений справа. Если считать, что $\lfloor x \rfloor$ — это, грубо говоря, в среднем $x - \frac{1}{2}$, то левая часть в грубом приближении равна $mx - \frac{1}{2}$, а правая оказывается равной $(x - \frac{1}{2}) + (x - \frac{1}{2} + \frac{1}{m}) + \cdots + (x - \frac{1}{2} + \frac{m-1}{m}) = mx - \frac{1}{2}$. И вот — сумма этих грубых приближений оказывается точной величиной!

3.5 Суммы с полами и потолками

Уравнение (3.26) демонстрирует, что в аналитическом виде можно получить по крайней мере один вид сумм со скобками $\lfloor\ \rfloor$. Есть ли другие виды? Есть. Обычно применяемая в таких случаях уловка состоит в том, чтобы избавиться от пола или потолка, введя новую переменную.

Рассмотрим, например, можно ли получить сумму

$$\sum_{0\leqslant k<n} \lfloor\sqrt{k}\rfloor$$

в аналитическом виде. Идея заключается во введении переменной $m = \lfloor\sqrt{k}\rfloor$; это можно сделать чисто "механически", действуя так же, как в задаче с рулеткой:

$$\begin{aligned}
\sum_{0\leqslant k<n} \lfloor\sqrt{k}\rfloor &= \sum_{k,m\geqslant 0} m[k<n]\bigl[m=\lfloor\sqrt{k}\rfloor\bigr] = \\
&= \sum_{k,m\geqslant 0} m[k<n]\bigl[m\leqslant\sqrt{k}<m+1\bigr] = \\
&= \sum_{k,m\geqslant 0} m[k<n]\bigl[m^2\leqslant k<(m+1)^2\bigr] = \\
&= \sum_{k,m\geqslant 0} m\bigl[m^2\leqslant k<(m+1)^2\leqslant n\bigr] + \\
&\qquad + \sum_{k,m\geqslant 0} m\bigl[m^2\leqslant k<n<(m+1)^2\bigr]\,.
\end{aligned}$$

И вновь определенные трудности вызывают граничные условия. Допустим сначала, что $n = a^2$ — точный квадрат. Тогда вторая сумма равна нулю, а первая может быть вычислена по обычному правилу:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k,m\geqslant 0} m\bigl[m^2\leqslant k<(m+1)^2\leqslant a^2\bigr] = \\
&\quad = \sum_{m\geqslant 0} m\bigl((m+1)^2-m^2\bigr)[m+1\leqslant a] = \\
&\quad = \sum_{m\geqslant 0} m(2m+1)[m<a] = \\
&\quad = \sum_{m\geqslant 0} (2m^{\underline{2}}+3m^{\underline{1}})[m<a] = \\
&\quad = \sum\nolimits_0^a (2m^{\underline{2}}+3m^{\underline{1}})\,\delta m = \\
&\quad = \tfrac{2}{3}a(a-1)(a-2)+\tfrac{3}{2}a(a-1) = \tfrac{1}{6}(4a+1)a(a-1)\,.
\end{aligned}$$

Убывающие степени убивают сумму.

В общем случае можно положить $a = \lfloor\sqrt{n}\rfloor$; тогда нужно всего лишь сложить члены при $a^2 \leqslant k < n$, причем все они равны a, так что сумма оказывается равной $(n-a^2)a$. Это дает нам искомый аналитический вид

$$\sum_{0\leqslant k<n} \lfloor\sqrt{k}\rfloor \;=\; na - \tfrac{1}{3}a^3 - \tfrac{1}{2}a^2 - \tfrac{1}{6}a\,, \qquad a = \lfloor\sqrt{n}\rfloor. \tag{3.27}$$

Другой подход к вычислению таких сумм состоит в замене выражения вида $\lfloor x\rfloor$ на $\sum_j [1 \leqslant j \leqslant x]$; это всегда законно при $x \geqslant 0$. Вот как работает этот метод при вычислении суммы ⌊квадратных корней⌋, если для удобства считать, что $n = a^2$:

$$\begin{aligned}\sum_{0\leqslant k<n} \lfloor\sqrt{k}\rfloor \;&=\; \sum_{j,k} [1\leqslant j\leqslant \sqrt{k}\,][0\leqslant k<a^2] \;=\\ &=\; \sum_{1\leqslant j<a}\,\sum_{k} [j^2\leqslant k<a^2] \;=\\ &=\; \sum_{1\leqslant j<a} (a^2-j^2) \;=\; a^3 - \tfrac{1}{3}a(a+\tfrac{1}{2})(a+1)\,.\end{aligned}$$

Вот другой пример, в котором замена переменной приводит к преобразованной сумме. Примерно в одно и то же время в 1909 году независимо друг от друга три математика — Боль (Bohl) [34], Серпиньски (Sierpiński) [326] и Вейль (Weyl) [368] — обнаружили замечательный факт: если α иррационально, то при $n \to \infty$ числа $\{n\alpha\}$ в высшей степени равномерно распределены между 0 и 1. Одна из формулировок звучит следующим образом:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{0\leqslant k<n} f\bigl(\{k\alpha\}\bigr) \;=\; \int_0^1 f(x)\,dx \tag{3.28}$$

при любом иррациональном α и любой ограниченной функции f, которая непрерывна почти везде. Например, *среднее* значение $\{n\alpha\}$ можно найти, положив $f(x) = x$. Мы получим значение $\frac{1}{2}$. (Именно этого и следовало ожидать; но приятно знать, что это верно независимо от того, чему именно равно иррациональное число α.)

Внимание: это достаточно сложный материал. При первом чтении лучше бегло проскочить следующие пару страниц: они не так существенны. — Сочувствующий ассистент

Теорема Боля, Серпиньски и Вейля доказывается путем аппроксимации $f(x)$ сверху и снизу “ступенчатыми функциями”, которые являются линейными комбинациями простых функций

$$f_\nu(x) \;=\; [0\leqslant x<\nu]$$

На взлет!

при $0 \leqslant \nu \leqslant 1$. Наша цель состоит не в том, чтобы доказать теорему, — это дело других книг по матанализу. Мы же попробуем выяснить фундаментальные причины, по которым она справедлива, рассмотрев частный случай $f(x) = f_v(x)$. Другими словами, давайте попытаемся выяснить, насколько близка сумма

$$\sum_{0\leqslant k<n} \bigl[\{k\alpha\}<v\bigr]$$

к "идеальному" значению nv при большом n и иррациональном α.

Для этой цели мы определим *отклонение* $D(\alpha, n)$ как максимальное абсолютное значение по всем $0 \leqslant v \leqslant 1$ суммы

$$s(\alpha, n, v) \;=\; \sum_{0\leqslant k<n} \Bigl(\bigl[\{k\alpha\}<v\bigr] - v\Bigr). \tag{3.29}$$

Наша задача — показать, что $D(\alpha, n)$ "не слишком велико" по сравнению с n, показав, что величина $|s(\alpha, n, v)|$ всегда достаточно мала при иррациональном α. Без потери общности можно считать, что $0 < \alpha < 1$.

Сначала можно переписать $s(\alpha, n, v)$ в более простом виде, а затем ввести новую индексную переменную j:

$$\begin{aligned}\sum_{0\leqslant k<n} \Bigl(\bigl[\{k\alpha\}<v\bigr] - v\Bigr) \;&=\; \sum_{0\leqslant k<n} \bigl(\lfloor k\alpha\rfloor - \lfloor k\alpha - v\rfloor - v\bigr) \;=\\ &=\; -nv + \sum_{0\leqslant k<n}\sum_{j} [k\alpha - v < j \leqslant k\alpha] \;=\\ &=\; -nv + \sum_{0\leqslant j<\lceil n\alpha\rceil}\sum_{k<n} \bigl[j\alpha^{-1} \leqslant k < (j+v)\alpha^{-1}\bigr].\end{aligned}$$

Если нам повезет, мы сможем просуммировать по k. Но прежде сто́ит ввести некоторые новые переменные, чтобы привести эту формулу к приличному виду. Положим

Знакомо: именуй и властвуй. Главное здесь — замена переменной k на j.
— Сочувствующий ассистент

$$\begin{aligned} a \;&=\; \lfloor \alpha^{-1}\rfloor, &\qquad \alpha^{-1} \;&=\; a + \alpha', \\ b \;&=\; \lceil v\alpha^{-1}\rceil, &\qquad v\alpha^{-1} \;&=\; b - v'. \end{aligned}$$

Таким образом, $\alpha' = \{\alpha^{-1}\}$ — это дробная часть α^{-1}, а v' — mumble-дробная часть $v\alpha^{-1}$.

И вновь единственный источник неприятностей — это граничные условия. Давайте пока забудем об ограничении '$k < n$' и вычислим сумму по k без него:

$$\begin{aligned}\sum_{k} \Bigl[k \in \bigl[j\alpha^{-1} \mathinner{\ldotp\ldotp} (j+v)\alpha^{-1}\bigr)\Bigr] \;&=\; \bigl\lceil (j+v)(a+\alpha')\bigr\rceil - \bigl\lceil j(a+\alpha')\bigr\rceil \;=\\ &=\; b + \lceil j\alpha' - v'\rceil - \lceil j\alpha'\rceil.\end{aligned}$$

Все просто; теперь выполняем подстановку

$$s(\alpha,n,v)=\\ =-nv+\lceil n\alpha\rceil b+\sum_{0\leqslant j<\lceil n\alpha\rceil}\bigl(\lceil j\alpha'-v'\rceil-\lceil j\alpha'\rceil\bigr)-S\,, \quad (3.30)$$

где S — поправка для случаев $k\geqslant n$, которые мы не смогли исключить. Величина $j\alpha'$ будет целой только при $j=0$, поскольку α (а значит, и α') иррационально; величина $j\alpha'-v'$ будет целой не более чем для одного значения j. Так что можно заменить "потолочные" члены "половыми":

Запись $\{0$ или $1\}$ означает нечто, равное 0 либо 1; нет смысла связывать себя деталями, не имеющими никакого значения.

$$s(\alpha,n,v)=\\ =-nv+\lceil n\alpha\rceil b-\sum_{0\leqslant j<\lceil n\alpha\rceil}\bigl(\lfloor j\alpha'\rfloor-\lfloor j\alpha'-v'\rfloor\bigr)-S+\{0\text{ или }1\}\,.$$

Интересно. Вместо аналитического вида мы получаем сумму, которая имеет вид, похожий на $s(\alpha,n,v)$, но с иными параметрами: α' вместо α, $\lceil n\alpha\rceil$ вместо n и v' вместо v. А что если получить рекуррентное соотношение для $s(\alpha,n,v)$, которое, как мы надеемся, приведет к рекуррентному соотношению для отклонения $D(\alpha,n)$? Это означает, что мы хотим ввести в действие сумму

$$s(\alpha',\lceil n\alpha\rceil,v')\;=\;\sum_{0\leqslant j<\lceil n\alpha\rceil}\bigl(\lfloor j\alpha'\rfloor-\lfloor j\alpha'-v'\rfloor-v'\bigr),$$

получая рекуррентность

$$s(\alpha,n,v)=\\ =-nv+\lceil n\alpha\rceil b-\lceil n\alpha\rceil v'-s(\alpha',\lceil n\alpha\rceil,v')-S+\{0\text{ или }1\}\,.$$

Вспоминая, что $b-v'=v\alpha^{-1}$, мы обнаруживаем, что все прекрасно упростится, если мы заменим $\lceil n\alpha\rceil(b-v')$ на $n\alpha(b-v')=nv$:

$$s(\alpha,n,v)\;=\;-s(\alpha',\lceil n\alpha\rceil,v')-S+\epsilon+\{0\text{ или }1\}\,.$$

Здесь ϵ — положительная ошибка, меньшая $v\alpha^{-1}$. В упр. 18 доказывается, что подобно ей S лежит в пределах от 0 до $\lceil v\alpha^{-1}\rceil$. Можно также удалить из суммы член $j=\lceil n\alpha\rceil-1=\lfloor n\alpha\rfloor$, поскольку его внесение в сумму — либо v', либо $v'-1$. Следовательно, если мы берем максимум абсолютных значений по всем v, то получаем

$$D(\alpha,n)\;\leqslant\;D(\alpha',\lfloor\alpha n\rfloor)+\alpha^{-1}+2\,. \quad (3.31)$$

Методы, которые мы будем изучать в последующих главах, позволяют сделать из этого рекуррентного соотношения вывод о том, что $D(\alpha, n)$ всегда гораздо меньше n, если n достаточно велико. Следовательно, теорема (3.28) справедлива; однако сходимость к пределу не всегда очень быстрая (см. упр. 9.45 и 9.61).

Посадка

Ну вот, это было всего лишь небольшое упражнение по работе с суммами, полами и потолками. Читателям, не приученным "доказывать, что погрешности невелики", трудно поверить в то, что у кого-то хватает смелости не отступать перед такими страшными суммами. На самом деле второй взгляд показывает, что все это вычисление пронизывает одна простая мысль. Основная идея в том, что некоторая сумма $s(\alpha, n, \nu)$ из n членов может быть сведена к аналогичной сумме из не более чем $\lceil \alpha n \rceil$ членов. Все остальное сводится на нет, за исключением небольшого остатка, образованного из близких к граничным членов.

Вдохните поглубже — сейчас мы вычислим еще одну сумму, которая, несмотря на свою нетривиальность, обладает тем преимуществом (по сравнению с только что вычисленной), что выражается в аналитическом виде, так что можно легко проверить полученный ответ. Теперь наша задача будет состоять в обобщении суммы в (3.26). Нам требуется найти выражение для

$$\sum_{0 \leqslant k < m} \left\lfloor \frac{nk + x}{m} \right\rfloor, \qquad m, n \text{— целые}, \quad m > 0.$$

Поиск этой суммы в аналитическом виде — крепкий орешек, разгрызть который потруднее, чем те, с которыми мы имели дело до сих пор (за исключением, возможно, задачи об отклонении, с которой только что расправились). Но эта задача настолько поучительна, что мы провозимся с ней до конца главы.

Это более твердая сумма полов или сумма более твердых полов?

Как обычно, особенно при решении трудных задач, начнем с рассмотрения простых крайних случаев. Частный случай $n = 1$ представляет собой тождество (3.26), в котором x заменено на x/m:

$$\left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1 + x}{m} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{m - 1 + x}{m} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor .$$

Предупреждаем: это только начало тянущегося до конца главы решения длинной и сложной задачи, для решения которой нет других поводов, кроме любопытства.

— Студенты

И, как в главе 1, имеет смысл получить дополнительную информацию, обратившись к случаю $n = 0$:

$$\left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor = m \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor .$$

Можно согласиться. Но что это за поколение, которому всегда требуются практическая польза и прибыль? Неужели в вас умерла любознательность?

У задачи два параметра — m и n; давайте рассмотрим малые случаи для параметра m. При $m = 1$ сумма состоит из единственного члена $\lfloor x \rfloor$. Если же $m = 2$, сумма равна $\lfloor x/2 \rfloor + \lfloor (x + n)/2 \rfloor$. Можно избавиться от взаимодействия x и n, если вынести n за

Эта сумма возникает, например, при изучении и тестировании генерации случайных чисел. Но математики рассматривали эту сумму задолго до появления компьютеров, поскольку считали совершенно естественным поинтересоваться, нет ли способа просуммировать арифметическую прогрессию, "поставленную на пол".
— Преподаватель

знак функции "пол", но, чтобы сделать это, надо по отдельности рассмотреть случаи четного и нечетного n. Если n четное, $n/2$ — целое число, так что можно вынести его за знак пола:

$$\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor+\left(\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor+\frac{n}{2}\right) \;=\; 2\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor+\frac{n}{2}\,.$$

Если же n нечетное, то $(n-1)/2$ — целое число, и мы получаем

$$\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor+\left(\left\lfloor\frac{x+1}{2}\right\rfloor+\frac{n-1}{2}\right) \;=\; \lfloor x\rfloor+\frac{n-1}{2}\,.$$

Последний шаг следует из (3.26) при $m=2$.

Эти формулы для четного и нечетного n немного напоминают формулы для $n=0$ и 1, но ясной закономерности пока что не видно. Поэтому давайте продолжим рассмотрение малых случаев. При $m=3$ сумма равна

$$\left\lfloor\frac{x}{3}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{x+n}{3}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{x+2n}{3}\right\rfloor,$$

и возможны три варианта для n: либо оно кратно 3, либо оно на 1 или на 2 больше кратного, т.е. $n \bmod 3 = 0$, 1 или 2. Если $n \bmod 3 = 0$, то $n/3$ и $2n/3$ — целые числа, так что сумма равна

$$\left\lfloor\frac{x}{3}\right\rfloor+\left(\left\lfloor\frac{x}{3}\right\rfloor+\frac{n}{3}\right)+\left(\left\lfloor\frac{x}{3}\right\rfloor+\frac{2n}{3}\right) \;=\; 3\left\lfloor\frac{x}{3}\right\rfloor+n\,.$$

"Пытливый ум требует приносящей удовлетворение умственной деятельности как необходимого условия его совершенствования. "Необходимость — источник открытий" — бесхитростная поговорка. "Необходимость — источник бесплодных усилий" — это гораздо ближе к истине. Основой роста современных открытий является наука, а наука почти целиком произрастает на почве удовлетворения собственного любопытства".
— А. Н. Уайтхед (A. N. Whitehead) [371]

Если $n \bmod 3 = 1$, то $(n-1)/3$ и $(2n-2)/3$ — целые числа, так что

$$\left\lfloor\frac{x}{3}\right\rfloor+\left(\left\lfloor\frac{x+1}{3}\right\rfloor+\frac{n-1}{3}\right)+\left(\left\lfloor\frac{x+2}{3}\right\rfloor+\frac{2n-2}{3}\right) \;=\; \lfloor x\rfloor+n-1\,.$$

Последний шаг опять следует из (3.26), на этот раз при $m=3$. И наконец, если $n \bmod 3 = 2$, то

$$\left\lfloor\frac{x}{3}\right\rfloor+\left(\left\lfloor\frac{x+2}{3}\right\rfloor+\frac{n-2}{3}\right)+\left(\left\lfloor\frac{x+1}{3}\right\rfloor+\frac{2n-1}{3}\right) \;=\; \lfloor x\rfloor+n-1\,.$$

Наши левые полушария мозга уже разобрались с $m=3$, но правые пока отстают, так что рассмотрим случай $m=4$:

$$\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{x+n}{4}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{x+2n}{4}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{x+3n}{4}\right\rfloor.$$

Как минимум теперь мы знаем достаточно, чтобы рассмотреть случаи, основываясь на значении $n \bmod m$. Если $n \bmod 4 = 0$, то

$$\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor+\left(\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor+\frac{n}{4}\right)+\left(\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor+\frac{2n}{4}\right)+\left(\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor+\frac{3n}{4}\right) \;=\; 4\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor+\frac{3n}{2}\,.$$

А если $n \bmod 4 = 1$, то

$$\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor + \left(\left\lfloor\frac{x+1}{4}\right\rfloor + \frac{n-1}{4}\right) + \left(\left\lfloor\frac{x+2}{4}\right\rfloor + \frac{2n-2}{4}\right) + \\ + \left(\left\lfloor\frac{x+3}{4}\right\rfloor + \frac{3n-3}{4}\right) = \lfloor x\rfloor + \frac{3n}{2} - \frac{3}{2}\,.$$

Случай $n \bmod 4 = 3$, оказывается, дает тот же ответ. Наконец, в случае $n \bmod 4 = 2$ мы получаем нечто несколько иное, оказывающееся важным ключом к установлению поведения в общем случае:

$$\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor + \left(\left\lfloor\frac{x+2}{4}\right\rfloor + \frac{n-2}{4}\right) + \left(\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor + \frac{2n}{4}\right) + \left(\left\lfloor\frac{x+2}{4}\right\rfloor + \frac{3n-2}{4}\right) = \\ = 2\left(\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{x+2}{4}\right\rfloor\right) + \frac{3n}{2} - 1 = 2\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor + \frac{3n}{2} - 1\,.$$

На последнем шаге выполняется упрощение выражения, имеющего вид $\lfloor y/2\rfloor + \lfloor (y+1)/2\rfloor$, что опять представляет собой частный случай (3.26).

Вот сводка значений нашей суммы при малых значениях m:

m	$n \bmod m = 0$	$n \bmod m = 1$	$n \bmod m = 2$	$n \bmod m = 3$
1	$\lfloor x\rfloor$			
2	$2\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor + \frac{n}{2}$	$\lfloor x\rfloor + \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$		
3	$3\left\lfloor\frac{x}{3}\right\rfloor + n$	$\lfloor x\rfloor + n - 1$	$\lfloor x\rfloor + n - 1$	
4	$4\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor + \frac{3n}{2}$	$\lfloor x\rfloor + \frac{3n}{2} - \frac{3}{2}$	$2\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor + \frac{3n}{2} - 1$	$\lfloor x\rfloor + \frac{3n}{2} - \frac{3}{2}$

Это выглядит так, как если бы у нас было нечто, имеющее вид

$$a\left\lfloor\frac{x}{a}\right\rfloor + bn + c\,,$$

где a, b и c некоторым образом зависят от m и n. Даже близорукие могут увидеть, что b, вероятно, равно $(m-1)/2$. Труднее разглядеть выражение для a; но случай $n \bmod 4 = 2$ подсказывает нам, что, вероятно, a представляет собой НОД(m, n) — наибольший общий делитель m и n. Это не лишено смысла, так как НОД(m, n) — это тот множитель, который мы убираем из m и n при приведении дроби n/m к несократимой, а наша сумма включает в себя дробь n/m. (Операции с наибольшим общим делителем будут детально рассматриваться в главе 4.) Значение c кажется более загадочным, но будем надеяться, что оно получится при доказательстве наших предположений об a и b.

Вычисляя сумму при малых m, мы, по сути, переписали каждый ее член в виде

$$\left\lfloor \frac{x+kn}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x+kn \bmod m}{m} \right\rfloor + \frac{kn}{m} - \frac{kn \bmod m}{m},$$

поскольку $(kn - kn \bmod m)/m$ — целое число, которое может быть вынесено за скобки пола. Таким образом, исходную сумму можно развернуть в следующую таблицу:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \left\lfloor \dfrac{x}{m} \right\rfloor & + & \dfrac{0}{m} & - & \dfrac{0 \bmod m}{m} \\
+ & \left\lfloor \dfrac{x+n \bmod m}{m} \right\rfloor & + & \dfrac{n}{m} & - & \dfrac{n \bmod m}{m} \\
+ & \left\lfloor \dfrac{x+2n \bmod m}{m} \right\rfloor & + & \dfrac{2n}{m} & - & \dfrac{2n \bmod m}{m} \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
+ & \left\lfloor \dfrac{x+(m-1)n \bmod m}{m} \right\rfloor & + & \dfrac{(m-1)n}{m} & - & \dfrac{(m-1)n \bmod m}{m}.
\end{array}$$

При экспериментах с малыми значениями m эти столбцы приводили нас соответственно к $a\lfloor x/a \rfloor$, bn и c.

В частности, теперь можно понять, откуда берется b. Второй столбец представляет собой арифметическую прогрессию с известной нам суммой, которая равна среднему первого и последнего членов, помноженному на число членов:

$$\frac{1}{2}\left(0 + \frac{(m-1)n}{m}\right) \cdot m = \frac{(m-1)n}{2}.$$

Так что наша догадка о том, что $b = (m-1)/2$, проверена и подтверждена.

Первый и третий столбцы так легко не сдаются; чтобы определить a и c, надо повнимательнее рассмотреть последовательность чисел

$$0 \bmod m, \quad n \bmod m, \quad 2n \bmod m, \quad \ldots, \quad (m-1)n \bmod m.$$

Предположим, например, что $m = 12$ и $n = 5$. Если представить эту последовательность в виде циферблата, то эти числа представляют собой 0 часов (примем 12 часов за 0), затем — 5 часов, 10 часов, 3 часа (= 15 часов), 8 часов и т.д. Оказывается, что каждый час встречается только один раз.

Предположим теперь, что $m = 12$ и $n = 8$. Тогда данные числа представляют собой 0 часов, 8 часов, 4 часа (= 16 часов), но затем 0, 8 и 4 повторяются. Поскольку 8 и 12 кратны 4 и числа начинаются с 0 (тоже кратного 4), вырваться из этого замкнутого круга невозможно — все числа должны быть кратны 4.

В этих двух случаях мы имеем НОД$(12,5) = 1$ и НОД$(12,8) = 4$. Общее правило, которое будет доказано в следующей главе, гласит, что если $d = \text{НОД}(m,n)$, то мы получаем числа 0, d, $2d$, $\ldots$, $m-d$ в некотором порядке, за которыми следует еще $d-1$ копий той же последовательности. Например, при $m = 12$ и $n = 8$ набор 0, 8, 4 встречается четыре раза.

Сначала лемма, затем дилемма.

Первый столбец нашей суммы приобретает смысл. Он содержит d копий членов $\lfloor x/m \rfloor$, $\lfloor (x+d)/m \rfloor$, $\ldots$, $\lfloor (x+m-d)/m \rfloor$ в некотором порядке, так что их сумма равна

$$d\left(\left\lfloor\frac{x}{m}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{x+d}{m}\right\rfloor + \cdots + \left\lfloor\frac{x+m-d}{m}\right\rfloor\right) =$$
$$= d\left(\left\lfloor\frac{x/d}{m/d}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{x/d\,+\,1}{m/d}\right\rfloor + \cdots + \left\lfloor\frac{x/d\,+\,m/d\,-\,1}{m/d}\right\rfloor\right) =$$
$$= d\left\lfloor\frac{x}{d}\right\rfloor .$$

Здесь последний шаг заключается в еще одном применении (3.26). Наша догадка относительно a также проверена и подтверждена:

$$a = d = \text{НОД}(m,n) .$$

Как мы и предполагали, теперь мы можем вычислить c, поскольку третий столбец становится понятен — он содержит d копий арифметической прогрессии $0/m$, d/m, $2d/m$, $\ldots$, $(m-d)/m$, так что их сумма равна

$$d\left(\frac{1}{2}\left(0 + \frac{m-d}{m}\right)\cdot\frac{m}{d}\right) = \frac{m-d}{2} .$$

Поскольку в третьем столбце члены не складываются, а вычитаются, получаем

$$c = \frac{d-m}{2} .$$

Чудеса и приключения закончены. Вот искомый аналитический вид:

$$\sum_{0\leqslant k<m}\left\lfloor\frac{nk+x}{m}\right\rfloor = d\left\lfloor\frac{x}{d}\right\rfloor + \frac{m-1}{2}n + \frac{d-m}{2} ,$$

где $d = \text{НОД}(m, n)$. Для проверки можно убедиться, что эта формула работает для частных случаев $n = 0$ и $n = 1$, с которыми мы встречались ранее. При $n = 0$ мы получаем $d = \text{НОД}(m, 0) = m$; два последних члена обращаются в нуль, так что формула дает верный ответ $m\lfloor x/m \rfloor$. При $n = 1$ мы получаем $d = \text{НОД}(m, 1) = 1$; два последних члена сокращаются, и сумма равна просто $\lfloor x \rfloor$.

Немного повозившись с аналитической записью, ее можно даже сделать симметричной относительно m и n:

$$\begin{aligned}\sum_{0\leqslant k<m} \left\lfloor \frac{nk+x}{m} \right\rfloor &= d\left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor + \frac{m-1}{2}n + \frac{d-m}{2} = \\ &= d\left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor + \frac{(m-1)(n-1)}{2} + \frac{m-1}{2} + \frac{d-m}{2} = \\ &= d\left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor + \frac{(m-1)(n-1)}{2} + \frac{d-1}{2}. \qquad (3.32)\end{aligned}$$

Все, я повержен на пол...

Это немного неожиданно, поскольку нет никаких алгебраических причин подозревать такую симметрию. Мы доказали “закон взаимности”

$$\sum_{0\leqslant k<m} \left\lfloor \frac{nk+x}{m} \right\rfloor = \sum_{0\leqslant k<n} \left\lfloor \frac{mk+x}{n} \right\rfloor, \qquad \text{целые } m, n > 0.$$

Например, если $m = 41$ и $n = 127$, левая сумма состоит из 41 члена, а правая — из 127; но они остаются равными при любом действительном x.

Упражнения

Разминка

1 Анализируя задачу Иосифа в главе 1, мы представляли произвольное положительное целое число n в виде $n = 2^m + l$, где $0 \leqslant l < 2^m$. Приведите явные формулы для l и m как функций от n с использованием скобок пола и/или потолка.

2 Какой вид имеет формула для ближайшего целого к данному действительному числу x? Приведите формулы, которые в случае “равновесия”, когда x находится ровно посредине между двумя целыми числами, округляют результат (а) в сторону увеличения, до $\lceil x \rceil$; (б) в сторону уменьшения, до $\lfloor x \rfloor$.

3 Вычислите $\lfloor \lfloor m\alpha \rfloor n/\alpha \rfloor$, где m и n — положительные целые числа, а α — иррациональное число, большее n.

4 В главе описаны задачи с первого по пятый уровень. А что собой представляет задача нулевого уровня? (Кстати, это упражнение — задача *не* нулевого уровня.)

5 Найдите необходимое и достаточное условие того, что $\lfloor nx \rfloor = n\lfloor x \rfloor$, где n — положительное целое число. (Ваше условие должно включать $\{x\}$.)

6 Что интересного можно сказать об $\lfloor f(x) \rfloor$, где $f(x)$ — непрерывная монотонно *убывающая* функция, которая принимает целые значения, только когда x — целое число?

7 Решите рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} X_n &= n && \text{при } 0 \leqslant n < m; \\ X_n &= X_{n-m} + 1 && \text{при } n \geqslant m. \end{aligned}$$

8 Докажите *принцип ящиков Дирихле*: если n предметов размещаются в m ящиках, то некоторый ящик должен содержать $\geqslant \lceil n/m \rceil$ предметов, а другой — $\leqslant \lfloor n/m \rfloor$ предметов.

9 Египетские математики в 1800 г. до н.э. представляли рациональные числа между 0 и 1 как сумму “единичных дробей” $1/x_1 + \cdots + 1/x_k$, где все x — различные положительные целые числа. Например, они записывали $\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$ вместо $\frac{2}{5}$. Докажите, что всегда имеется возможность систематической записи следующим образом: если $0 < m/n < 1$, то

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{q} + \left\{\text{представление } \frac{m}{n} - \frac{1}{q}\right\}, \qquad q = \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil .$$

(Это *алгоритм Фибоначчи*, открытый Леонардо Фибоначчи (Leonardo Fibonacci) в 1202 году.)

Обязательные упражнения

10 Покажите, что выражение

$$\left\lceil \frac{2x+1}{2} \right\rceil - \left\lceil \frac{2x+1}{4} \right\rceil + \left\lfloor \frac{2x+1}{4} \right\rfloor$$

всегда равно либо $\lfloor x \rfloor$, либо $\lceil x \rceil$. При каких условиях получается тот или иной случай?

11 Приведите детали представленного в тексте доказательства того, что открытый интервал $(\alpha\,..\,\beta)$ содержит ровно $\lceil \beta \rceil - \lfloor \alpha \rfloor - 1$ целых чисел при $\alpha < \beta$. Почему для корректности доказательства нужно исключить случай $\alpha = \beta$?

12 Докажите, что

$$\left\lceil\frac{n}{m}\right\rceil = \left\lfloor\frac{n+m-1}{m}\right\rfloor$$

при любом целом n и любом положительном целом m. (Это тождество дает другой способ превращения потолков в полы и обратно вместо применения рефлексивного закона (3.4).)

13 Пусть α и β — положительные действительные числа. Докажите, что $\mathrm{Spec}(\alpha)$ и $\mathrm{Spec}(\beta)$ образуют разбиение всех положительных целых чисел тогда и только тогда, когда α и β иррациональны и $1/\alpha + 1/\beta = 1$.

14 Докажите или опровергните:

$$(x \bmod ny) \bmod y = x \bmod y \qquad \text{при целом } n.$$

15 Имеется ли тождество, аналогичное (3.26), в котором вместо полов используются потолки?

16 Докажите, что $n \bmod 2 = \bigl(1-(-1)^n\bigr)/2$. Найдите и докажите аналогичное выражение для $n \bmod 3$ вида $a + b\omega^n + c\omega^{2n}$, где ω — комплексное число $(-1+i\sqrt{3}\,)/2$. *Указание*: $\omega^3 = 1$ и $1 + \omega + \omega^2 = 0$.

17 Вычислите сумму $\sum_{0\leqslant k<m}\lfloor x + k/m\rfloor$ в случае $x \geqslant 0$ путем подстановки $\sum_j [1 \leqslant j \leqslant x + k/m]$ вместо $\lfloor x + k/m\rfloor$ с последующим суммированием сначала по k. Согласуется ли ваш ответ с (3.26)?

18 Докажите, что остаточный член S в (3.30) не превышает $\lceil\alpha^{-1}\nu\rceil$. *Указание*: покажите, что малые значения j не существенны.

Домашние задания

19 Найдите необходимое и достаточное условие для действительного числа $b > 1$, такое, что

$$\lfloor\log_b x\rfloor = \bigl\lfloor\log_b\lfloor x\rfloor\bigr\rfloor$$

справедливо для всех $x \geqslant 1$.

20 Найдите сумму всех кратных x чисел в замкнутом интервале $[\alpha\,..\,\beta]$ при $x > 0$.

21 Сколько чисел вида 2^m, где $0 \leqslant m \leqslant M$, начинаются в десятичной записи с цифры 1?

22 Вычислите суммы $S_n = \sum_{k\geqslant 1}\lfloor n/2^k + \frac{1}{2}\rfloor$ и $T_n = \sum_{k\geqslant 1} 2^k\lfloor n/2^k + \frac{1}{2}\rfloor^2$.

23 Покажите, что n-й элемент последовательности

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots$$

равен $\lfloor\sqrt{2n}+\frac{1}{2}\rfloor$. (Последовательность включает каждое число m ровно m раз.)

24 В упр. 13 установлено интересное соотношение между мультимножествами $\mathrm{Spec}(\alpha)$ и $\mathrm{Spec}\bigl(\alpha/(\alpha-1)\bigr)$, когда α — иррациональное число > 1, поскольку $1/\alpha + (\alpha-1)/\alpha = 1$. Найдите (и докажите) другое интересное соотношение между мультимножествами $\mathrm{Spec}(\alpha)$ и $\mathrm{Spec}\bigl(\alpha/(\alpha+1)\bigr)$, где α — произвольное положительное целое число.

25 Докажите или опровергните, что числа Кнута (3.16) удовлетворяют условию $K_n \geqslant n$ для всех неотрицательных n.

26 Покажите, что вспомогательные числа Иосифа (3.20) удовлетворяют неравенству

$$\left(\frac{q}{q-1}\right)^n \leqslant D_n^{(q)} \leqslant q\left(\frac{q}{q-1}\right)^n \qquad \text{при } n \geqslant 0.$$

27 Докажите, что среди чисел $D_n^{(3)}$, определенных в (3.20), бесконечно много как четных, так и нечетных.

28 Решите рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} a_0 &= 1;\\ a_n &= a_{n-1} + \lfloor\sqrt{a_{n-1}}\rfloor \qquad \text{при } n > 0. \end{aligned}$$

29 Покажите в дополнение к (3.31), что

$$D(\alpha, n) \geqslant D\bigl(\alpha', \lfloor\alpha n\rfloor\bigr) - \alpha^{-1} - 2.$$

Эта формула отклоняется от (3.31).

30 Покажите, что рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} X_0 &= m,\\ X_n &= X_{n-1}^2 - 2 \qquad \text{при } n > 0 \end{aligned}$$

имеет решение $X_n = \lceil\alpha^{2^n}\rceil$, если m — целое число, большее 2, где $\alpha + \alpha^{-1} = m$ и $\alpha > 1$. Например, если $m = 3$, то решением является

$$X_n = \lceil\phi^{2^{n+1}}\rceil, \qquad \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \alpha = \phi^2.$$

31 Докажите или опровергните, что $\lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + \lfloor x+y\rfloor \leqslant \lfloor 2x\rfloor + \lfloor 2y\rfloor$.

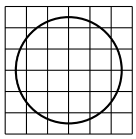
32 Обозначим расстояние от x до ближайшего целого как $\|x\| = \min(x - \lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil - x)$. Чему равно значение

$$\sum_k 2^k \|x/2^k\|^2 ?$$

(Обратите внимание, что эта сумма может быть дважды бесконечной (в обе стороны). Например, при $x = 1/3$ члены ненулевые как при $k \to -\infty$, так и при $k \to +\infty$.)

Контрольные работы

33 На шахматной доске размером $2n \times 2n$ симметрично начерчена окружность диаметром $2n-1$; вот какой вид это имеет при $n = 3$:



а Через сколько клеток проходит такая окружность?

б Найдите функцию $f(n, k)$, такую, что внутри данной окружности полностью помещается $\sum_{k=1}^{n-1} f(n, k)$ клеток доски.

34 Пусть $f(n) = \sum_{k=1}^{n} \lceil \lg k \rceil$.

а Найдите аналитический вид $f(n)$ для $n \geqslant 1$.

б Докажите, что $f(n) = n - 1 + f(\lceil n/2 \rceil) + f(\lfloor n/2 \rfloor)$ для всех $n \geqslant 1$.

Упростите, но при этом не измените ее значение.

35 Упростите формулу $\lfloor (n+1)^2 n!\, e \rfloor \bmod n$.

36 В предположении, что n — неотрицательное целое число, найдите аналитическое выражение суммы

$$\sum_{1<k<2^{2^n}} \frac{1}{2^{\lfloor \lg k \rfloor} 4^{\lfloor \lg \lg k \rfloor}} .$$

37 Докажите тождество

$$\sum_{0 \leqslant k < m} \left(\left\lfloor \frac{m+k}{n} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor \right) = \left\lfloor \frac{m^2}{n} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\min(m \bmod n, (-m) \bmod n)^2}{n} \right\rfloor$$

для всех положительных целых чисел m и n.

38 Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — действительные числа, такие, что тождество

$$\sum_{k=1}^{n} \lfloor m x_k \rfloor = \left\lfloor m \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} x_k \right\rfloor$$

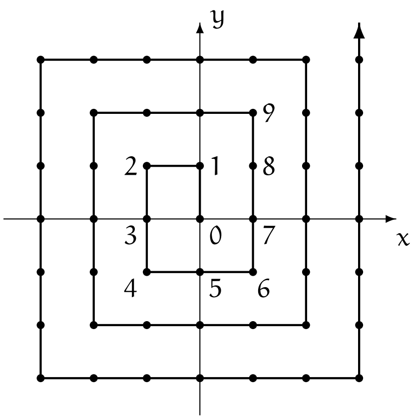
выполняется для всех положительных целых чисел m. Докажите какое-нибудь интересное свойство $x_1, \ldots, x_n$.

39 Докажите, что двойная сумма

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant \log_b x} \sum_{0 < j < b} \lceil (x + jb^k)/b^{k+1} \rceil$$

равна $(b-1)\bigl(\lfloor \log_b x \rfloor + 1\bigr) + \lceil x \rceil - 1$, для всех действительных чисел $x \geqslant 1$ при любом целом $b > 1$.

40 Спиральная функция $\sigma(n)$, схематически показанная ниже, отображает целое неотрицательное число n на упорядоченную пару целых чисел $\bigl(x(n), y(n)\bigr)$. Например, она отображает $n = 9$ на упорядоченную пару $(1, 2)$.



В южном полушарии люди используют спираль, закрученную в обратную сторону.

а Докажите, что если $m = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, то

$$x(n) = \\ = (-1)^m \Bigl(\bigl(n - m(m+1)\bigr) \cdot \bigl[\lfloor 2\sqrt{n} \rfloor \text{ четное} \bigr] + \lceil \tfrac{1}{2} m \rceil \Bigr),$$

и найдите аналогичную формулу для $y(n)$. *Указание*: разбейте спираль на сегменты W_k, S_k, E_k, N_k в зависимости от значения $\lfloor 2\sqrt{n} \rfloor = 4k-2$, $4k-1$, $4k$, $4k+1$.

б Докажите, что, наоборот, можно установить значение n из значения $\sigma(n)$ при помощи формулы вида

$$
\begin{aligned}
n &= (2k)^2 \pm \bigl(2k + x(n) + y(n)\bigr)\,,\\
k &= \max\bigl(|x(n)|, |y(n)|\bigr).
\end{aligned}
$$

Укажите правило, когда вместо $\pm$ должен использоваться знак $+$, а когда — знак $-$.

Дополнительные задачи

41 Пусть f и g — возрастающие функции, обладающие тем свойством, что множества $\{f(1), f(2), \ldots\}$ и $\{g(1), g(2), \ldots\}$ образуют разбиение всех положительных целых чисел. Предположим, что f и g связаны условием $g(n) = f\bigl(f(n)\bigr) + 1$ при всех $n > 0$. Докажите, что $f(n) = \lfloor n\phi \rfloor$ и $g(n) = \lfloor n\phi^2 \rfloor$, где $\phi = (1 + \sqrt{5}\,)/2$.

42 Существуют ли действительные числа α, β и γ, такие, что $\mathrm{Spec}(\alpha)$, $\mathrm{Spec}(\beta)$ и $\mathrm{Spec}(\gamma)$ совместно образуют разбиение множества положительных целых чисел?

43 Найдите интересную интерпретацию чисел Кнута, разворачивая рекуррентное соотношение (3.16).

44 Покажите наличие целых чисел $a_n^{(q)}$ и $d_n^{(q)}$, таких, что

$$
a_n^{(q)} \;=\; \frac{D_{n-1}^{(q)} + d_n^{(q)}}{q-1} \;=\; \frac{D_n^{(q)} + d_n^{(q)}}{q} \qquad \text{при } n > 0,
$$

где $D_n^{(q)}$ является решением рекуррентного соотношения (3.20). Воспользуйтесь этим фактом для решения обобщенной задачи Иосифа:

$$
J_q(n) \;=\; 1 + d_k^{(q)} + q(n - a_k^{(q)}) \quad \text{для } a_k^{(q)} \leqslant n < a_{k+1}^{(q)}.
$$

45 Примените прием из упр. 30 для нахождения решения рекуррентного соотношения

$$
\begin{aligned}
Y_0 &= m\,,\\
Y_n &= 2Y_{n-1}^2 - 1 \qquad \text{при } n > 0
\end{aligned}
$$

в аналитическом виде, если m — положительное целое число.

46 Докажите, что если $n = \bigl\lfloor(\sqrt{2}^{\,l} + \sqrt{2}^{\,l-1})m\bigr\rfloor$, где m и l — неотрицательные целые числа, то $\bigl\lfloor\sqrt{2n(n+1)}\bigr\rfloor = \bigl\lfloor(\sqrt{2}^{\,l+1} + \sqrt{2}^{\,l})m\bigr\rfloor$. Используйте это замечательное свойство для поиска решения рекуррентного соотношения

$$\begin{aligned} L_0 &= a, && \text{целое } a > 0; \\ L_n &= \lfloor \sqrt{2L_{n-1}(L_{n-1}+1)} \rfloor && \text{для } n > 0 \end{aligned}$$

в аналитическом виде. *Указание*:

$$\lfloor \sqrt{2n(n+1)} \rfloor = \lfloor \sqrt{2}(n+\frac{1}{2}) \rfloor .$$

47 Говорят, что функция $f(x)$ *репликативна*, если она удовлетворяет условию

$$f(mx) \;=\; f(x) + f\Big(x+\frac{1}{m}\Big) + \cdots + f\Big(x+\frac{m-1}{m}\Big)$$

для любого положительного целого числа m. Найдите необходимые и достаточные условия, которым должно удовлетворять действительное число c, чтобы следующие функции были репликативны:

а $f(x) = x + c$,

б $f(x) = [x + c \text{ целое}]$,

в $f(x) = \max(\lfloor x \rfloor, c)$,

г $f(x) = x + c\lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}[x \text{ не целое}]$.

48 Докажите тождество

$$x^3 \;=\; 3x\lfloor x\lfloor x \rfloor \rfloor + 3\{x\}\{x\lfloor x \rfloor\} + \{x\}^3 - 3\lfloor x \rfloor \lfloor x\lfloor x \rfloor \rfloor + \lfloor x \rfloor^3$$

и покажите, как можно получить подобные формулы для x^n при $n > 3$.

49 Найдите необходимое и достаточное условие, которому должны удовлетворять действительные числа $0 \leqslant \alpha < 1$ и $\beta \geqslant 0$, так чтобы можно было определить α и β из бесконечного мультимножества значений

$$\{ \lfloor n\alpha \rfloor + \lfloor n\beta \rfloor \mid n > 0 \} .$$

Исследовательские проблемы

50 Найдите необходимое и достаточное условие, которому должны удовлетворять действительные числа α и β, чтобы α и β можно было определить из бесконечного мультимножества величин

$$\{ \lfloor \lfloor n\alpha \rfloor \beta \rfloor \mid n > 0 \} .$$

51 Пусть x — действительное число $\geqslant \phi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$. Тогда решение рекуррентного соотношения

$$\begin{aligned} Z_0(x) &= x\,, \\ Z_n(x) &= Z_{n-1}(x)^2 - 1 \quad \text{при } n > 0, \end{aligned}$$

может быть записано в виде $Z_n(x) = \lceil f(x)^{2^n} \rceil$, если x — целое число, где

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} Z_n(x)^{1/2^n}\,,$$

так как в этом случае $Z_n(x) - 1 < f(x)^{2^n} < Z_n(x)$. Какими другими интересными свойствами обладает функция $f(x)$?

52 Для заданных неотрицательных действительных чисел α и β положим

$$\mathrm{Spec}(\alpha;\beta) = \bigl\{\lfloor \alpha+\beta \rfloor, \lfloor 2\alpha+\beta \rfloor, \lfloor 3\alpha+\beta \rfloor, \ldots\bigr\}.$$

Специфицировать Spec — специфичная задача.

$\mathrm{Spec}(\alpha;\beta)$ — мультимножество, которое обобщает мультимножество $\mathrm{Spec}(\alpha) = \mathrm{Spec}(\alpha;0)$. Докажите или опровергните, что если $m \geqslant 3$ мультимножеств $\mathrm{Spec}(\alpha_1;\beta_1)$, $\mathrm{Spec}(\alpha_2;\beta_2)$, ..., $\mathrm{Spec}(\alpha_m;\beta_m)$ образуют разбиение всех положительных целых чисел и при этом параметры $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_m$ представляют собой действительные числа, то

$$\alpha_k = \frac{2^m-1}{2^{k-1}} \qquad \text{при } 1 \leqslant k \leqslant m.$$

53 Алгоритм Фибоначчи (см. упр. 9) является “жадным” в том смысле, что на каждом шаге он выбирает как можно более малое q. Известен более сложный алгоритм, с помощью которого любая дробь m/n с нечетным n может быть представлена как сумма различных базовых дробей $1/q_1 + \cdots + 1/q_k$ с *нечетными* знаменателями. Всегда ли заканчивается жадный алгоритм при поиске такого представления?