## МАТЕМАТИКА ПОВСЮДУ, ТАМ, ГДЕ ЕЕ СОВСЕМ НЕ ЖДЕШЬ

*(приветствие читателю)*

Мой вузовский преподаватель алгебры часто шутил: лучшее наглядное пособие, помогающее донести многие идеи далекому от математики человеку, — обыкновенные рубли. Геометру подходящим пособием послужит едва ли не любой предмет из тех, что имеется под рукой. Даже обычный кирпич — и тот может стать источником вдохновения. Рассуждать о линиях и формах, размерах, пропорциях и преобразованиях фигур с одинаковым успехом можно и любуясь узорчатыми витражами, и делая бутерброды на завтрак. С этого когда-то начинал Мауриц Эшер — популярный нидерландский художник-график, любимец математиков, знаменитый своими орнаментами, созданными по строгим законам симметрии. Этой темой он увлекся в молодости, поддавшись очарованию мозаик в мавританском дворце Альгамбра в Испании. А еще в детстве Эшер любил выкладывать «идеальные бутерброды» из кусочков сыра и колбасы, тщательно подгоняя их друг к другу.

Элементарная математика в своей прикладной ипостаси — наука повседневная и полезна в той мере, в какой востребована. С арифметикой и геометрией мы сталкиваемся буквально на каждом шагу, главное — почаще смотреть под ноги и не отвлекаться по сторонам. И нет иной такой науки, в которой можно практиковаться, не отрываясь от других дел или любимых занятий. Было бы желание, а возможность всегда найдется! Вам ведь невдомек, что математика обеспечит любого отборной пищей для ума и позволит легко, почти даром совместить приятное с полезным? Перечитывая классиков. Разглядывая старинные гравюры. Наряжая новогоднюю елку. Готовя блюда из картошки. И даже пришивая пуговицу. Вариантов масса, подберем на любой вкус. Да можно просто прикорнуть в уютном кресле, вытянуть ноги и, как Шерлок Холмс, не выходя из комнаты, начать распутывать клубок, дергая за разные ниточки, складывать из разрозненных кусочков пазл или размышлять над хитрой головоломкой.

В моей картотеке нематематиков разных эпох — тех, кто трудился в интересах и на пользу «царице наук», ее любил, ценил, осваивал или прибегал к ее услугам, не преминул уважить и упомянуть при случае, — есть и ученые, и философы, и музыканты, и политики, и педагоги, и популяризаторы науки. А знаете, кого в ней больше всего? Людей искусства: писателей, поэтов, художников, архитекторов, и все как один — известные особы. Мы заглянем в некоторые «личные дела». Побываем на уроке арифметики у Шекспира, поломаем голову над одной из загадок Пушкина, посмотрим, как Лев

Толстой всех к геометрии приобщал, исследуем вдоль и поперек квадрат Дюрера, изучим один из рисунков Леонардо да Винчи, выясним, чем привлекла Моцарта игра в кости и при чём здесь математика, разузнаем всё о любимом числе Платона, поищем выход из лабиринта Энде и поиграем в прятки с Льюисом Кэрроллом. Эти и другие знаменитости составят нам отличную компанию.

К ним присоединятся ученые разного ранга, кто занимался чистой наукой — теоретической математикой. Во все времена это был удел немногих, если не сказать избранных. Впрочем, ничто не мешало им иногда отвлекаться на разного рода прикладные задачи. Вы спросите, кто же все эти люди? Большинство математиков — Сальери, поверяющие алгеброй гармонию, труженики науки. Но встречаются и Моцарты — подлинные гении и творцы математики, те, кто был на передовой и прокладывал дорогу другим. Среди них светила первой величины Архимед и Гаусс. Таких ученых отличали не только полная свобода мысли и способность видеть дальше и глубже остальных, но и поразительное, невероятной силы воображение. Французский философ-просветитель, писатель и поэт Вольтер не без основания утверждал, что «воображения в голове Архимеда было гораздо больше, чем в голове Гомера». Знаменитая задача сиракузца об исчислении песчинок — лучшее тому подтверждение. Что уж говорить о Гауссе, который еще в юности пришел к мысли о возможности существования неевклидовой геометрии!

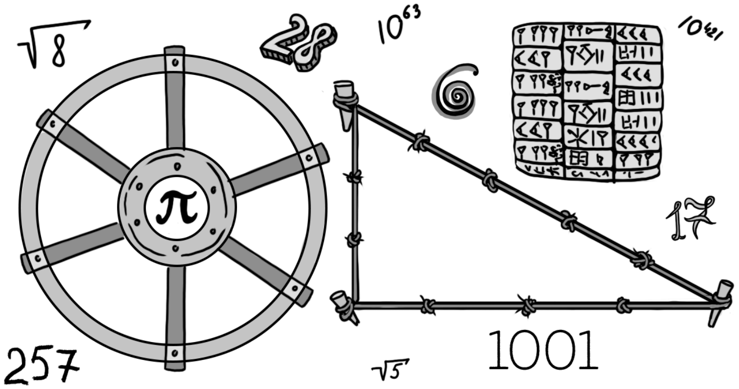
Математик, подобно художнику и поэту, создает узоры, только не из форм и цветов, как это делает первый, и не из слов, как привык второй, а из идей, считал английский математик Годфри Харди. Самые удивительные, красивые и долговечные узоры плетутся творцами науки. Но куда интереснее не просто рассмотреть готовые плетения под микроскопом, а понаблюдать за их рождением и метаморфозами, чтобы однажды восторженно воскликнуть: «Так вот откуда ноги растут! Гениально придумано!» Ничто так не помогает легко и быстро окунуться в мир математики, как ее многовековая история. И первым, с чем вы встретитесь в этом безграничном мире абстракций и идей, будут числа. Так что рассказы о них по праву открывают данный сборник. Героями историй будут не только знаковые для математиков числа с яркими биографиями, редкими свойствами и собственными названиями, но и знаменитости, чьи имена оказались прочно связаны с конкретными числами, нередко ими же самими выбранными.

А теперь устраивайтесь поудобнее, приготовьтесь не только внимать и поглощать, но и кумекать, и смекать. Мы начинаем погружение!

*Н. К., декабрь 2023 года*

## Часть первая, эпическая

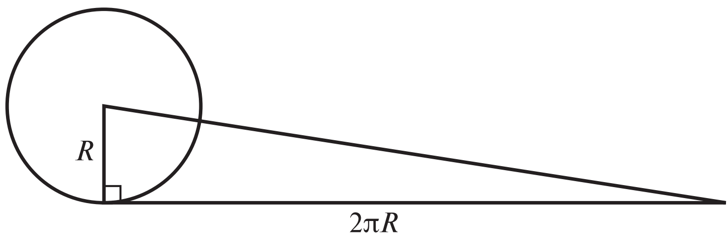
# Знаменитости в мире чисел



## БЕСКОНЕЧНАЯ ИСТОРИЯ: В ПОГОНЕ ЗА π

Самая популярная математическая константа — число π, выражающее отношение длины окружности к диаметру. История ее неразрывно связана с историей квадратуры круга — задачей на построение квадрата, равновеликого данному кругу, известной со времен древних греков. Делать это следовало с помощью циркуля и линейки. Обманчиво простая задача оказалась «крепким орешком» и для ученых, и для многочисленных любителей геометрии.

Еще в III веке до н. э. Архимед строго доказал, что круг имеет такую же площадь, что и прямоугольный треугольник, один катет которого равен радиусу, а другой — спрямленной окружности, границе круга. Тем самым квадратура круга свелась к построению отрезка длиной $2\pi R$. Казалось бы, всё просто. Сумей геометры построить отрезок длиной π — и задача была бы решена. Прошло более двух тысячелетий, прежде чем удалось доказать, что это невозможно, любые попытки квадрировать круг тщетны.




*Спрямление окружности по Архимеду*

В геометрии циркуля и линейки всякое число $a$, которое можно построить, представив как отрезок длиной $a$, обязательно алгебраическое, то есть является корнем многочлена с целыми коэффициентами. Простой пример: $\sqrt{2}$ — корень уравнения $x^2 = 2$ — это диагональ квадрата со стороной, равной 1. Оказалось, что π таким свойством не обладает и имеет иную природу. Это число не алгебраическое, а трансцендентное[1].

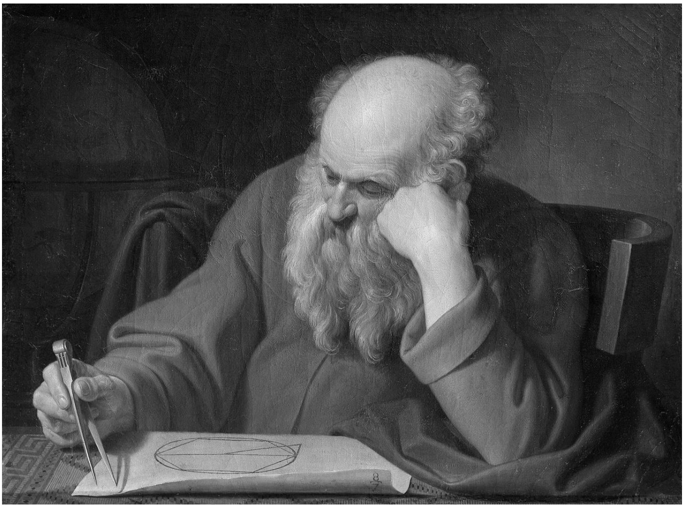
История квадратуры круга полна заблуждений и ошибок. Одна из самых ярких ее страниц связана

[1] От лат. transcendere — превосходить, переступать. Термин ввел еще в XVIII веке Леонард Эйлер, а существование таких чисел установил только в 1840 году Жозеф Лиувилль. Трансцендентность π доказал в 1882 году Фердинанд Линдеман.

с попытками определить $\pi$ как можно точнее. Первые оценки были, конечно, грубыми. Вавилоняне, например, за длину окружности принимали ее утроенный диаметр и на практике пользовались значением $\pi = 3$. Да и само оно было найдено эмпирически (наиболее древние упоминания о длине окружности встречаются в связи с измерением обхвата строительного дерева). Египтяне заменили круг квадратом со стороной, равной $\frac{8}{9}$ диаметра круга, и нашли, что $\pi \approx 3{,}16$.

Начало многовековой гонке вычислений $\pi$ с заданной точностью положил Архимед. Он предложил первый алгоритм для решения этой задачи и получил дробь $\frac{22}{7}$ — приближение $\pi$, позже названное *архимедовым числом*. Так знаменитая константа обрела первые три верных знака в привычной для нас десятичной записи: $\pi \approx 3{,}14$. Это значение и сегодня используется на практике при несложных расчетах или прикидке результата.

Идея решения была в том, чтобы заключить окружность между вписанными и описанными правильными многоугольниками и, удваивая каждый раз число их сторон, сблизить две эти «границы». Некоторые восприняли ее буквально и сочли, что Архимед строил $n$-угольники, начиная с $n = 6$, и находил их стороны. На картине итальянского



*Архимед. Джузеппе Мария Соли, 1779 год*

мастера Джузеппе Марии Соли как раз показан первый шаг такого решения.

Но это не более чем фантазия художника. На самом деле ученый ничего не строил: в этом не было необходимости. Он рассматривал задачу на вычисление и оценивал отношения длин отрезков, дойдя до правильного 96-угольника, а для наглядности добавил к своим рассуждениям два простеньких чертежа. Куда важнее другое. Задавшись целью точно измерить круг, Архимед первый поставил и решил эту проблему со всей математической строгостью. Сперва нашел приближение $\pi$, а затем определил длину окружности и площадь круга. Самому методу дали подходящее название: численное спрямление окружности.

Следующее, более точное значение $\pi \approx 3{,}141$ получил только во II веке видный астроном древности Клавдий Птолемей.

Одни ученые ошибочно отождествляли отношение длины окружности к диаметру с рациональным числом, представляли его в виде обыкновенной либо конечной десятичной дроби. Таковых хватало в прежние времена. Вот лишь один пример: в XIV веке английский математик и мыслитель Томас Брадвардин, даже зная архимедову оценку, продолжал утверждать, будто $\pi = \dfrac{22}{7}$.

Другие пытались отыскать как можно больше верных цифр в бесконечной десятичной записи $\pi$. Они всегда преобладали и не перевелись в наши дни. Находились и те, кто переходили из одного лагеря в другой. Так, французский математик и картограф XVI столетия Оронций Финей, большой любитель задач на построение, поначалу считал $\pi \approx \dfrac{245}{78}$, однако позже принял эту дробь за точное значение $\pi$!

Ученые пользовались методом Архимеда до середины XVII века, порой затрачивая на расчеты годы изнурительной работы. Нидерландский математик и вычислитель Лудольф ван Цейлен с помощью $60 \cdot 2^{29}$-угольника (в котором более 32 миллиардов сторон!) определил первые 20 десятичных знаков π, проявив невероятное терпение и настойчивость: на расчеты ушло десять лет. Дружная вереница найденных цифр стала лучшим украшением его портрета.


*Лудольф ван Цейлен. Гравюра Якоба де Гейна Младшего из первого издания трактата Л. Цейлена «О круге», 1596 год*

Свой трактат, изданный в 1596 году, ван Цейлен завершил предложением: «У кого есть охота, пусть пойдет дальше». Желающих, кроме него самого, так и не нашлось. Впоследствии он рассчитал с помощью $2^{62}$-угольника 35 верных цифр π после запятой. Подвиг вычислителя произвел на математиков должное впечатление, с тех пор отношение длины окружности к диаметру стали именовать также *лудольфовым числом*. Ну а современное название константа получила только в начале XVIII столетия[1].

Спустя полвека после исследований ван Цейлена его соотечественник Христиан Гюйгенс довел метод Архимеда до совершенства и повторил результат великого грека, рассмотрев вместо правильного 96-угольника всего лишь 12-угольник. Но к тому времени математики уже стали вычислять π, выражая его через другие числа с помощью формул, на смену классическому геометрическому методу пришел аналитический, затем началась эпоха математического анализа и появились более удобные инструменты для подобных расчетов.

---

[1] Обозначить ее греческой буквой π (первой в слове περιφερεια — окружность, обхват) предложил в 1706 году Уильям Джонс. Широкое распространение этот знак получил позже благодаря Леонарду Эйлеру. Ранее математики использовали другие символы, например π/δ (с буквы δ начинается слово διαμετρος — диаметр, поперечник).

*Джон Валлис. Годфрид Кнеллер, 1701 год*

Иногда результат выглядел на редкость просто и изящно. Так, в 1655 году английский математик Джон Валлис предложил для π удачное «разложение на множители»: представил его половину как бесконечное произведение обыкновенных дробей.

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \ldots$$