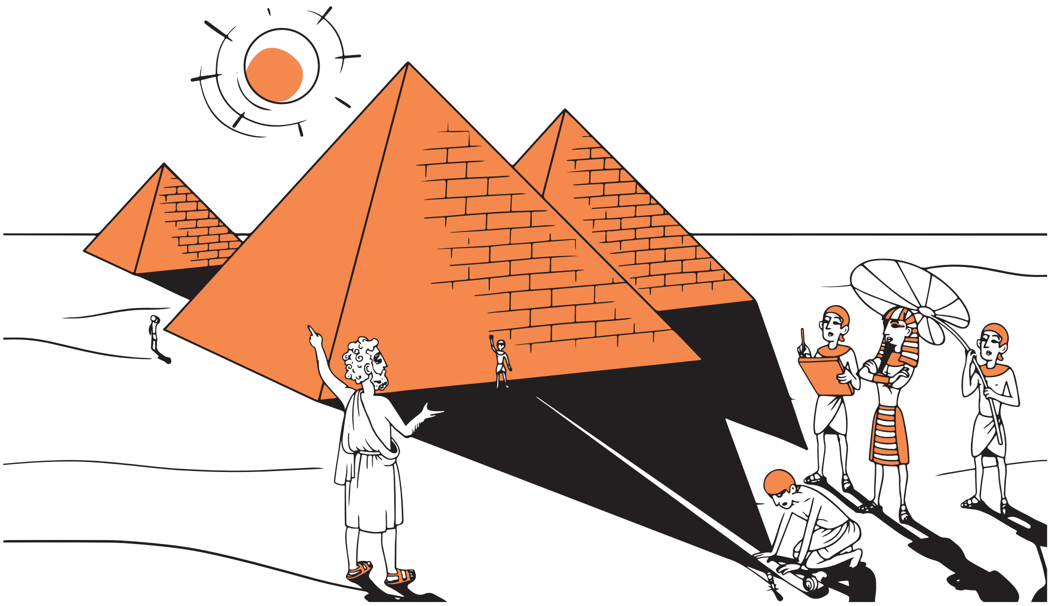

Рис. 1. Фалес измеряет высоту пирамиды

задолго до Евклида, автора замечательной книги, по которой обучались геометрии в течение двух тысячелетий после его смерти. Заключенные в ней истины, известные теперь каждому школьнику, еще не были открыты в эпоху Фалеса. А чтобы воспользоваться тенью для решения задачи о высоте пирамиды, надо было знать уже некоторые геометрические свойства треугольника, — именно, следующие два (из которых первое Фалес сам открыл):

1) что углы при основании равнобедренного треугольника равны и, обратно, — стороны, лежащие против равных углов треугольника, равны между собою;
2) что сумма углов всякого треугольника (или, по крайней мере, прямоугольного) равна двум прямым углам.

Только вооруженный этим знанием, Фалес вправе был заключить, что когда его собственная тень равна его росту, солнечные лучи встречают ровную почву под углом в половину прямого и, следовательно, вершина пирамиды, середина ее основания и конец ее тени должны образовать равнобедренный треугольник.

Этим простым способом очень удобно, казалось бы, пользоваться в ясный солнечный день для измерения одиноко стоящих деревьев, тень которых не сливается с тенью соседних. Но в наших широтах не так легко подстеречь нужный для этого момент, как в Египте:

солнце у нас низко стоит над горизонтом, и тени бывают равны высоте отбрасывающих их предметов лишь в околополуденные часы летних месяцев. Поэтому способ Фалеса в указанном виде применим не всегда.

Нетрудно, однако, изменить этот способ так, чтобы можно было пользоваться любой тенью, какой бы длины она ни была. Измерив, кроме того, и свою тень или тень какого-нибудь шеста, вычисляют искомую высоту из пропорции (см. рис. 2):

$$AB : ab = BC : bc,$$

то есть высота дерева во столько же раз больше вашей собственной высоты (или высоты шеста), во сколько раз тень дерева длиннее вашей тени (или тени шеста). Это вытекает, конечно, из геометрического подобия треугольников ABC и abc (по двум углам).

Иные читатели возразят, пожалуй, что столь элементарный прием не нуждается вовсе в геометрическом обосновании: неужели и без геометрии не ясно, что во сколько раз дерево выше, во столько раз и тень его длиннее. Дело, однако, не так просто, как кажется. Попробуйте применить это правило к теням, отбрасываемым при свете уличного фонаря или комнатной лампы, — оно не

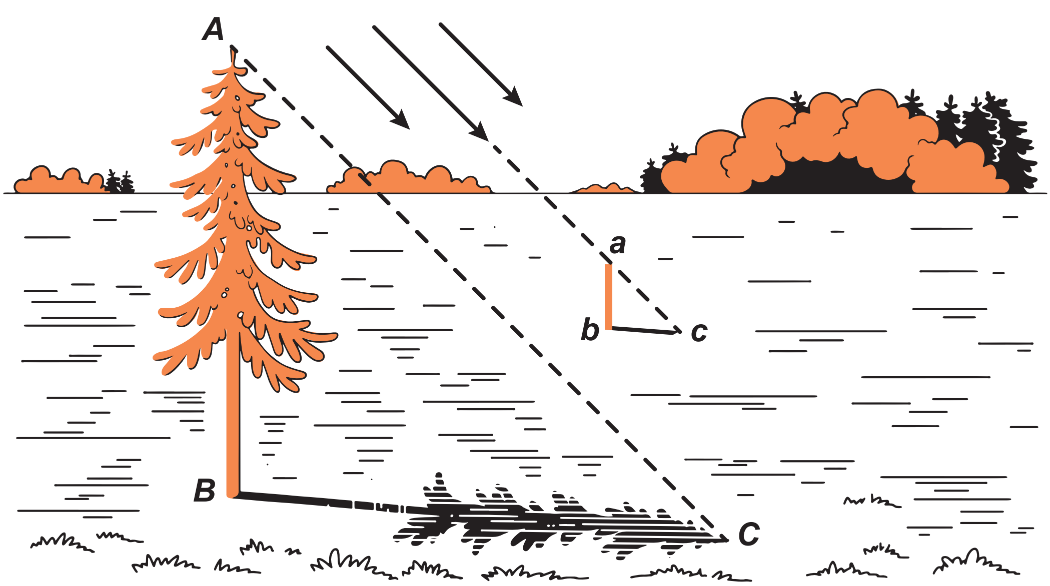

Рис. 2. Высота дерева по длине тени

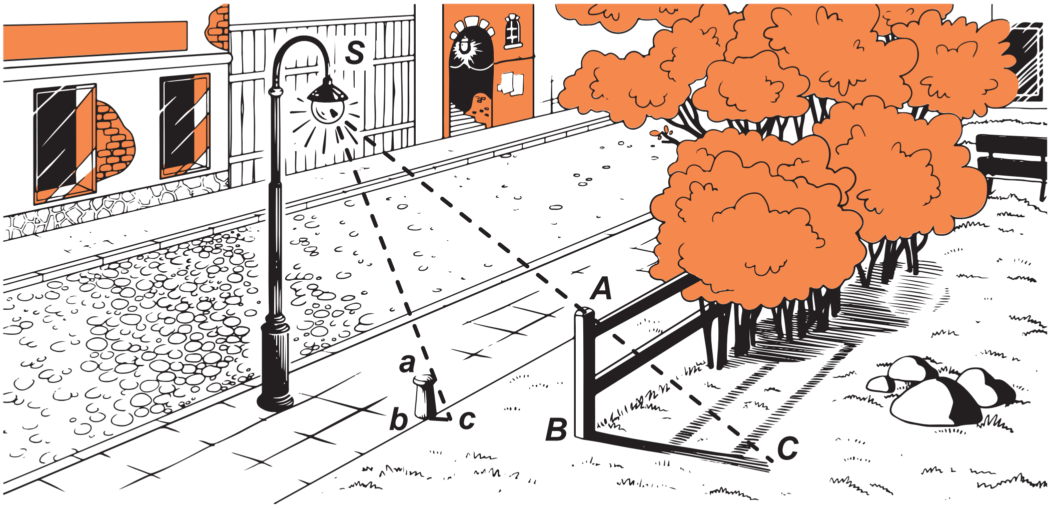

Рис. 3. Тени при свете фонаря

оправдается. На рисунке 3 вы видите, что столбик AB выше тумбы ab примерно втрое, а тень столбика больше тени тумбы ($BC : bc$) раз в восемь. Здесь треугольники ABC и abc не подобны, как было в случае солнечных лучей. Объяснить, почему в одном случае способ применим, а в другом — нет, невозможно без геометрии.

Задача № 1

Рассмотрим поближе, в чем тут разница. Суть дела сводится к тому, что солнечные лучи между собою параллельны, лучи же фонаря — непараллельны. Последнее очевидно; но почему мы вправе считать лучи солнца параллельными, хотя все они безусловно пересекаются в том месте, откуда исходят?

Решение

Лучи Солнца, падающие на Землю, мы можем считать параллельными потому, что угол между ними чрезвычайно мал, практически равен нулю. Несложный геометрический расчет убедит вас в этом. Вообразим два луча, исходящие из какой-нибудь точки Солнца и падающие на Землю в расстоянии, скажем, одного километра друг от друга. Значит, если бы мы поставили одну ножку циркуля в эту точку Солнца, а другою описали окружность на расстоянии Земли, то между нашими двумя лучами-радиусами оказалась бы дуга в один километр длиной. Полная длина этой исполинской окружности была бы равна $2\pi \times 150\,000\,000 = 942\,500\,000$ километров[1]. Один градус ее, конечно, в 360 раз меньше, то есть около 2 610 000 км; одна дуговая минута — в 60 раз меньше градуса, то есть равна 43 500 км, а одна дуговая секунда — еще в 60 раз меньше: 725 км. Но наша дуга имеет в длину всего только 1 км; значит, она соответствует углу в $^1\!/_{725}$ секунды. Такой ничтожный угол неуловим даже для точнейших астрономических инструментов, и, следовательно, мы на практике можем считать лучи Солнца, падающие на Землю, за параллельные прямые.

Если бы эти геометрические соображения были нам неизвестны, мы не могли бы обосновать рассматриваемый способ определения высоты по тени.

Пробуя применять способ теней на практике, вы сразу же убедитесь, однако, что нельзя получить с его помощью вполне надежного результата. Тени не отграничены так отчетливо, чтобы измерение их длины можно было выполнить вполне точно. Каждая тень, отбрасываемая при свете Солнца, имеет неясно очерченную серую кайму полутени, которая и придает границе тени неопределенность. Происходит это оттого, что Солнце — не точка, а целое светящееся тело, испускающее лучи из многих точек. На рисунке 4 показано, почему вследствие этого тень *BC* дерева имеет еще придаток в виде полутени *CD*, постепенно сходящей на нет. Угол *CAD* между крайними границами полутени равен тому углу, под которым мы всегда видим солнечный диск, то есть половине градуса. Ошибка, происходящая оттого, что обе тени измеряются не вполне точно, может при не слишком низком стоянии Солнца достигать 5% и более. Эта ошибка прибавляется к другим неизбежным ошибкам — от неровности

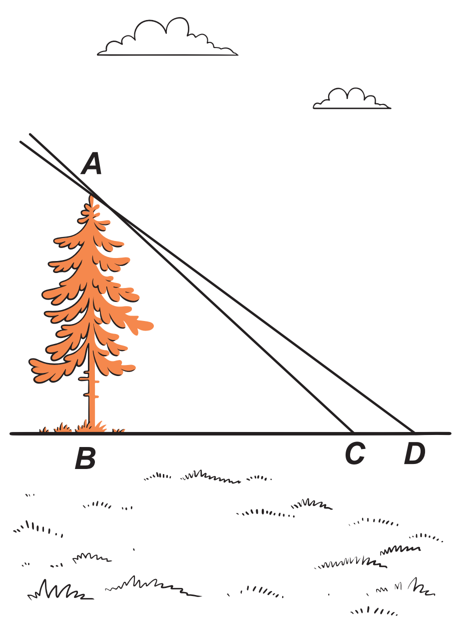

Рис. 4. Тень при свете Солнца

[1] Расстояние от Земли до Солнца — 150 000 000 км.

почвы и т. д. — и делает окончательный результат мало надежным. В местности гористой, например, способ этот совершенно неприменим.

ЕЩЕ ДВА СПОСОБА

Однако вполне возможно обойтись при измерении высоты без помощи теней. Таких способов много; начнем с двух простейших.

Прежде всего мы можем воспользоваться свойством равнобедренного прямоугольного треугольника, обратившись к услугам весьма простого прибора, который легко изготовить из дощечки и трех булавок. На дощечке любой формы, даже на куске коры, если у него есть плоская сторона, намечают три точки — вершины равнобедренного прямоугольного треугольника — и в этих точках втыкают торчком по булавке (рис. 5). У вас нет под рукой чертежного треугольника для построения прямого угла и циркуля для отложения равных сторон? Перегните тогда любой лоскут бумаги один раз, а затем поперек первого сгиба еще раз так, чтобы обе части первого сгиба совпали, — и получите прямой угол. Та же бумажка пригодится и вместо циркуля, чтобы отметить равные расстояния. Как видите, прибор может быть целиком изготовлен в бивуачной[1] обстановке.

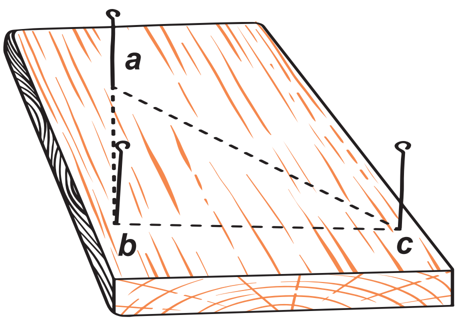

Рис. 5. Булавочный прибор

Обращение с ним не сложнее изготовления. Отойдя немного от измеряемого дерева, вы держите прибор так, чтобы один из катетов треугольника был направлен отвесно, для чего можете воспользоваться ниточкой с грузиком, привязанной к верхней булавке. Приближаясь к дереву или удаляясь от него, вы всегда найдете такое место A (рис. 6), из которого, глядя на булавки a и c, увидите, что они покрывают верхушку C дерева: это значит, что продолжение гипотенузы ac проходит через точку C. Тогда, очевидно, расстояние aB равно CB, так как угол $a = 45°$.

[1] То есть в походе, на привале. — *Примеч. ред.*

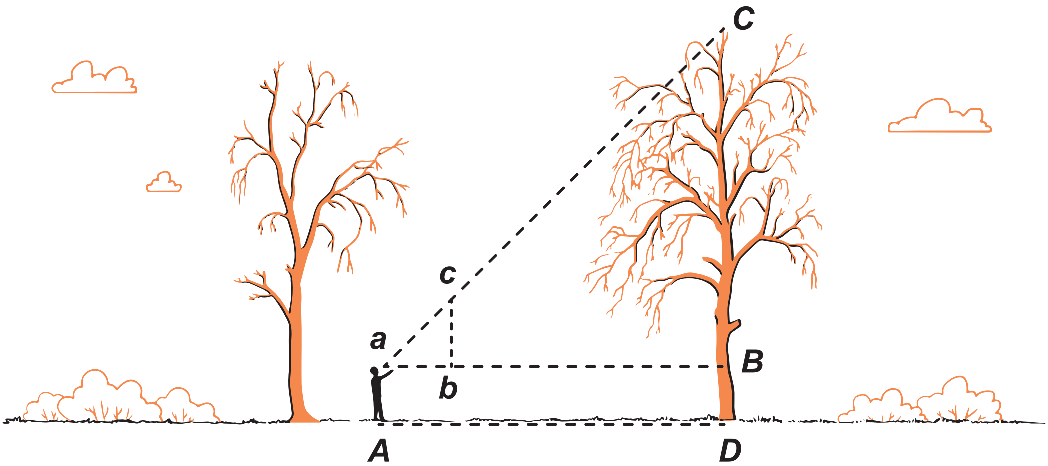

Рис. 6. Измерение высоты булавочным прибором

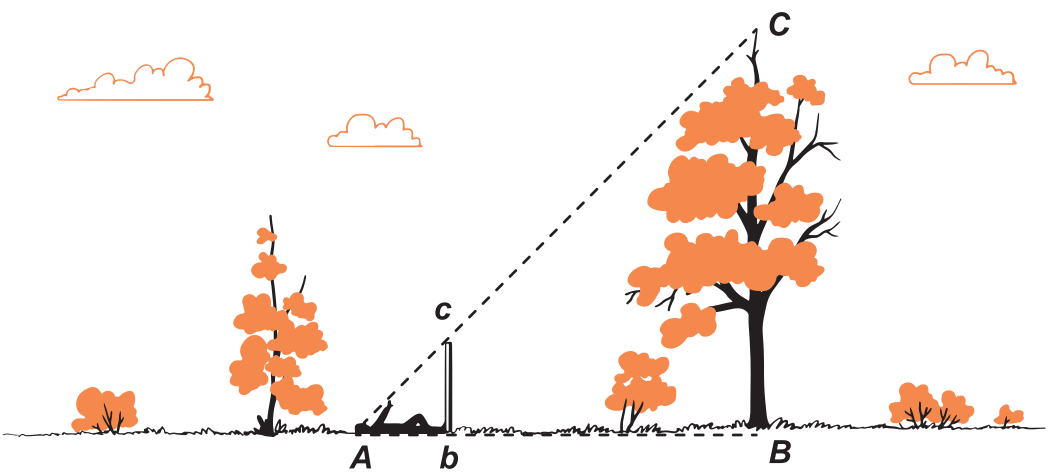

Рис. 7. Измерение высоты с шестом

Следовательно, измерив расстояние aB (или, на ровном месте, одинаковое с ним расстояние AD) и прибавив BD, то есть высоту глаза над землей, — получите искомую высоту дерева.

По другому способу вы обходитесь даже и без булавочного прибора. Зато здесь нужен шест, который вам придется воткнуть отвесно в землю так, чтобы выступающая часть как раз равнялась вашему росту[1]. Место для шеста надо выбрать так, чтобы

[1] Точнее, расстоянию от подошвы до глаз.

лежа, как показано на рисунке 7, вы видели верхушку дерева на одной прямой линии с верхней точкой шеста. Так как треугольник Abc — равнобедренный и прямоугольный, то угол $A = 45°$, и, следовательно, $AB = BC$, то есть искомой высоте дерева.

ПО СПОСОБУ ЖЮЛЯ ВЕРНА

Следующий, тоже весьма несложный способ измерения высоких предметов очень наглядно описан у Жюля Верна в известном романе «Таинственный остров».

— Сегодня нам надо измерить высоту площадки Далекого Вида, — сказал инженер.

— Вам понадобится для этого инструмент? — спросил Герберт.

— Нет, не понадобится. Мы будем действовать несколько иначе, но прибегнем к не менее простому и точному способу.

Юноша, стараясь научиться возможно большему, последовал за инженером, который спустился с гранитной стены до окраины берега.

Взяв прямой шест, футов 12 длиной, инженер измерил его возможно точнее, сравнивая со своим ростом, который был ему хорошо известен. Герберт же нес за ним отвес, врученный ему инженером: просто камень, привязанный к концу веревки.

Не доходя футов 500 до гранитной стены, поднимавшейся отвесно, инженер воткнул шест фута на 2 в песок и, прочно укрепив его, поставил вертикально с помощью отвеса.

Затем он отошел от шеста на такое расстояние, чтобы, лежа на песке, можно было на одной прямой линии видеть и конец шеста, и край гребня (рис. 8). Эту точку он тщательно наметил колышком.

— Тебе знакомы начатки геометрии? — спросил он Герберта, поднимаясь с земли.

— Да.

— Помнишь свойства подобных треугольников?

— Их соответственные стороны пропорциональны.

— Правильно. Так вот: сейчас я построю два подобных прямоугольных треугольника. У меньшего одним катетом будет отвесный шест, другим — расстояние от колышка до основания шеста; гипотенуза же — мой луч зрения. У другого треугольника катетами будут:

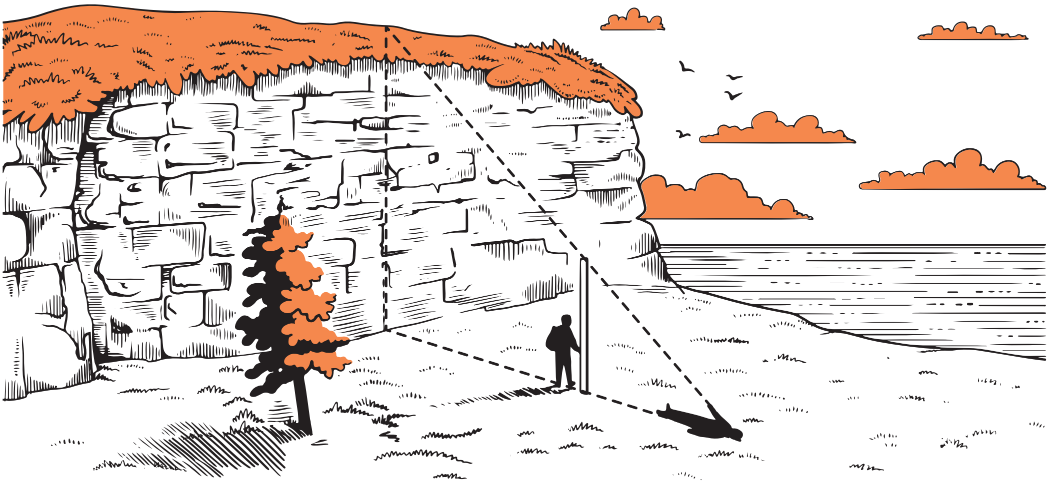

Рис. 8. Измерение высоты по способу Жюля Верна

отвесная стена, высоту которой мы хотим определить, и расстояние от колышка до основания этой стены; гипотенуза же — мой луч зрения, совпадающий с направлением гипотенузы первого треугольника.

— Понял! — воскликнул юноша. — Расстояние от колышка до шеста так относится к расстоянию от колышка до основания стены, как высота шеста к высоте этой стены.

— Да. И, следовательно, если мы измерим два первых расстояния, то, зная высоту шеста, сможем вычислить четвертый, неизвестный член этой пропорции, то есть высоту стены. Мы обойдемся, таким образом, без непосредственного измерения этой высоты.

Оба горизонтальные расстояния были измерены: меньшее равнялось 15 футам, большее — 500 футам.

По окончании измерений инженер составил следующую пропорцию:

$$15 : 500 = 10 : x$$

$$500 \times 10 = 5000$$

$$5000 : 15 = 333{,}3.$$

Значит, высота гранитной стены равнялась 333 футам.

* * *

Этот способ, как и предыдущий, неудобен тем, что при пользовании им приходится ложиться на землю. Но вот видоизменение, свободное от такого неудобства. Запасшись шестом выше человеческого роста, втыкают его отвесно на некотором расстоянии от измеряемого дерева (рис. 9). Отойдя от шеста назад, по продолжению прямой Dd, находят такую точку A, из которой, глядя на вершину дерева, видят на одной линии с ней и верхнюю точку b шеста. При этом замечают (здесь нужны услуги помощника) точки c и C, в которых горизонтальная прямая, проходящая через a, встречает шест и ствол; помощник делает в этих местах пометки, — и измерение окончено. Теперь остается только, на основании подобия треугольников abc и aBC, вычислить BC из пропорции:

$$BC : bc = aC : ac,$$

откуда:

$$BC = bc \cdot \frac{aC}{ac}.$$

Расстояния bc, aC и ac легко измерить непосредственно. К полученной величине BC нужно прибавить расстояние CD (которое также измеряется непосредственно), чтобы узнать искомую высоту дерева.

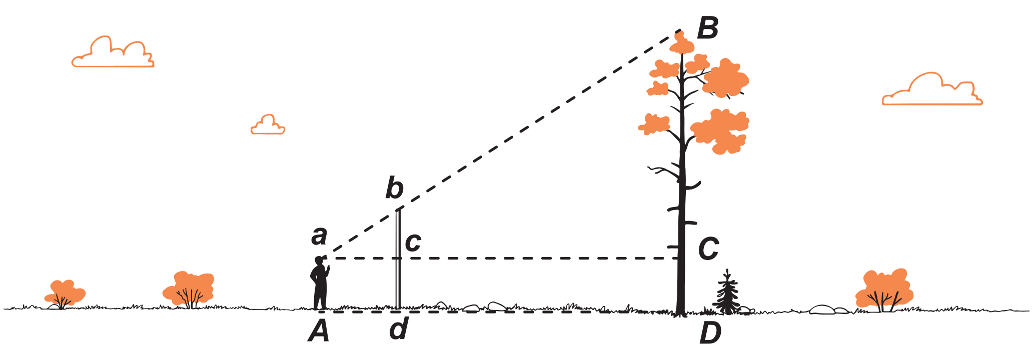

Рис. 9. Видоизменение способа Жюля Верна

С ПОМОЩЬЮ ЗАПИСНОЙ КНИЖКИ

В качестве прибора для приблизительной оценки недоступной высоты вы можете использовать и свою карманную записную книжку, если она снабжена карандашом, всунутым в чехлик или петельку при книжке. Она поможет вам построить в пространстве те два подобных треугольника, из которых получается искомая высота. Книжку надо держать возле глаза так, как показано на упрощенном рисунке 10. Она должна находиться в отвесной плоскости, а карандаш выдвигается над верхним обрезом книжки настолько, чтобы, глядя из точки a, видеть вершину B дерева покрытой кончиком b карандаша. Тогда, вследствие подобия треугольников abc и aBC, высота BC определится из пропорции:

$$BC : bc = aC : ac.$$

Расстояния bc, ac и aC измеряются непосредственно. К полученной величине BC надо прибавить еще длину CD, то есть — на ровном месте — высоту глаза над почвой.

Так как ширина ac книжки неизменна, то, если вы будете всегда становиться на одном и том же расстоянии от измеряемого дерева (например, в 10 м), высота дерева будет зависеть только от выдвинутой части bc карандаша. Поэтому вы можете заранее вычислить, какая высота соответствует тому или иному выдвижению, и нанести эти числа на карандаш.

Ваша записная книжка превратится тогда в упрощенный высотомер, так как вы сможете с помощью нее определять высоты сразу, без вычислений.

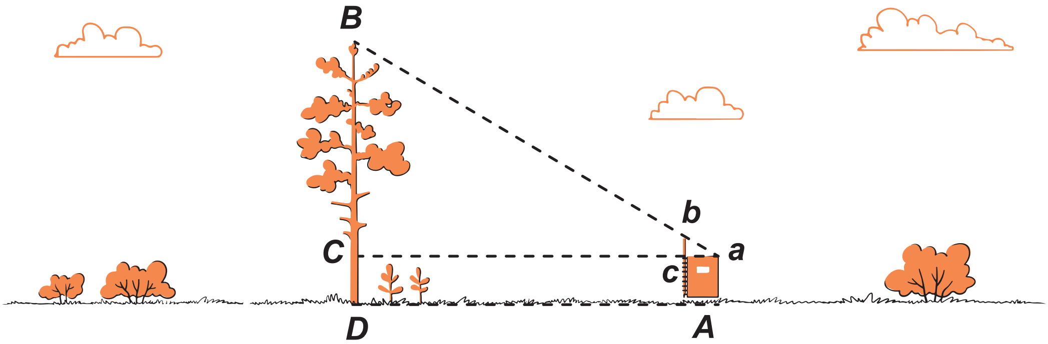

Рис. 10. Измерение высоты с помощью записной книжки

НЕ ПРИБЛИЖАЯСЬ К ДЕРЕВУ

Случается, что почему-либо неудобно подойти вплотную к основанию измеряемого дерева. Можно ли и в таком случае определить его высоту?

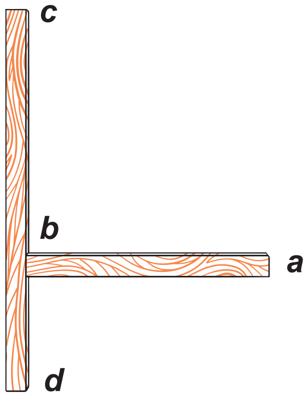

Рис. 11. Простой прибор

Вполне возможно. Для этого придуман даже очень остроумный прибор, который, как и предыдущие, легко изготовить самому. Две планки ab и cd (рис. 11) скрепляются под прямым углом так, чтобы ab равнялось bc, а bd составляло половину ab. Вот и весь прибор. Чтобы измерить им высоту, держат его в руках, направив планку cd вертикально (для чего на ней имеется отвес — шнурок с грузиком), и становятся последовательно в двух местах: сначала (рис. 12) в точке A, где располагают прибор концом c вверх, а затем в точке A' подальше, где прибор держат вверх концом d. Точка A избирается так, чтобы, глядя из a на конец c, видеть его на одной прямой с верхушкой дерева. Точку же A' отыскивают так, чтобы, глядя из a' на точку d', видеть ее совпадающей с B. В нахождении этих двух точек A и A'[1] заключается все измерение, потому что искомая высота дерева BC равна расстоянию AA'. Равенство это вытекает, как легко сообразить, из того, что $aC = BC$, а $a'C = 2BC$; значит,

$$a'C - aC = BC.$$

Вы видите, что, пользуясь этим простым прибором, мы измеряем дерево, не подходя к его основанию ближе его высоты. Само собой разумеется, что если подойти к ство-

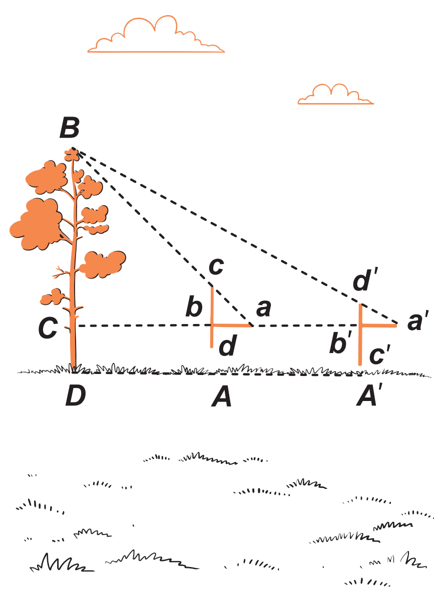

Рис. 12. Измерение высоты

[1] Точки эти непременно должны лежать на одной прямой с основанием дерева.

лу возможно, то достаточно найти только одну из точек — A или A', чтобы узнать его высоту.

Вместо двух планок, которые предлагает французский изобретатель этого прибора, можно воспользоваться четырьмя булавками, разместив их на дощечке надлежащим образом: в таком виде «прибор» еще проще и портативнее.

ВЫСОТОМЕР ЛЕСОВОДОВ

Пора объяснить теперь, как устроены «настоящие» высотомеры, которыми пользуются на практике работники леса. Опишу один из подобных высотомеров, несколько изменив его так, чтобы легко было изготовить его самому. Сущность устройства видна из рисунка 13. Картонный или деревянный прямоугольник $abcd$ держат в руках так, чтобы, глядя вдоль края ab, видеть на одной линии с ним вершину B дерева. В точке b привешен на нити грузик q. Замечают точку n, в которой нить пересекает линию dc. Треугольники bBC и bnc подобны, так как оба прямоугольные и имеют равные острые углы bBC и bnc (с взаимно-перпендикулярными сторонами). Значит, мы вправе написать пропорцию:

$$BC : nc = bC : bc,$$

отсюда

$$BC = bC \cdot \frac{nc}{bc}.$$

Так как bC, nc и bc можно измерить непосредственно, то легко получить искомую высоту дерева, прибавив длину нижней части CD ствола (высоту прибора над почвой).

Остается добавить несколько подробностей. Если край bc дощечки сделать, например, ровно в 10 см, а на краю dc нанести сантиметровые деления, то отношение будет всегда выражаться в виде десятичной дроби, прямо

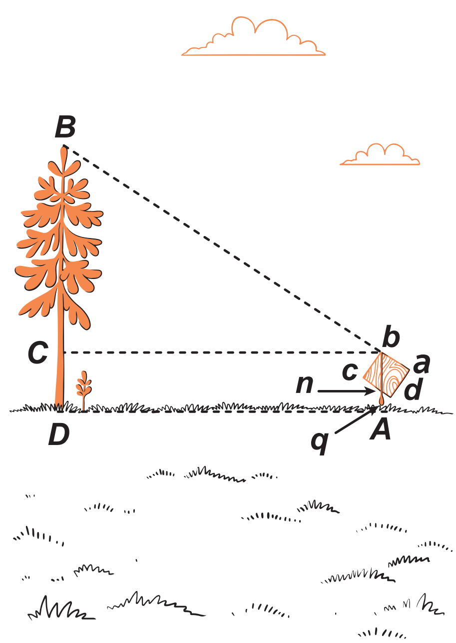

Рис. 13. Высотомер лесоводов

указывающей, какую долю расстояния bC составляет высота BC дерева. Пусть, например, нить остановилась против седьмого деления (то есть nc = 7 см); это значит, что высота дерева над уровнем глаза составляет 0,7 расстояния наблюдателя от ствола.

Второе улучшение относится к способу наблюдения: чтобы удобно было смотреть вдоль линии ab, можно отогнуть у верхних углов картонного прямоугольника два квадратика с просверленными в них дырочками: одной поменьше — у глаза, другой побольше — для наведения на верхушку дерева (рис. 14).

В результате у нас получится прибор, изображенный почти в натуральную величину на рисунке 14. Изготовить его в таком виде легко и недолго; для этого не требуется особенного умения мастерить. Занимая в кармане немного места, он доставит вам возможность во время экскурсии быстро определять высоты встречных предметов — деревьев, столбов, зданий и т. п.

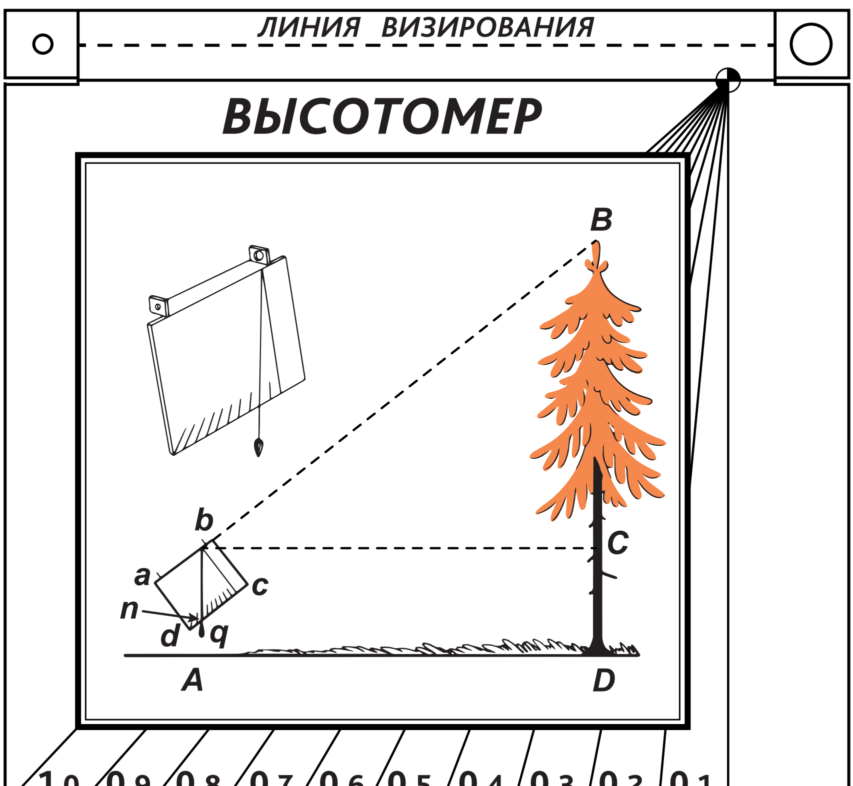

Рис. 14. Прибор для определения высоты деревьев
(в рамке пояснен способ употребления)

Задача № 2

Можно ли описанным сейчас высотомером измерять деревья, к которым нельзя подойти вплотную? Если можно, то как следует в таких случаях поступать?

Решение

Надо направить прибор на вершину B дерева (рис. 15) с двух точек A и A'. Пусть в A мы определили, что $BC = 0{,}9AC$, а в точке A' — что $BC = 0{,}4A'C$. Тогда мы знаем, что

$$AC = \frac{BC}{0{,}9}; \qquad A'C = \frac{BC}{0{,}4},$$

откуда

$$AA' = A'C - AC = \frac{BC}{0{,}4} - \frac{BC}{0{,}9} = \frac{0{,}9BC - 0{,}4BC}{0{,}36} = \frac{50}{36}BC.$$

Итак,

$$AA' = \frac{25}{18}BC, \text{ или } BC = \frac{18}{25}A'A = 0{,}72A'A.$$

Вы видите, что, измерив расстояние $A'A$ между обоими местами наблюдения и взяв определенную долю этой величины, мы узнаем искомую недоступную и неприступную высоту.

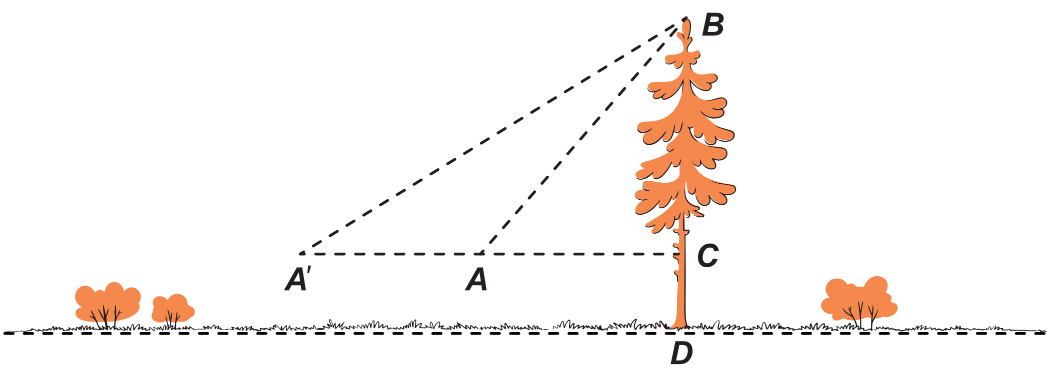

Рис. 15. Измерение дерева высотомером

С ПОМОЩЬЮ ЗЕРКАЛА

Задача № 3

Вот еще один своеобразный способ определения высоты дерева — с помощью зеркала. На некотором расстоянии (рис. 16) от измеряемого дерева, на ровной земле, в точке C кладут горизонтально зеркальце и отходят от него назад в такую точку D, стоя в которой наблюдатель видит в зеркале верхушку A дерева. Тогда дерево (AB) во столько раз выше роста наблюдателя (ED), во сколько раз расстояние BC от зеркала до дерева больше расстояния CD от зеркала до наблюдателя. Почему?

Решение

Способ основан на законе отражения света. Вершина A (рис. 17) отражается в точке A' так, что $AB = A'B$. Из подобия же треугольников BCA' и CED следует, что

$$A'B : ED = BC : CD.$$

В этой пропорции остается лишь заменить $A'B$ равным ему AB, чтобы обосновать указанное в задаче соотношение.

Этот удобный и нехлопотливый способ можно применять во всякую погоду, однако не в густом насаждении, а к одиноко стоящему дереву. Читатель сам догадается, как пользоваться им в тех случаях, когда нельзя приблизиться к дереву вплотную.

Рис. 16. Измерение высоты с помощью зеркала

Прежде чем покончить беседу об измерении высоты деревьев, предложу читателю еще одну «лесную» задачу.

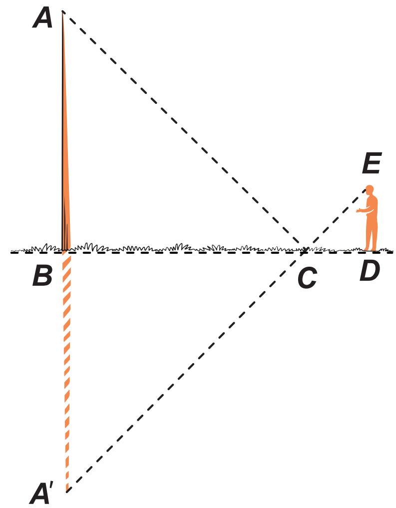

Рис. 17. Отражение света

ДВЕ СОСНЫ

Задача № 4

В 40 м одна от другой растут две сосны. Вы измерили их высоту: одна оказалась в 31 м высотой, другая, молодая, — всего 6 м.

Можете ли вы вычислить, как велико расстояние между их верхушками?

Решение

Искомое расстояние AB (рис. 18), по теореме Пифагора, равно

$$\sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{40^2 + 25^2} = 47{,}2.$$

Между верхушками сосен 47,2 м.

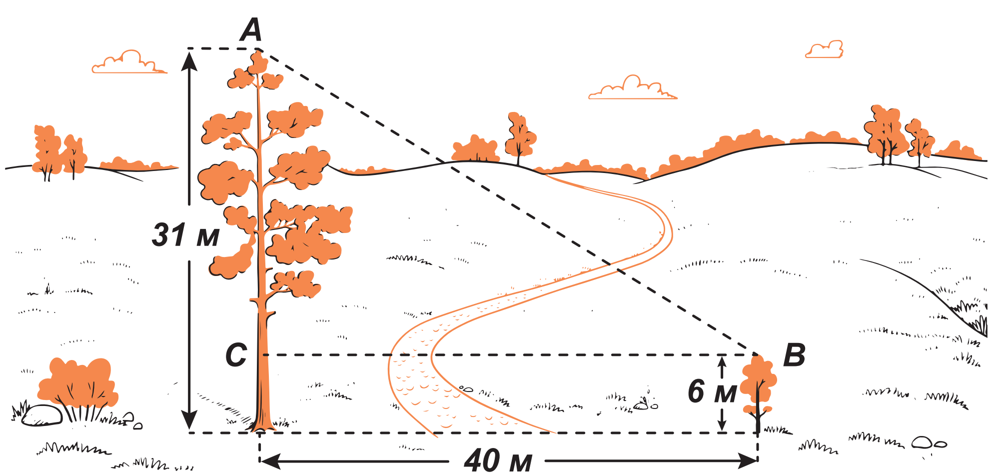

Рис. 18. Расстояние между верхушками

ФОРМА ДРЕВЕСНОГО СТВОЛА

Теперь вы можете уже, прогуливаясь по лесу, определить — чуть не полудюжиной различных способов — высоту любого дерева. Вам интересно будет, вероятно, определить также и его объем, вычислить, сколько в нем кубических метров древесины, а заодно и взвесить его, — узнать, можно ли было бы, например, увезти такой ствол на крестьянской телеге. Однако эта задача уже не столь проста, как определение высоты; специалисты еще не нашли способов точного ее разрешения и довольствуются лишь более или менее приближенной оценкой. Даже и для срубленного ствола, который лежит перед вами, очищенный от сучьев, задача разрешается далеко не просто. Дело в том, что древесный ствол, самый ровный и тонкий, не представляет собою ни цилиндра, ни полного конуса, ни усеченного конуса, ни какого-либо другого геометрического тела, объем которого мы умеем вычислять по формуле. Ствол, конечно, не цилиндр, — он суживается к вершине (имеет «сбег», как говорят лесоводы); но и не конус, потому что его «образующая» не прямая линия, а кривая, и притом не дуга окружности, а некоторая другая кривая, обращенная выпуклостью к оси дерева[1].

Поэтому более или менее точное вычисление объема древесного ствола выполнимо лишь средствами так называемой высшей математики. Иным читателям покажется, быть может, странным, что для измерения простого бревна приходится обращаться к услугам высшей математики. Многие думают, что высшая математика имеет отношение только к каким-то особенным предметам, в обиходной же жизни всегда применима лишь математика элементарная. Это совершенно не верно: можно довольно точно вычислить объем планеты, пользуясь элементами геометрии, между тем как точный расчет объема длинного бревна или пивной бочки невозможен без аналитической геометрии и интегрального исчисления.

Но наша книга не предполагает у читателей знакомства с высшей математикой; придется поэтому удовлетвориться здесь

[1] Всего ближе кривая эта подходит к так называемой полукубической параболе ($y^2 = ax^3$); тело, полученное вращением этой параболы, называется нейлоидом (по имени старинного английского математика Нейля, нашедшего способ определять длину дуги такой кривой). Ствол выросшего в лесу дерева по форме приближается к нейлоиду. Вычисление объема нейлоида выполняется приемами высшей математики.

лишь приблизительным вычислением объема ствола. Будем исходить из того, что объем ствола более или менее близок либо к объему усеченного конуса, либо — для ствола с вершинным концом — к объему полного конуса, либо, наконец, — для коротких бревен — к объему цилиндра. Объем каждого из этих трех тел легко вычислить. Но нельзя ли для однообразия расчета найти такую формулу объема, которая годилась бы сразу для всех трех названных тел? Тогда мы приближенно вычисляли бы объем ствола, не интересуясь тем, на что он больше похож — на цилиндр или на конус, полный или усеченный.

УНИВЕРСАЛЬНАЯ ФОРМУЛА

Такая формула существует; более того, она пригодна не только для цилиндра, полного конуса и усеченного конуса, но также и для всякого рода призм, пирамид, полных и усеченных, и даже для шара. Вот эта замечательная формула, известная в математике под названием формулы Симпсона:

$$V = \frac{h}{6}(b_1 + 4b_2 + b_3).$$

в которой:

h — высота тела,
b_1 — площадь нижнего основания,
b_2 — площадь среднего[1] основания,
b_3 — площадь верхнего основания.

Задача № 5

Как доказать, что по приведенной сейчас формуле можно вычислять объем следующих семи геометрических тел:

- призмы,
- цилиндра,
- пирамиды полной,
- конуса полного,
- пирамиды усеченной,
- конуса усеченного,
- шара?

[1] То есть площадь сечения тела по середине его высоты.