СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ НАУЧНЫХ РЕДАКТОРОВ ПЕРЕВОДА

Предлагаемая книга была написана очень давно, более 40 лет назад. В один год с последним подтвержденным случаем линчевания чернокожего жителя США [1]. С тех пор многое изменилось. «Математика будущего», о которой говорится в книге, — это математика сегодняшнего дня, если не вчерашнего. В книге описывается настоящее (по состоянию на 1981 г.) положение дел в математике, ее перспективы. Речь идет и о проблемах, которые предстояло решить в следующие десятилетия. Предлагаются методы решения этих проблем. Казалось бы, описанные проблемы должны были уйти в прошлое, а предложенные методы их решения — либо стать общим местом, либо доказать свою несостоятельность. Если в прошлом были предложены эффективные решения, то сами постановки задач более не актуальны. Если же существенно продвинуться в решении проблем так и не удалось, то, должно быть, методы оказались недейственны и, значит, тоже неинтересны. Таким образом, трудно было бы ожидать, что современные читатели найдут много познавательного в данной книге. Если бы это было так, ее перевод на русский язык спустя 40 лет и переиздание не имели бы смысла. Но книга удивительно актуальна — именно сейчас и именно в нашей стране. На то есть несколько глубоких причин, объяснение которых и занимает бóльшую часть предисловия.

Во-первых, актуальна постановка стратегических задач на национальном уровне. В США в начале 1980-х годов перед обществом стояли новые вызовы, связанные с диверсификацией приложений математики и увеличением спроса на математическое образование со стороны индустрии. В России наших дней говорят о вызовах цифровой экономики и связанном с ними кадровом дефиците. Частичное замещение человеческих ресурсов программными про-

[1] 21 марта 1981 г. в городе Мобил, штат Алабама, двумя членами Ку-клукс-клана был жестоко убит молодой афроамериканец Майкл Дональд. По результатам расследования убийцы были казнены, а сама организация Ку-клукс-клана в штате Алабама прекратила существование.

дуктами мотивирует смещение фокуса высшего образования на подготовку ИТ-специалистов и представителей других профессий, требующих твердого знания математики. И в очередной раз твердое знание математики — даже не знание, а способность к математическому мышлению — оказывается узким местом. С этим необходимо что-то делать. Правительство пытается принимать меры, но плохо понимает, какие именно нужны. Направление усилий меняется радикально в самые короткие промежутки времени, с каждым новым национальным проектом и с каждым новым составом правительства.

Во-вторых, в связи с назревшими и планируемыми изменениями снова встает вечный вопрос о структуре и роли математики. В США (по состоянию на 1981 г.) прошла очередная и очень крупная волна образовательных реформ. Давно стало очевидным, что знать математику должны многие, и нужно нести математическое образование в массы. В 1980-е годы этот тезис уже не надо было отстаивать, он стал очевиден. Попытки усилить школьную программу путем внедрения современных разделов математики принесли больше проблем, чем удовлетворения. Математика имеет много аспектов. На каком из них сделать наибольший акцент? С одной стороны, математика — это *часть мировой культуры*, и развитие математики неотделимо от развития человеческого мышления вообще. С другой стороны, математика — это *инструмент* для решения практических задач. Как правило, математика нужна в таких задачах, которые являются новыми и сложными, в которых не работают стандартные алгоритмы. С третьей стороны, математика — это *язык* для множества наук, изучающих окружающий мир; изначально — язык естествознания. В последнее время все больше и больше — язык экономики и социальных наук. Без использования математики уже нельзя понять процессы, происходящие в современном обществе.

Большинство реформ осуществляют прагматики, и они ориентируются на инструментальную роль математики. Такой подход может представляться разумным во многих отношениях, но имеет недостатки. Один из самых ярких — негативное отношение к математике многих выпускников школ. Признаваться в том, что «я в школе терпеть не мог математику», считается нормальным. Это не так стыдно, как говорить «я не люблю читать книги» или «меня не интересует история». Это даже может восприниматься как свидетельство определенной элитарности мышления, победы духа над примитивными инструментами телесной природы. Чтобы заинтересовать интеллектуальную элиту страны математикой, недостаточно указать на ее практическую полезность — абсолютно необходимо апеллировать к ее красоте и глубине. Взгляды на роль математики из начала 1980-х годов похожи на те, которые высказываются сейчас.

В-третьих, воспроизводятся методические установки. Приведем конкретный пример, связанный с пониманием основной массы приложений математики. Считается, что в последнее время дискретная математика применяется все чаще, а непрерывная математика — все реже. Интересно, что это утверждение возникло уже давно, в частности, встречается в предлагаемой книге. Традиционная прикладная математика оперирует в основном методами дифференциальных уравнений, чаще всего — уравнений с частными производными. Это так называемая непрерывная прикладная математика. В итоге она опирается на понятие действительного числа — понятие очень глубокое, но привычное и прочно укоренившееся в современном школьном образовании. Традиционно такая математика нужна в естествознании и инженерии. Именно в этих областях математические методы находили наибольшее распространение еще 50 лет назад. Но в последнее время потребность в математике со стороны компьютерных наук и экономики берет верх. Понятно, что данные области ставят другие задачи и требуют иных концепций для решения этих задач. Так вот, возникает вопрос. Поскольку сейчас нужна другая математика, не надо ли соответственно перекроить систему математического образования? Это важный вопрос, но далеко не такой простой, как может показаться на первый взгляд. Примитивный подход, при котором из учебной программы вычеркиваются менее востребованные понятия и вводятся более востребованные, применялся неоднократно, но редко приводил к желаемым результатам. Проблема в том, что математика не сводится к набору понятий. В ее интуитивной базе, по-видимому, есть кирпичи, удаление которых приводит к разрушению всего здания. А сама интуитивная база меняется не так быстро, как приложения математики. Вопрос о смещении фокуса с непрерывного на дискретное в математическом образовании ставился в 1980-е годы (и ставится в этой книге), но на этот вопрос не получен удовлетворительный ответ и по сей день.

В 1980-е годы математика и отношение к ней стали предметом публичного дискурса. Дело в том, что к этому времени выросло поколение, получившее воспитание и основное образование в постспутниковую эпоху. Когда в 1957 г. Советский Союз запустил и вывел на орбиту «Спутник-1», правительство и средства массовой информации США были глубоко шокированы, положив начало так называемому спутниковому кризису. Рефреном звучала мысль, что СССР вырвался вперед по интеллектуальному уровню населения, по доле экспертов, занимавшихся естественными, точными науками и инженерией. В итоге кризис привел к позитивным (для американских науки и образования) результатам. Финансирование фундаментальной науки и образования было увеличено в несколько раз. Появились Национальный научный фонд и инициативы по обновлению образовательных программ по математике. Таким образом, к началу 1980-х годов среди населения Соединенных Штатов уже вполне заметная прослойка обладала уровнем математической и естественно-научной грамотности, достаточной для того, чтобы обсуждать перспективы математики и математического образования, а также чтобы в принципе интересоваться этими вопросами. Некоторые эксперименты по обновлению образовательных программ были признаны скорее неудачными. Это относилось, в частности, к так называемой «новой математике» — попытке концептуализации школьного математического образования. Идея — весьма здравая — состояла в том, чтобы заменить зубрежку правил пониманием их сути. Например, чтобы мотивировать изучение правил сложения и умножения столбиком, в программе появились позиционные системы счисления с отличным от 10 основанием, а также основные понятия теории множеств. Провал реализации этого эксперимента — и это типично для радикальных образовательных инициатив — был связан главным образом с тем, что учителя не были готовы к преподаванию нового материала, да и сами не вполне им владели. К моменту появления этой книги в США прошла волна реформ, и наступил очередной кризис. Его особенностью стало ясное понимание потенциала математики и ее ведущей роли в научно-техническом прогрессе и, даже более общим образом, в благосостоянии общества. В то же время кадровый, финансовый и ресурсный голод вызывал серьезное беспокойство.

С позиций сегодняшнего дня ясно, что кризис начала 1980-х годов в США удалось преодолеть. Хорошо известно, что кадровую проблему помог решить комплекс продуманных мер, не прогнувшихся под «национальное самолюбие» и включавших в себя «импорт мозгов», но это последнее обстоятельство не снижает ценности результата. Сейчас правительства многих стран, в том числе и нашей страны, понимают важность и необходимость таких инструментов, хотя эффективность их уже не столь высока. Более того, к концу XX — началу XXI в. США стали признанным лидером математической науки. Эта позиция, вплоть до самого последнего времени, подкреплялась наукометрическими параметрами — как количественными (число публикаций), так и качественными (доля высокорейтинговых публикаций). Лишь в последние годы вперед по этим показателям вырвался Китай.

В современной России продолжается кризис математики и математического образования. Несмотря на то что исторически мы занимали очень высокие (возможно, даже наивысшие) позиции, мы стали жертвой утечки мозгов, причем их глобальный экспорт — только малая часть беды. Такие занятия, как фундаментальная наука и образование, потеряли привлекательность, и в течение 1990-х и начала 2000-х годов многие из наиболее способных ученых и преподавателей сменили либо место жительства, либо профессию. Примерно десятилетие назад ситуация перестала ухудшаться, но стабилизация произошла на довольно низком уровне. Восстановление и подъем, как хочется надеяться, уже начались, но их темпы пока скромны, а финансовые вливания (местами весьма существенные) оказывают положительное, но недостаточное влияние. Сегодня перед нами стоят очень похожие и заведомо не менее сложные задачи, чем те, о которых повествует данная книга.

Кроме «пророческого» — как будто нарочно обращенного к нашему времени — содержания, в книге есть и важная вневременная составляющая. Почти в каждой статье так или иначе ведется живое обсуждение вечных вопросов математики. Что такое математика? Кто такие математики? «Открывают» математики результаты или «изобретают»? Что такое прогресс в математике? Что такое красота? Как математическая строгость соотносится с озарением? Эти вопросы неизменно возникают и горячо обсуждаются в каждом новом поколении математиков, так что порой кажется, что современные математики ведут беседу с математиками прошлого, иногда отделенными от нас несколькими тысячелетиями. Конечно, данная книга не перенесет нас настолько далеко в прошлое, но и 40 лет — немалый срок. Читая книгу, убеждаешься, что у математиков есть общие и очень глубокие интересы, даже если мы живем в разные эпохи и принадлежим разным культурам. Поэтому там, где это показалось уместным, мы добавляли комментарии современных математиков, дополняющие и подтверждающие мысли авторов статей, а иногда полемизирующие с ними. Надеемся, что читателю будет интересно следить за диалогом.

Валентина Кириченко и Владлен Тиморин

Черноголовка, ноябрь 2021 г.

ВВЕДЕНИЕ

В наши дни математика переживает кризис. По мере того как потребность в математической грамотности возрастает, процент американских студентов, намеревающихся изучать математику, снижается, а оценки абитуриентов неуклонно ухудшаются. В то время как фундаментальная математика достигает невиданных высот, увеличивающееся разнообразие прикладных областей создает угрозу распада математики на различные и часто враждебные друг другу науки.

Кризис математики сулит трудности ученым и инженерам, в научных и даже в политических кругах начинают бить тревогу. Отмечая рост «научной и технической безграмотности» и «угасание стремления нашей нации к превосходству в естественных науках, математике и технологиях», авторы отчета NSF[1], подготовленного по заказу президента США, предупреждают о серьезных негативных последствиях публичной безграмотности в науке: «В наши дни во многих сферах деятельности, далеких от науки… требуется более глубокое понимание технологий, чем когда-либо прежде. Однако наша система образования не способна сформировать такое понимание». Согласно этому докладу, современные тенденции создают угрозу нехватки математиков и инженеров. «Существует опасность, что количество потенциальных ученых и инженеров уменьшится, даже если потребность в таких людях будет расти». Пора всерьез рассмотреть перспективы математики.

Данный сборник статей, посвященных возможным формам математики в будущем, — продолжение книги «Математика сегодня: двенадцать неофициальных очерков», написанной три года назад под руководством Объединен-

[1] Science and Engineering Education for the 1980s and beyond / prep. by Nat. Sci. Foundation and the Dep. of Education. Washington D.C., 1980. NSF (National Science Foundation, Национальный научный фонд) — американское грантовое агентство, занимающееся поддержкой научных исследований. Директора и заместителя директора NSF назначает президент США при одобрении Сената. Отечественный аналог — РНФ (Российский научный фонд). — *Примеч. науч. ред.*

ного проектного комитета по математике и CBMS[2] при поддержке NSF. Хотя «Математика будущего» развивает тему «Математики сегодня...», эти книги во многом отличаются друг от друга. Главное отличие заключается в том, что «Математика будущего» — сборник мнений и предсказаний вектора развития математики и математического образования в недалеком будущем. Это не продукт Объединенного проектного комитета по математике или CBMS. Ни одна из этих организаций ни в какой мере не несет ответственности за мнения, изложенные в данной книге. «Математика будущего» — труд отдельных личностей, а не официальной математической организации.

Авторы статей, опубликованных в этой книге, — опытные педагоги и исследователи, представители разных частей математического сообщества. Здесь они выступают как люди, серьезно озабоченные развитием математики и математического образования. Некоторые из них ратуют за радикальные реформы, указывая на внезапно возросший спрос на математическое моделирование и дискретную математику. Другие же настаивают на сохранении традиционной ценности математики как языка науки, формального выражения ее структуры. Но всех авторов волнует то, как мы передаем природу и ценность математики нашим детям. От математического образования сегодня зависит математика будущего.

Мы начинаем с расследования старого как мир противостояния «чистой» и прикладной математики. Это противостояние — яркое выражение двуликости математики. Она обладает как элегантностью, так и мощью, ее стандарты истинности одновременно эстетичны и прагматичны; математика в самом деле объединяет в себе и искусство, и науку. Однако многие люди, изучающие математику или занимающиеся ею профессионально, воспринимают важность этих особенностей по-разному.

---

[2] CBMS (Conference Board of the Mathematical Sciences, Консультативный совет в области математических наук) — зонтичное объединение американских организаций, связанных с поддержкой развития математических наук. В настоящее время в состав CBMS входят 19 организаций, в том числе AMS (American Mathematical Society, Американское математическое общество), MAA (Mathematical Association of America, Математическая ассоциация Америки) и SIAM (Society for Industrial and Applied Mathematics, Общество индустриальной и прикладной математики). — *Примеч. науч. ред.*

Пол Халмош, Джерри Кинг и Тим Постон провозглашают — каждый по-своему — важность сохранения абстрактной красоты в образовании. Математика открывает Халмошу «захватывающе сложную» логическую структуру Вселенной. Кинг считает, что математика так же, как музыка или поэзия, имеет «эстетическую ценность». Для Постона «интеллектуальная гармония» столь же ощутима и ясна, как музыкальный тон. Они считают, что «чистая» математика отличается от прикладной так же, как поэма от законопроекта.

В то же время Джером Спаниер утверждает, что сила математики не в полной мере раскрывается ее внутренней структурой, а «решение уравнения» — еще не решение задачи. По мнению Спаниера, математика — не изолированная область умственной деятельности, а часть общего процесса научного моделирования. Согласно Алану Такеру, современные прагматичные студенты «голосуют ногами», выбрав новые, бурно развивающиеся прикладные области в качестве основного поля своих исследований. Современная наука регулярно ставит перед математикой новые задачи и насыщает ее новыми объектами и конструкциями. В заключительной статье первого раздела Уильям Лукас рассматривает новые компоненты этого процесса и замечает, что теория принятия решений ставит перед современной математикой вызов, подобно тому, как поколение назад это делала физика. Природа математики глубоко зависит от характера задач, появляющихся изначально в других науках.

Это противостояние между «чистой» и прикладной математикой не должно вызывать ни удивления, ни сожаления. На самом деле такое противостояние — основной источник открытий в математике: сначала теория догоняет практику, затем практика поглощает новую теорию, заставляет ее работать. Такая модель развития возникла с появлением самой математики. Древнегреческие исследования чистых форм конических сечений привели, около 2000 лет спустя, к моделям планетарных орбит, а практическая арифметика Древнего Египта привела в наше время к эзотерическим результатам в абстрактной области теории чисел, которую Г.Х. Харди горделиво называл самой бесполезной теорией в математике[3]. Эти древние примеры иллюстри-

[3] В 1940 г. в своем знаменитом эссе «Апология математика» Харди написал: «Никому еще не удалось обнаружить ни одну военную, или имеющую отношение к войне, задачу, которой служила бы теория чисел или теория относительности, и маловероятно, что кому-нибудь удастся обнаружить нечто подобное, на сколько бы

руют силу не только «чистой» и прикладной математики, но и взаимодействия между ними. Подобные свидетельства можно найти и в современной математике: не так давно созданные абстрактные теории графов и матриц оказались полезными при разработке компьютерных сетей, в корне меняющих наш образ жизни и работы, а компьютерная революция порождает новые области исследований в «чистой» математике, например анализ алгоритмов.

Что действительно является новостью сегодняшнего дня: многие наши соотечественники либо не обратили внимания на бурное развитие математики и ее приложений, либо испугались его. В то время как наука и общество все больше зависят от плодов математики, мы все чаще слышим о боязни математики и о математической безграмотности. Требования к математическому образованию растут, при этом, похоже, что и результаты, и отношение обучающихся к предмету изучения ухудшаются. Согласно упомянутому выше отчету, только треть школьных округов США требуют изучать математику более одного года. «В наши дни больше школьников, чем когда-либо ранее, прекращают изучать математику и естествознание после 10-го класса, и нет никаких признаков перелома этой тенденции»[4]. Настоящий кризис математики заключается в плачевном состоянии математического образования. Непонятно, как в таких условиях сама математика может оставаться сильной.

В статье, открывающей второй раздел, Питер Хилтон утверждает, что бегство от математики — не патология, а «совершенно здравая» реакция на математическую программу начальной школы, которая часто, увы, — отталкивающая, бессмысленная и скучная. Современные учителя — ученики прошлого, а из современных учеников вырастут учителя будущего. Поэтому отторжение порождает отторжение — и так далее до бесконечности. «Чем

лет мы ни заглядывали в будущее» (*Харди Г.Г.* Апология математика / с предисл. Ч.П. Сноу; пер. с англ. Ю.А. Данилова. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотичная динамика», 2000. С. 85). Это его предсказание опровергнуто временем. В 1977 г. теория чисел сослужила хорошую службу криптографии — чистые и абстрактные теоремы, такие как малая теорема Ферма и китайская теорема об остатках, легли в основу алгоритма RSA, одного из самых популярных методов шифрования с открытым ключом. А без теории относительности современные спутниковые навигаторы были бы абсолютно непрактичны — они давали бы ошибку в десятки километров. — *Примеч. науч. ред.*

[4] Science and Engineering Education... (см. сн. 1 на с. 12).

больше волнуется учитель, — отмечают Аннели Лакс и Джулианна Гроут во второй статье этого раздела (с. 122), — тем глубже он застревает в колее шаблонных правил и зубрежки». Лакс и Гроут уверены в том, что преподавание математики должно развивать активное взаимодействие двух типов мышления: аналитического и эвристического. Развивая эту тему в следующей статье, Эйб Шенитцер демонстрирует на конкретных примерах, что математику можно преподавать эвристически, встроив каждую тему в соответствующий контекст. В статье «Читайте классиков!» (с. 153) Гарольд Эдвардс утверждает, что история — важный контекст, которому преподаватели не уделяют должного внимания. «История сделала нас такими, какие мы есть сейчас, она — наш источник информации…».

В свою очередь, Нил Коблиц иллюстрирует последствия некорректно использованной математики: он показывает, как пропагандисты с помощью ловко подобранных примеров применяют математику для запутывания вместо пояснения, запугивания вместо поддержки и создания «ложного представления о точности и глубине». В статье Коблица ставится много задач математическому образованию, не в последнюю очередь — задача довести уровень грамотности сограждан до такого состояния, при котором они смогут сами разоблачать математический обман.

Последние четыре статьи в этом разделе посвящены скорее состоянию математического образования, чем его содержанию. Трое опытных математических книгоиздателей — Вальтер Кауфманн-Бюлер, Клаус и Элис Петерс — изложили свое представление о том, как роль книг и издателей может измениться в эпоху персональных компьютеров. Тексты Дональда Альберса и Джорджа Миллера повествуют о перспективах математического образования в двухлетних колледжах, в которых в настоящее время учится более половины всех студентов США. Преподаватели колледжей испытывают серьезные проблемы. Около половины преподавателей математики — совместители, очень немногие из них принимают активное участие в разработке учебных программ или в повышении собственной квалификации, а подавляющее большинство преподавателей, будучи уже немолодыми, не могут приспособиться к революционным переменам в математике, уже коснувшимся их учеников.

Готовность учить новой математике, математике 1980-х, — вызов для преподавателей. Судя по всему, без существенной поддержки они не смогут принять этот вызов. В последней статье второго раздела Э.П. Майлз-младший вспоминает историю взлета и падения проекта NSF по повышению квалификации учителей и совершенствованию учебных программ. На пике своего развития — в начале 1960-х годов, после запуска «Спутника-1», — NSF распределял финансирование примерно поровну между научными и образовательными программами. Сейчас расходы на образование в области точных наук составляют менее 10% бюджета NSF, что, возможно, отражает продолжительное пренебрежение к этой области, приведшее также к фобиям и неуспеваемости — эпидемиям современного математического образования в США. Сравнение американского математического образования с советским показывает (в недавнем докладе Айзека Уирзапа, сотрудника NSF), что советских школьников, изучающих анализ, физику и химию, примерно в 20 раз больше, чем американских. В приведенном выше отчете подчеркивается эта проблема: «Снижение акцента на математике и естественных науках в наших школах резко контрастирует с другими промышленно развитыми странами. Япония, Германия и Советский Союз обеспечивают тщательную подготовку в области естественных наук и математики для всех своих граждан» [5].

Скорее всего, ввиду надвигающегося дефицита инженеров и программистов, в ближайшие годы изменятся схемы поддержки математического образования в США. Но даже эти возможные изменения вряд ли способны полностью приостановить уход преподавателей. В 1980/81 учебном году почти 25% преподавательских вакансий в США были заполнены недостаточно квалифицированными кандидатами. Видимо, нехватка школьных учителей математики только усугубится в 1980-е годы, в то время как и выпускники университетов, и наиболее квалифицированные преподаватели найдут лучше оплачиваемую работу в компьютерной индустрии или технике.

В третьем разделе нашего обзора перспектив математики затрагивается одна из самых вопиющих проблем XX в. — отказ девушек от школьных курсов по выбору, посвященных естественным наукам и математике. Эйлин Пойани и Элис Шафер исследуют роль, которую играет математика как критический фильтр в выборе карьеры. «Нравится нам это или нет, математика открывает двери карьерного роста», однако на тестах SAT [6] девушки

[5] Science and Engineering Education...

[6] SAT (Scholastic Aptitude Test, или Scholastic Assessment Test, тест академических способностей, или тест для оценки академических навыков) — стандартизи-

в среднем набирают на 50 баллов меньше, чем юноши, а среди слушателей курсов математического анализа девушек в 4 раза меньше, чем юношей, и эта пропорция почти не меняется. Чтобы описать контекст нынешних проблем, Шафер вспоминает, с какими сложностями столкнулись шесть выдающихся женщин-математиков прошлого и чего эти женщины в итоге добились. Некоторым из них отказали в поступлении в университет (из-за их пола), кому-то из них не присудили заслуженной ученой степени, а также, будучи женщинами, они не получили тех должностей, для которых обладали достаточной квалификацией. Мариан Бойкан Пур-Эль предлагает современный взгляд на проблему, рассказывая, с какими семейными и карьерными трудностями придется столкнуться женщине-математику. Каждая из этих трех статей наводит на мысль о том, как решить проблему нехватки математически подготовленных специалистов — чаще использовать математические таланты женщин.

В заключительном разделе сборника мы предлагаем вниманию читателя различные взгляды на математику будущего, размышления о том, как математика рискует превратиться в набор слабо связанных между собой дисциплин. Развитие математических методов в прикладных дисциплинах ускорилось благодаря нескольким причинам: взлету информатики, прагматизму современных студентов, современным требованиям точных наук, общественной реакции на перегруженность и недостатки теоретически ориентированной «новой математики». В силу этих, а также многих других причин приложения математики легли в основу практически всех реформ учебных программ в наше время.

В первой статье последнего раздела, написанной Россом Финни, демонстрируются простые, но полезные примеры из прикладной математики, встречающиеся в инновационных учебных материалах проекта Undergraduate Mathematics Applications Project (проект приложений бакалаврской математики).

рованный экзамен, результаты которого учитываются университетами США в ходе приемной кампании. В чем-то роль SAT схожа с ролью Единого государственного экзамена (ЕГЭ) в РФ, но главное отличие состоит в том, что SAT принадлежит частной некоммерческой организации (College Board) и администрируется другой частной некоммерческой организацией (Educational Testing Service). Максимальное число баллов, которое можно набрать в SAT, составляет 1600. Более 1550 баллов набирают менее 1% абитуриентов. — *Примеч. науч. ред.*

Приведенные Финни примеры показывают не только то, что математика может применяться интересными способами — при определении минутного объема сердца, составлении расписания работы охранников тюрьмы или для анализа состава законодательных органов, — и не только то, что наличие таких примеров делает изучение математики более привлекательным, но и то, что в реальности прикладная математика использует методы и подходы, редко встречающиеся в стандартных учебниках.

Следующие четыре статьи посвящены конкретным областям прикладной математики. Энтони Рэлстон знакомит нас с новой большой областью дискретной математики, которая расцвела благодаря современной компьютерной революции. Рэлстон считает, что дискретная математика — парадигма нашего времени, такая же, как в прошлом математический анализ. Продолжая тему компьютерной математики, Пол Боггс рассуждает об уникальной роли программного обеспечения как продукта, который может быть и демонстрацией силы математики, и даже товаром; программное обеспечение для математических расчетов — важный продукт симбиоза математики и компьютерных наук, экономически ценный, наглядный и практически осязаемый. Хартли Роджерс-младший, Тим Робертсон и Роберт Хогг пишут о двух близких родственниках математики — физике и статистике. Каждая из этих областей вносит — пусть и совершенно по-разному — вклад в развитие математики. Развивающиеся связи этих областей с математикой сильно изменят природу математического образования в следующие десятилетия.

Наконец, Мейнард Томпсон всесторонне анализирует взаимоотношения математики и других наук, особо отмечая разницу между математическим моделированием в устоявшихся физических науках и моделированием в биологических и недавно зародившихся социальных науках.

Взгляд на математику, изложенный в этих эссе, похож на замедленную съемку взрыва. Мощные силы, высвобождаемые интеллектуальной энергией ядра «чистой» математики, расширяют математику во всех направлениях. Когда волны новых идей проходят по смежным с математикой областям науки, эти области усиливаются и принимают на вооружение новые понятия и методы исследования. Хотя в конце концов эти новые силы станут частью естественных наук, сейчас они — мощная, бурно растущая часть прикладной математики. Энергия же в ядре математики велика как никогда, пусть даже и меньше людей, чем ранее, достигают этого ядра. Те же, кто достиг его, говорят о мощных связях, объединяющих самые главные концепции «чистой» математики. Это новое единство — которому «Математика сегодня...» уделяет больше внимания, чем эта книга — закрепляет постоянство интеллектуальной силы, провоцирующей современный взрыв прикладной математики. Вызов математике завтра — укротить эту силу и убедиться, что будущие поколения смогут эффективно ею пользоваться.

Линн Артур Стин

Нортфилд, Миннесота
Январь 1981 г.

ЧТО ТАКОЕ МАТЕМАТИКА?

*Пол Халмош**

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА — ПЛОХАЯ МАТЕМАТИКА

На самом деле она (прикладная математика) — не плохая, а просто немного другая математика.

Вы подумали, что я привлек вас провокационным заголовком, а завладев вашим вниманием, решил отойти к примиренческой позиции? Ни в коем случае! То, что может выглядеть как примиренческая позиция, как раз и является предметом ожесточенных споров. Верьте мне или нет, многие люди агрессивно отстаивают точку зрения, согласно которой прикладная математика ничем не отличается от «чистой», а кто утверждает противное — тот заблуждающийся реакционный консерватор.

Если вы не профессиональный математик, то, возможно, изумитесь, узнав, что математика бывает разная и любой сможет найти в ней что-то, приводящее человека в восторг. Возникает уместный вопрос: где проходит граница между «чистой» и прикладной математикой, как математики ощущают этот разлом и что произойдет с ним в будущем?

---

* *Пол Халмош* — профессор математики в Университете Индианы (Блумингтон), главный редактор популярного математического журнала *American Mathematical Monthly*. Защитил диссертацию в Университете Иллинойса, работал в университетах Иллинойса, Сиракуз, Чикаго, Мичигана (Анн-Арбор), Гавайев и Калифорнии (Санта-Барбара). Опубликовал множество книг, более 100 статей, был редактором многих журналов и нескольких книг. Математическая ассоциация Америки присудила ему премию Шовене и дважды — премию Лестера Форда. Научные интересы — теория меры, эргодическая теория, алгебраическая логика и теория операторов в гильбертовом пространстве.

Что такое математика?

На практике никогда не возникает вопросов, какие вещи относятся к математике, а какие нет. Но не так просто подобрать слова, чтобы точно описать предметную область математики. Более того, математику часто описывают не как единую науку, а как совокупность двух частей, причем принципы деления на части бывают самые разные.

Некоторые из подобных дихотомий хорошо известны, некоторые — не так хорошо. Математика изучает размеры и формы, другими словами, числа (арифметика) и фигуры (геометрия); математика бывает непрерывной и дискретной, она иногда бывает конечной, иногда — бесконечной и, что звучит особенно язвительно, бывает «чистой» (бесполезной?) и прикладной (необходимой на практике?). Эти методы классификации выглядят совсем по-разному, хотя и не являются полностью независимыми. Тем не менее некоторые водоразделы выражены гораздо сильнее, чем другие: например, деление математики на арифметику и геометрию — не столь ясное и четкое, как на прикладную и «чистую» математику.

Никого не заставляют выбирать между ванильным мороженым и шоколадным, можно даже смешать их, хотя обычно так не делают. Похожее (врожденное?) разделение вкусов складывается и у математиков. Никто не решает раз и навсегда любить только алгебру (дискретный мир) или только топологию (непрерывный мир), есть даже бурно развивающаяся деятельность вроде алгебраической топологии и топологической алгебры, но большинство специалистов все же сильно предрасположены либо к дискретному миру, либо к непрерывному.

Квадраты и сферы

Было бы неправильно продолжать разговор о математике и ее разделах без рассмотрения конкретных примеров, но изложение настоящих примеров потребует погружения в детали и выходит за рамки данной статьи. Приведем пару искусственных примеров (с упрощениями, которые я поясню впоследствии).

Допустим, что вы хотите уложить пол в квадратной комнате квадратными плитками, никакие две из которых не совпадают по размеру. Сможете ли вы это сделать? Иными словами, можно ли покрыть квадрат конечным числом различных по размеру неперекрывающих друг друга квадратов? Это непростой вопрос.

Вот другая задача: если у вас есть идеальный шар, вроде баскетбольного мяча, какое наименьшее число точек вы можете отметить на нем так, чтобы каждая точка была отдалена от других не более чем на пару сантиметров? Иначе говоря: как экономнее всего распределить телевизионные ретрансляционные станции по поверхности Земли?

Что является основным объектом в задаче о покрытии квадрата: размеры (числа) или формы (фигуры)? Ответ состоит в том, что эта задача имеет отношение и к тому и к другому. То же верно и в отношении покрытия сферы сетью точек. В этом смысле приведенные примеры дают реальную картину, задачи смешанного типа встречаются чаще (и всегда оказываются интереснее), чем чисто арифметические или чисто геометрические задачи. У приведенных примеров, однако, — разные направленности. Задача о замощении квадрата — по факту арифметическая, конечная и абстрактная, а задача о покрытии сферы сетью точек — более геометрическая, бесконечная и прикладная.

Задача о покрытии квадрата квадратами вызывает определенный интерес и периодически упоминалась в профессиональной литературе, но не особенно привлекательна для большинства математиков. Причина — не в ее очевидной бесполезности на практике, а в обособленности от остальной математики и необходимости в специальных, придуманных исключительно для данной задачи (*ad hoc*) методах ее решения. Это не лучший пример вопроса из «чистой» математики.

В то же время вопрос о покрытии сферы точками, хотя и исключительно практичен, тем не менее не является удачным примером задачи по прикладной математике: он гораздо проще большинства прикладных задач и не учитывает движения, центрального понятия прикладной математики в ее классическом понимании.

Плохи ли, хороши ли эти примеры, но для нашей дальнейшей дискуссии стоит иметь их в виду — это может оказаться полезным.

Поэтика и прагматика

Деление на «физиков» и «лириков» отчетливо видно не только в науке, но и в искусстве: сравните, к примеру, музыку Моцарта с военными маршами, картины Рубенса с медицинскими иллюстрациями или «Энеиды» Вергилия с филиппиками[1] Цицерона[2]. Чистая литература имеет дело с абстрактными и глобальными понятиями, такими как война или любовь, и излагает вымышленные истории поэтичным языком. Теоретическая математика имеет дело с абстрактными понятиями вроде умножения чисел и равенства треугольников, рассуждает о платонически идеализированных примерах этих понятий логически убедительно.

В некотором смысле, несомненно, литература является «прикладной». Шекспировские сонеты повествовали о ежедневной реальности, как и «Война и мир» Льва Толстого, а также «Записки о Галльской войне» Юлия Цезаря. Все эти авторы исходят из того, что видят и слышат, все пишут о том, как люди живут и что чувствуют. Грубо говоря, сходным образом и вся математика является прикладной. Она оперирует размерами и фигурами (изучение которых непременно приводит к алгебре и геометрии) и рассуждает о том, как размеры и формы могут меняться и взаимодействовать (и такие размышления неизбежно приводят к области, именуемой профессионалами *анализом*).

Без сомнения, источником вдохновения и математиков, и поэтов является наша осязаемая и мыслимая Вселенная. Нет сомнений и в том, что она воздействует на творца, и поэтому как минимум его исходный материал — мир фактов, движения, видов и звуков. Постоянный контакт искусства с реальностью меняет и, возможно, даже улучшает искусство.

Главной целью «прикладной литературы», равно как и прикладной математики, является действие. Агитационная речь написана, чтобы побудить проголосовать за кандидата номер 3 в избирательном списке, а не за кандидата номер 4. Аэродинамическое уравнение решается для того, чтобы крыло поднимало самолет достаточно быстро — это поможет избежать жалоб от жителей соседних с аэропортом домов. Эти примеры грубы и очевидны; рассмотрим примеры посложнее. Если в биографии кандидата, фактически безошибочной и честной, не упоминает напрямую грядущие выборы, обязательно ли это

[1] Цицерон гневно изобличал Марка Антония и называл эти обличительные речи филиппиками в подражание афинскому демагогу Демосфену. — *Примеч. пер.*

[2] Цицерон поплатился головой за свои филиппики. Согласно Плутарху, отрубленная голова и обе руки (убийцы не знали, какой именно рукой Цицерон писал — правой или левой) были выставлены на обозрение публики. Фульвия (жена Марка Антония) предварительно проткнула булавками язык знаменитого оратора. — *Примеч. науч. ред.*

неприкладная литература? Если модель обтекания движущихся тел воздухом является математически строгой теорией, и если в этой теории не упоминаются самолеты и аэропорты, является ли она чисто теоретической? А как насчет промежуточных случаев: биография политика, лишенная фактической лжи, но политически ангажированная, или изучение аэродинамической задачи, не являющееся доказуемо некорректным, но использующее при этом грубые упрощающие приближения, — это «теория» или «приложения»?

Непрерывный спектр

Где именно проходят границы между биографией, историческим романом, легендой и фантастикой? Мы же можем сказать про Тойнби, Фукидида, Гомера и Джойса[3], кто из них представляет художественную литературу, а кто — скорее документальную. Но, вставив в список еще по дюжине имен между каждыми соседними позициями в направлении от интерпретируемых фактов к чистому вымыслу, мы сделаем различия размытыми. В математике похожая ситуация: если мы возьмем несколько статей начиная от математических методов кораблестроения, через гидродинамику и уравнения в частных производных до теории топологических векторных пространств, то понять, что является «чистой» математикой, а что — прикладной, будет просто на концах спектра, но гораздо труднее — в его середине.

Еще больше запутывает ситуацию то, что «чистая» математика может быть практически применимой, а прикладная математика может быть элегантной. Пытаясь понять взаимосвязь математической логики и геометрии, математики открыли теорию выпуклых множеств, а также алгебраические и топологические методы изучения различных классов функций. Как будто случайно выпуклость стала основным понятием линейного программирова-

[3] Арнольд Джозеф Тойнби (1889–1975) — английский историк и философ, автор теории локальных цивилизаций. Пик популярности этой теории пришелся на 1960-е годы. Фукидид (V в. до н.э.) — античный историк, автор «Истории Пелопоннесской войны»; Гомер (VIII в. до н.э.) — легендарный античный поэт и сказитель, предполагаемый автор эпических поэм «Илиада» и «Одиссея»; Джеймс Огастин Алоишес Джойс (1882–1941) — ирландский писатель и поэт, автор модернистского романа «Улисс» (Улисс = Одиссей). Произведения всех четырех авторов в той или иной степени связаны с (или мотивированы) реальными событиями из истории Древней Греции. — *Примеч. науч. ред.*

ния, незаменимого в задачах современной промышленности и экономики, а функциональный анализ стал главным инструментом квантовой теории поля и физики частиц. Физик признаёт применимость алгебр фон Неймана к физике элементарных частиц просто как повод для изучения функционального анализа, математик же считает эту связь не более чем интересным аспектом теории алгебр фон Неймана. De gustibus non disputandum est?[4]

Равно как «чистая» математика бывает практически значимой, так и прикладная математика иногда оказывается изящно бесполезной в большей мере, чем обычно принято считать. Прикладной математик — не инженер и не занимается проектированием самолетов или атомных бомб. Прикладная математика — интеллектуальная дисциплина, а не часть промышленной технологии; несомненно, ее главная задача — получение конкретного результата, но прежде всего она является частью теоретической науки, изучающей основные принципы, по которым самолеты летают, а бомбы взрываются.

Различия между учеными настолько же сложно определить, как и между выбранными ими областями исследований. Порой один и тот же человек бывает и теоретиком, и прикладником. Иногда прикладники — особенно лучшие из них — имеют глубокую математическую подготовку, а сильнейшие математики-теоретики знакомы с методами прикладной математики. Когда подобное происходит в реальности, и «чистый» математик успешно решает прикладные задачи[5], вроде случая задачи о коммивояжере, появляющегося в теории операций[6], а специалист по теории относительности блестяще выводит формулу из четырехмерной дифференциальной геометрии[7], оба втайне испытывают гордость: «Гляди, я и так тоже могу!».

[4] О вкусах не спорят? (*лат.*). — *Примеч. пер.*

[5] Мстислав Келдыш (брат известного математика Людмилы Келдыш) начинал с «чистой» математики, а уже затем переключился на прикладные и инженерные задачи; Лев Понтрягин, известный в первую очередь как один из сильнейших топологов, внес существенный вклад в дифференциальную теорию игр. — *Примеч. пер.*

[6] *Operations research* — дисциплина, исследующая принятие решений в менеджменте на основе математического моделирования. — *Примеч. пер.*

[7] Специалист по кораблестроению Алексей Крылов придумал элегантный метод приведения линейного оператора к канонической форме. О методе Крылова в наши дни рассказывают студентам самые что ни на есть «чистые» математики не из практических, а из эстетических соображений. — *Примеч. науч. ред.*

Делающие и знающие

Пока что я рассуждал о том, что в некотором смысле вся математика — прикладная, а в некоторых ситуациях нелегко отличить «чистую» математику от прикладной. Теперь я зайду с другой стороны: «чистая» и прикладная математика действительно отличаются, и, если вы знаете, что искать, и достаточно смелы в своих убеждениях, то сможете найти отличия. Моя задача — скорее что-то описать, чем что-то доказать. Я не ставлю целью ни обратить еретика в лоно «истинной веры», ни заставить агностика уверовать, а просто хочу ввести в курс дела путника, пришедшего в наши края издалека: вот две категории людей и вот что они утверждают друг о друге.

Разница во мнениях не такова, что одни говорят «это право», а другие — «нет, это лево»: здесь одни говорят «мы едины», а другие отвечают «нет, мы — две разные секты». Из-за такого различия сложно беспристрастно представлять факты: само признание, что конфликт существует, уже делает человека причастным к одной из сторон. Избавиться от этого нельзя, поэтому постараюсь, не отрицая своих твердых убеждений, максимально нейтрально описать ситуацию для незнакомца, случайно оказавшегося среди нас.

Люди хотят знать и действовать: знать, что делали и говорили их предки, знать о животных, растениях и минералах, знать об идеях и числах, о фигурах и звуках, выращивать еду и шить одежду, строить дома и проектировать машины, лечить болезни и говорить на разных языках. Деятели и знатоки часто отличаются по мотивации, настрою, подходам и предпочтениям; такие отличия видны и в частном случае прикладников (деятелей) и теоретиков (знатоков). Мотивация математика-прикладника — понять мир и по возможности изменить его; прикладнику требуется четко сфокусироваться на конкретной задаче, технические средства ценятся им прежде всего за их эффективность, а главный источник удовлетворения — правдоподобие полученного ответа и точность предсказаний. Мотивацией же математика-теоретика часто служит просто любопытство, ему приятнее наблюдать мир через широкоугольный объектив, чем через телескоп (есть ли поблизости более интересный и глубокий вопрос?), выбор техники отчасти диктуется соображениями гармонии (наслаждение процессом не уступает наслаждению результатом), а неожиданные связи между идеями, доселе казавшимися разнородными, приносят ему удовлетворение.

Последний момент заслуживает пояснения, особенно если вы из той обширной группы людей, которые гордо презирают математику и считают ее позорной тягомотиной. Для «чистого» математика его предмет — неиссякаемый источник художественного удовольствия: не только азарт от игры и удовлетворение от победы (если она вообще случается), но главным образом радость созерцательного размышления. Вызов не исходит от противника, выигрыш которого эквивалентен нашему поражению, а победа не является преходящим мгновением (как, скажем, в теннисе), нет — вызов бросает нам сложная логическая структура Вселенной, а наша победа перманентна (как нахождение золота на затонувшем галеоне).

Основные различия в мотивации, настрое, подходах и предпочтениях, возможно, связаны с более поверхностными, но и более заметными различиями в характере изложения. У «чистых» и прикладных математиков разные требования к четкости, элегантности и, возможно, даже логической строгости, и эти различия часто приводят к проблематичному и безрадостному общению.

Ответы на вопросы «как» и «почему», приведенные выше, не годятся в качестве практического критерия, позволяющего отличить прикладную науку от чистой, здесь нужна интуиция. Слово «спектр» — метафорическая подсказка. В некотором смысле красный и оранжевый одинаковы, просто длины волн немного различаются, и невозможно точно указать, где кончается красный цвет и начинается оранжевый; тем не менее это разные, легко различимые цвета.

Красота и скука

Многие математики-теоретики считают свою специальность искусством, и высочайшая похвала их работе — признание ее «красоты». Прикладники же, возможно, иногда полагают, что их призвание — систематизация методов, и подходящая похвала для них звучит по-другому: их работы «изобретательны», у них «мощные» инструменты.

Еще меня поражает вот что: математика («чистая» математика), несмотря на свои многочисленные разделы и колоссально быстрый их рост (начавшийся несколько тысячелетий назад, а в наши дни развивший невиданную скорость), остается невероятно единой интеллектуальной структурой. Математика, строгая и живая наука, делится на такое количество наук, и каждая столь широка, что, видимо, никто не может охватить их целиком. В результате мы — все мы — часто приходим на обзорные лекции по темам, которые знаем хуже, чем средний историк знает, скажем, лингвистику. Но какова бы ни была тема доклада — будь то неограниченные операторы, коммутативные группы или параллелизуемые поверхности, — связь между разными частями математики дает о себе знать. Понятия и методы одних областей математики проявляются и в других областях, и таким образом поддерживается целостность структуры математики как науки.

Это единство, это эстетическое взаимопроникновение областей, как правило, отсутствует между «чистой» и прикладной математикой. Когда я пытаюсь прослушать лекцию о механике жидкостей, меня вскоре начинают удивлять и озадачивать особые приемы, которые кажутся мне локальными и не применимыми за пределами рассматриваемой задачи, после чего меня охватывают недоумение, скука, запутанность, острый дискомфорт и, в конце концов, полный хаос. Прикладные математики, слушающие лекции по алгебраической геометрии над полем ненулевой характеристики, ощущают нечто очень похожее, и они описывают услышанное как искусственную, барочную безделушку и бесполезную схоластику. Можно утверждать, что с беспристрастной научной точки зрения обе стороны неправы, но, возможно, в значительной степени обе правы, и это дает нам повод думать, что имеются две науки вместо одной. Для многих теоретиков прикладная математика — не что иное, как коллекция трюков, не примечательных ничем, кроме работоспособности. Для многих прикладных математиков бо́льшая часть чистой математики заслуживает эпитета «бессмысленная и бесполезная абстракция ради абстракции». (Отмечу мимоходом, что в моменты покаянного самоуничижения студенты, занимающиеся теорией категорий, отзываются о своей деятельности как об «абстрактной чепухе»; прикладники, как правило, относятся к теории категорий аналогично, кажется, понимая эту фигуру речи буквально[8].)

Новая ересь

Некоторые утверждают, что якобы воображаемый раскол между «чистой» и прикладной математикой — позднейшая ересь, от которой в ужасе отвер-

[8] Абстрактная чепуха (abstract nonsense) в настоящее время является общеупотребительным термином для методов теории категорий и гомологической алгебры. В применении к математическому рассуждению этот термин более не несет оттенка самоуничижения. — *Примеч. науч. ред.*

нулись бы отцы-основатели, заявив, что мир катится в пропасть. Здесь будет уместна цитата из «Филеба» Платона, которая, не опровергая полностью это утверждение, заставляет нас все же задуматься о его обоснованности.

Сократ: «Не считаешь ли ты, что есть два вида арифметики — для большинства людей и для философствующих? ...Ну а что ты скажешь относительно искусства расчетов и измерений, используемых в строительстве и в торговле, в сравнении с философской геометрией и тонкими вычислениями, мы будем говорить о них как о едином целом или двух частях?»

Протарх: «...Я бы сказал, что эти искусства различны».

Не является ли различие, введенное Сократом, делением математики на «чистую» и прикладную? Если нет, то что же это?

Хочу упомянуть еще только об одном интересном явлении в связи с обсуждаемым вопросом. Как правило, можно (хотя и не всегда) отличить математика-прикладника от теоретика, просто наблюдая за градусом их спора о единстве науки. Если собеседник категорически настаивает на том, что никакой разницы между чистой и прикладной наукой нет и не должно быть, что они едины, а на различия необходимо закрыть глаза, то он, вероятно, прикладник. Чистые теоретики обычно более сдержаны и менее полемичны: они видят различия между теорией и приложениями, но не считают эти различия достойными радости или сожаления. Я полагаю, что описал наблюдаемый факт, но, признáюсь, не перестаю удивляться, почему он имеет место.

Новая жизнь

Глубочайшее утверждение о связи математики и ее приложений, требущее проверки, — то, что эта связь симбиотическая, то есть что теоретическая математика не может существовать без прикладной математики и наоборот. Не только — что признают повсеместно — прикладная наука нуждается в достижениях теории, но и — чтобы не стать замкнутой в себе, выродившейся, бессмысленной и мертвой — чистая наука нуждается в практической подпитке и контакте с реальностью, а это может обеспечить только прикладная деятельность.

Первый аргумент, который приводят в пользу существования симбиоза, — исторический: вся «чистая» математика, дескать, происходит от реального мира — так, например, геометрия, согласно легенде, выросла из попыток просчитать эффект от разливов Нила. (Если это неправда, то есть если геометрия существовала до того, как стала нужна, то данный аргумент в пользу симбиоза стоит на шатком фундаменте. Если же это правда, то данный аргумент доказывает лишь то, что прикладная математика не может обойтись без «чистой», как муравьед без муравьев, но не обязательно наоборот.)

Поскольку математика изучает размеры и формы *вещей*, то само ее происхождение естественным образом связано с *вещественным*, реальным миром. Сомнительно, однако, что возобновление контакта с физикой, психологией, биологией или экономикой было необходимо для постановки величайших задач математики XX в. (таких, как континуум-гипотеза, гипотеза Римана или гипотеза Пуанкаре).

Суть вопроса, однако, кроется не в истории, а в содержании математики. Для сравнения рассмотрим шахматы. Математики часто, хотя и неохотно, признают, что шахматы являются частью математики. Неохотно — потому что не считают шахматы частью «хорошей» математики; с математической точки зрения шахматы «тривиальны». Так или иначе, шахматы — математика, и в частности «чистая» математика.

Шахматы не менялись концептуально в течение многих сотен лет. Тем не менее они существуют и популярны поныне. Миллионы людей состоят в шахматных клубах, и в наши дни весь цивилизованный мир завороженно следит за ходом матча Бобби Фишера против Бориса Спасского. Шахматы распаляют воображение большей части человечества, люди находят в этой игре эстетическое начало и почти мистические открытия.

Мало того, что шахматы (как и многие другие части математики) не нуждаются во внешней питательной среде — они, по сути, сами возрождаются с завидной регулярностью. Последнее возрождение началось не столь давно, когда шахматный анализ стал изучаться серьезно. (Типичная задача — по заданному положению шахматных фигур найти лучший ход одной из сторон или поставить быстрый мат, если это возможно.) И вот ключевой момент: для возрождения интереса к шахматам не только не понадобился вызов реального мира — на самом деле случилось ровно обратное. Анализ классических шахмат поставил перед компьютерными науками новый тип задач, выросший в небольшой, но интересный и цветущий раздел прикладной математики.

Оппонента, считающего, что математика нуждается во внешней питательной среде, эти аргументы могут не убедить, и он бы указал на плачевную тенденцию математики становиться слишком абстрактной, сложной и запутанной. Он отметил бы, что исправить это можно, связав математику с ее приложениями. Да, такая болезнь существует и хорошо известна, но, к счастью, имеется и врожденный иммунитет. Разные области математики, например, некоторые ветви элементарной евклидовой геометрии, сильно разрослись в течение столетий. В таких случаях происходит замечательная ремиссия. Старая математика никогда не умирает: то, что греки придумали 2500 лет назад, до сих пор живо, истинно и интересно — но выводы упрощаются, сердцевина теории становится частью единого организма, а противные бородавки удаляются.

(Замечу в скобках, что подобные аргументы — о необходимости возрождения через связь с реальностью — могут, в принципе, быть применены к изобразительному искусству, но до сих пор я не видел, чтобы кто-то пытался их применять. Живопись, возникшая изначально как искусство изображения реальности, впоследствии ушла в мир абстракций. Кто-то считает абстрактное искусство отталкивающим, но в целом оно продолжает достойно существовать до сих пор.

Говоря о необходимости связывать теорию с приложениями, иногда упоминают фактор времени. Например, если бы математики-теоретики уделили более пристальное внимание работам Максвелла, они бы открыли топологические группы гораздо раньше. Может быть, и так, но что мы потеряли, открыв их позднее? Стал бы мир лучше, если бы Рембрандт родился на 100 лет раньше? Куда торопиться?)

Неизвестно, однако, может ли контакт с приложениями предотвратить болезненные процессы измельчения и истощения. Известно, однако, что многие живые и по-настоящему содержательные области математики не имеют практических приложений (и не найдут, скорее всего, в силу высокого уровня абстракции). Современные примеры — аналитическая теория чисел и алгебраическая геометрия[9].

---

[9] Как и уже упоминавшийся в предисловии Харди, Халмош оказался не силен в предсказаниях. И та и другая теория в настоящее время пользуются существенным спросом со стороны как коммуникационных гигантов, так и спецслужб. Многие из этих организаций содержат исследовательские отделы, занимающиеся криптографией, основные алгоритмы которой опираются на продвинутую теорию чисел (в том числе аналитическую) или алгебраическую геометрию над конечными полями. — *Примеч. науч. ред.*

Когда я говорю, что математика не обязана периодически обновляться через контакт с реальностью, то, конечно, не имею в виду, что этот контакт противопоказан: многие красивые понятия математики были впервые замечены при изучении той или иной части природы. Возможно, они не были бы обнаружены без внешних стимулов, а может быть, и были бы — такое часто случалось.

Что касается взаимодействия теории и практики, то оно нужно в обоих направлениях, но гораздо больше в одном направлении, чем в другом. Для теоретической математики приложения являются отправной точкой и продолжают оставаться источником новых идей, но, впрочем, не являются необходимыми. Для прикладной математики понятия и выводы теории — базовый инструмент и часто дают ключ к разгадке тайн Вселенной, являясь, таким образом, неотъемлемой частью прикладной науки. И снова можно провести аналогию с муравьями и муравьедом: возможно, муравьед представляет некоторую экологическую ценность для муравья, но бесспорно муравьи жизненно необходимы для здорового существования муравьеда.

Что дальше?

Наиболее известные части математики — алгебра и геометрия, но есть и третья часть, анализ, играющая столь же важную роль. Анализ начинается с понятия изменения. Недостаточно просто изучать размеры и формы — необходимо также изучить, как они меняются со временем. Естественный способ измерить изменения заключается в изучении разницы между старым и новым, и это слово, «разница», приводит практически сразу к техническому термину «дифференциальное уравнение». Большинство классических задач прикладной математики имеют дело с движением, и наиболее полезным инструментом их решения являются теория и методика дифференциальных уравнений.

Явления реального мира, как правило, зависят от многих параметров: вкус рагу зависит от того, как долго вы готовите его, насколько высока температура, сколько вина вы добавляете и т.д. Чтобы предсказать исход эксперимента, переменные надо учитывать по отдельности. Ключевой вопрос: как меняется конечный результат при изменении некоторых, но не всех, входных данных? Вот почему бóльшая часть прикладной математики неразрывно связана с теорией уравнений в *частных производных*, которая для некоторых является почти синонимом прикладной математики.

Совершаются ли до сих пор большие прорывы и будут ли они продолжаться? Жив ли Шекспир математики (скажем, Архимед или Гаусс), активен ли в настоящее время, появится ли когда-нибудь снова? Алгебра, анализ и геометрия — за каким из этих разделов будущее? Как станут развиваться отношения математики и ее приложений?

Я не знаю ответов на эти вопросы, и никто не знает, но прошлое и настоящее наводят на некоторые подсказки. Основываясь на них, а также на надежде, которая умирает последней, рискну предположить следующее. Самый простой вопрос о великих прорывах: да, они все еще есть. Ответы на поставленные много десятилетий, а иногда и столетия назад вопросы обнаруживаются почти каждый год. Если Кантор, Риман и Пуанкаре ожили бы сейчас, они бы стали восторженными и трудолюбивыми студентами и получили бы ответы на многие свои вопросы.

Есть ли Архимед среди нас? Возможно, что нет. Появится ли в будущем новый Гаусс? Не вижу причин, почему бы и нет; надеюсь, что появится.

Я бы предположил, что в обозримом будущем (как и в настоящее время) дискретная математика будет все более полезным инструментом в попытке понять структуру Вселенной, и, следовательно, математический анализ будет играть пропорционально меньшую роль. То есть нельзя сказать, что анализ вообще и дифференциальные уравнения с частными производными в частности уже отжили свой век и теряют влияние, но я предполагаю, что не только комбинаторика, но и относительно сложная теория чисел, и геометрия потеснят анализ в книгах по прикладной математике.

Прикладная математика стоит на пороге изменений отчасти потому, что задачи меняются, и отчасти потому, что меняются инструменты для их решения. По мере того как мы все больше познаём мир и учимся управлять некоторой его частью, нам нужно задавать новые вопросы, а по мере того как математика развивается, избавляется от ненужных нагромождений и становится все глубже и проще, она предлагает новые методы для практического использования. Что же произойдет с существующим отношением «муравьев и муравьедов»? Мне кажется, что ничего существенного. Оба типа любознательности — и философская, и практическая — непременно продолжат существовать, и современный Сократ, вероятно, увидит разницу между ними так же ясно, как это сделал его знаменитый предшественник 2400 лет назад.

Итак, после всего сказанного, каков вывод? Возможно, он заключается в единственном слове — вкус.

Портрет Пикассо покажется кому-то красивым, а фоторобот разыскиваемого преступника может оказаться полезным, но скорее всего Пикассо не передаст реальность точно, а фоторобот — не очень вдохновляющее зрелище. Не слишком ли несправедливо сказать, что портрет — слабое подражание природе, а фоторобот — плохое искусство?

Бóльшая часть прикладной математики имеет первостепенное значение. Если интеллектуальный прием позволяет нам понять, как кровь распространяется по телу, как распространяются волны и как расширяются галактики, то он дает нам научное знание и, таким образом, заслуживает высшей похвалы. Не умаляя глубины и точности мышления, а также социальной значимости великих авторов законодательной прозы (которые строго придерживаются традиционного стиля), можно отметить, что написанные ими законы представляют собой плохую литературу. Таким же образом, не умаляя проникновенности, виртуозности и научного вклада великих прикладников, можно сказать об их открытиях законов кровообращения, распространения волн и расширения галактик, что эти открытия — первосортная прикладная математика, но, как правило, плохая математика.