Содержание

Предисловие

Авторы данного пособия ставили своей целью помочь абитуриентам, поступающим в 10-й класс Лицея НИУ ВШЭ. Пособие содержит разбор демонстрационных вариантов и задания для самостоятельной подготовки. Часть этих заданий была взята из вариантов прошлых лет. В целом сборник дает понять ожидаемый уровень освоения математики абитуриентами.

Для поступления в Лицей НИУ ВШЭ всем абитуриентам необходимо успешно справиться с задачами по математике 1-го этапа вступительных испытаний. Поступающим на направления «Математика», «Информатика, инженерия и математика» и «Экономика и математика» необходимо продемонстрировать хороший уровень владения математикой в решении задач 2-го этапа вступительных испытаний. Задания для самостоятельного решения содержат задачи для подготовки к обоим этапам вступительных испытаний. Авторы уверены, что владение алгоритмами решения представленных здесь задач может служить хорошим дополнением к глубокому и основательному изучению курса школьной математики.

Выражаем нашу благодарность и признательность В.П. Барашеву, Б.В. Галицкому, В.Н. Деменко, О.А. Евсеевой, А.Б. Зубову, Е.М. Ивениной, А.В. Красинцу, И.А. Миткевич, О.В. Охтеменко, Д.С. Чистякову, Н.А. Шабат, А.В. Цареву, И.Х. Ямалиеву за помощь в подготовке этого пособия, бесценные идеи, замечания и поддержку.

С пожеланиями успехов,
авторы настоящего пособия

Литература, рекомендуемая для подготовки

1. Алгебра. 9-й класс: учебник / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. 14-е изд., стер. М.: Просвещение, 2023.
2. Алгебра. 9-й класс: учебник / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир; под ред. В.Е. Подольского. 8-е изд., стер. М.: Просвещение, 2023.
3. Алгебра. 9-й класс. Углубленный уровень: учебник / А.Г. Мерзляк, В.М. Поляков; под ред. В.Е. Подольского. 8-е изд. М.: Просвещение, 2023.
4. Математика. Геометрия. 7–9-й классы. Базовый уровень: учебник / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. 14-е изд., перераб. М.: Просвещение, 2023.
5. Геометрия. 9-й класс: учебник / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир; под ред. В.Е. Подольского. 8-е изд. М.: Просвещение, 2023.
6. Геометрия. 9-й класс. Углубленный уровень: учебник / А.Г. Мерзляк, В.М. Поляков; под ред. В.Е. Подольского. 6-е изд., стер. М.: Просвещение, 2023.
7. Геометрия. 9-й класс: учебник / В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, В.В. Прасолов; под ред. В.А. Садовничего. 8-е изд., стер. М.: Просвещение, 2022.
8. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. Задачи по математике. Алгебра. М.: Физматлит, 2007.
9. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. М.: Физматлит, 2007.
10. Галицкий М.Л., Гольдман А.М., Звавич Л.И. Сборник задач по алгебре: учеб. пособие для 8–9-го классов с углубленным изучением математики. М.: Просвещение, 2001.
11. Гордин Р.К. Геометрия. Планиметрия. 7–9-й классы. М.: МЦНМО, 2004.
12. Иванов О.А. Практикум по элементарной математике: Алгебро-аналитические методы: учеб. пособие. М.: МЦНМО, 2001.
13. Кравцев С.В., Макаров Ю.Л., Максимов М.И. и др. Методы решения задач по алгебре: от простых до самых сложных. М.: Экзамен, 2001.
14. Олехник С.Н., Потапов М.К., Пасиченко П.И. Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения: справочник. М.: Факториал, 1997.
15. Олехник С.Н., Потапов М.К., Нестеренко Ю.В. Конкурсные задачи по математике: справочное пособие. 3-е изд., стер. М.: Физматлит, 2003.
16. Сергеев И.Н. Математика: задачи с ответами и решениями. М.: КДУ, 2013.
17. Хорошилова Е.В. Элементарная математика: учеб. пособие для старшеклассников и абитуриентов. Часть 1. М.: МГУ, 2020.
18. Хорошилова Е.В. Элементарная математика: учеб. пособие для старшеклассников и абитуриентов. Часть 2. М.: МГУ, 2020.

Структура вступительного экзамена по математике в 10-й класс

Вступительные испытания 1-го этапа проходят все абитуриенты, поступающие в 10-й класс Лицея НИУ ВШЭ. Работа представляет собой тест и состоит из 10 заданий с открытым ответом.

Ответом является целое число или конечная десятичная дробь с 1–2 знаками после запятой. Проверка ответов осуществляется с помощью информационных технологий.

Задания оцениваются по шкале, приведенной в таблице:

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Количество баллов	0,5	1	1	1	1	1	1	1	1	1,5

Вступительные испытания 2-го этапа выполняют только поступающие на направления «Математика», «Информатика, инженерия и математика» и «Экономика и математика» Лицея НИУ ВШЭ. Она состоит из пяти заданий с развернутым ответом. Проверка решений осуществляется по критериям, устанавливаемым приемной комиссией Лицея НИУ ВШЭ.

Задания оцениваются по шкале, приведенной в таблице:

Номер задания	1	2	3	4	5
Количество баллов	3	3	4	5	5

Темы для подготовки: числа и вычисления (натуральные, целые, рациональные, действительные числа); алгебраические выражения (буквенные выражения, многочлены, алгебраические дроби); уравнения и неравенства (линейные, квадратные уравнения и неравенства с одной переменной и их системы); решение текстовых задач; числовые последовательности (арифметическая и геометрическая прогрессии, сложные проценты); функции, линейная функция, квадратичная функция, обратная пропорциональность, $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = |x|$, их свойства и графики, решение уравнений и неравенств с использованием графиков функций; геометрические фигуры и их свойства (треугольники, многоугольники, окружность и круг); треугольники, элементы треугольника, медианы, высоты, биссектрисы треугольника и их свойства; равенство и подобие треугольников; прямоугольный треугольник и его свойства; параллельные прямые, их признаки и свойства; теорема Чевы, теорема Менелая; четырехугольники и их свойства; параллелограмм, трапеция; теорема синусов, теорема косинусов; площади фигур; окружность и ее свойства; вписанные и центральные углы; хорда, секущая и касательная окружности; взаимное расположение двух окружностей; вписанные и описанные окружности и их свойства.

Вступительные испытания 1-го этапа в 10-й класс

Задания по математике 2023 демо
Выполните задания (10 баллов)

$\boxed{1}$ *(0,5 балла)* Вычислите: $58 \cdot \left(\left(2\frac{1}{14}\right)^{-2} - \left(1\frac{14}{15}\right)^{-2} \right)$.

или

Найдите значение выражения $(-6t)$, если $t = \frac{11}{6} : (2{,}65 : 2{,}5 - 1{,}1)$.

$\boxed{2}$ *(1 балл)* Решите уравнение

$$\frac{7}{x^2+3x-4} - \frac{3x+6}{x^2+x-2} = \frac{1}{1-x}.$$

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите наименьший из них.

или

Решите неравенство

$$\left(\sqrt{x+2}+1\right) \cdot (7{,}3x - 20) \le 0.$$

В ответе укажите количество целых чисел, являющихся решениями неравенства.

$\boxed{3}$ *(1 балл)* В параллелограмме $MFKT$ угол T равен $135°$, а диагональ FT перпендикулярна стороне FK, которая равна 14. Найдите площадь параллелограмма $MFKT$.

или

Треугольник MPK равнобедренный. Известно, что MK — основание, угол при котором равен $75°$. Найдите длину стороны MP, если высота, проведенная к этой стороне, равна 18.

$\boxed{4}$ *(1 балл)* Ежемесячный доход семьи равен 95 000 руб., причем 40% этой суммы составляет заработная плата Татьяны. В результате кризиса ее заработная плата снизилась на 10%. На сколько процентов снизился общий доход семьи, если доходы остальных членов семьи не изменились?

или

Динара и Карим состязались в беге на 1 км. Динара обогнала Карима на 90 с, но если бы Карим бежал в 1,5 раза быстрее, то он обогнал бы Динару на 1 мин. С какой скоростью бежала Динара? Ответ дайте в км/ч.

$\boxed{5}$ *(1 балл)* Найдите сумму всех трехзначных чисел, которые при делении на 3 дают остаток 1, а при делении на 4 — остаток 2.

или

Миша начал читать книгу. Каждый день он читал в 2 раза меньше страниц, чем в предыдущий, и прочитал книгу за 6 дней. Сколько страниц книги прочитал Миша за третий день, если в книге 189 страниц?

6 *(1 балл)* Найдите сумму всех целых чисел, входящих в область определения функции

$$f(x) = \sqrt{9 - x \cdot |x|} + \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 3}{10x^2 - 11x - 62}}.$$

или

Найдите наибольшее значение функции $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x+2}$ при условии, что аргумент принимает значения из области определения функции $g(x) = \sqrt{(x+5)(x+2)} + \sqrt{x+1}$.

7 *(1 балл)* Найдите значение выражения

$$\sqrt{18}\left(\sqrt{x} - 3\right)\sqrt{2x + 18 + 12\sqrt{x} - 6x}$$

при $x = 0{,}15$.

или

Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{3}a - \left(1 + 3\sqrt{3}\right)\sqrt{ab} + 3b}{\sqrt{a + 9b - 6\sqrt{ab}}} - \sqrt{b}$ при $a = 27$, $b = 5$.

8 *(1 балл)* Замените все буквы цифрами (одинаковые буквы — одинаковыми цифрами, разные буквы — разными), чтобы разность

ЛИЦЕЙ – ОГОНЬ

приняла наибольшее возможное значение. В ответе укажите это значение.

или

В конкурсе по поеданию булочек участвовало 5 человек. Все они съели разное количество булочек, и каждому удалось съесть хотя бы одну. Когда каждого участника спросили, сколько булочек в сумме было съедено за время конкурса, они назвали различные числа от 11 до 15, причем известно, что занявший первое место ошибся на 1, занявший второе место — на 2, третье — на 3, четвертое — на 4, пятое — на 5 булочек. Сколько булочек съел победитель конкурса?

9 *(1 балл)* Окружность радиуса 3,5 вписана в треугольник KLT и касается сторон KT и KL соответственно в точках A и B. Известно, что $TA : AK = 1 : 2$, $KB : BL = 2 : 3$. Найдите наибольшую сторону треугольника KLT.

или

В треугольнике PKT мзвестны стороны: $PK = 12$, $PT = 15$, $KT = 18$. Проведена биссектриса PF. Окружность, описанная около треугольника PKF, пересекает сторону PT в точке M. Найдите периметр треугольника MFT.

10 *(1,5 балла)* Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\frac{ax^2 + x - a - 1}{\sqrt{1 - x}} = 0$$

не имеет решений. В ответ запишите разность между наибольшим и наименьшим из таких значений.

или

Найдите значение параметра a, при котором расстояние между точками, заданными на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} y^2 - 4x + x^2 = 0, \\ 2y + ax - 3 = 0, \end{cases}$$

будет наибольшим.

Решение заданий по математике 1-го этапа вступительных испытаний 2023 г.

$\boxed{\mathbf{1}}$ *(0,5 балла)* Вычислите: $58 \cdot \left(\left(2\frac{1}{14}\right)^{-2} - \left(1\frac{14}{15}\right)^{-2}\right)$.

Решение. Запишем смешанные дроби в скобках в виде неправильных дробей:

$$\left(2\frac{1}{14}\right)^{-2} = \left(\frac{14}{29}\right)^{2}, \qquad \left(1\frac{14}{15}\right)^{-2} = \left(\frac{15}{29}\right)^{2}.$$

По формуле разности квадратов

$$\left(\frac{14}{29}\right)^{2} - \left(\frac{15}{29}\right)^{2} = \left(\frac{14}{29} - \frac{15}{29}\right) \cdot \left(\frac{14}{29} + \frac{15}{29}\right) = -\frac{1}{29}.$$

Умножая это число на 58, получим в итоге -2.

Ответ: -2.

или

Найдите значение выражения $(-6t)$, если $t = \frac{11}{6} : (2{,}65 : 2{,}5 - 1{,}1)$.

Решение. Сначала найдем значение выражения, стоящего в скобках:

$$2{,}65 : 2{,}5 - 1{,}1 = 265 : 250 - 1{,}1 = 1{,}06 - 1{,}1 = -0{,}04 = -\frac{1}{25}.$$

Далее выполним деление:

$$\frac{11}{6} : \left(-\frac{1}{25}\right) = -\frac{11 \cdot 25}{6}.$$

Тогда $-6t = 11 \cdot 25 = 275$.
Ответ: 275.

$\boxed{\mathbf{2}}$ *(1 балл)* Решите уравнение

$$\frac{7}{x^2 + 3x - 4} - \frac{3x + 6}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{1 - x}.$$

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите наименьший из них.

Решение. Заметим, что

$$x^2 + 3x - 4 = (x - 1)(x + 4), \qquad x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2).$$

Тогда

$$\frac{7}{(x - 1)(x + 4)} - \frac{3x + 6}{(x - 1)(x + 2)} = -\frac{1}{x - 1}.$$

Далее

$$\begin{cases} \dfrac{7}{x + 4} - \dfrac{3x + 6}{x + 2} = -1, \\ x \neq 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 1, \\ x \neq -2, \\ x \neq -4, \\ \dfrac{7}{x+4} - 3 = -1. \end{cases}$$

Данная система имеет единственное решение $x = -\dfrac{1}{2}$.

Ответ: $-0{,}5$.

или

Решите неравенство

$$\left(\sqrt{x+2}+1\right) \cdot (7{,}3x - 20) \leq 0.$$

В ответе укажите количество целых чисел, являющихся решениями неравенства.

Решение. На области допустимых значений $[-2; +\infty)$ имеем

$$\sqrt{x+2}+1 \geq 1.$$

Разделим неравенство на $\sqrt{x+2}+1$, получим

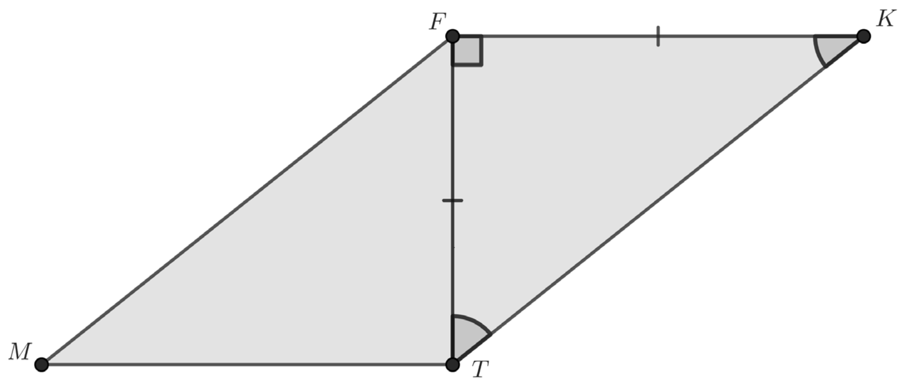
$$7,3x - 20 \leq 0 \Rightarrow x \leq 2\frac{54}{73}.$$

Пересечем множество полученных значений x с условием $x \geq -2$. Таким образом, решениями неравенства являются числа из промежутка $\left[-2; 2\dfrac{54}{73}\right]$. В этом промежутке 5 целых чисел.

Ответ: 5.

$\boxed{3}$ *(1 балл)* В параллелограмме $MFKT$ угол T равен $135°$, а диагональ FT перпендикулярна стороне FK, которая равна 14. Найдите площадь параллелограмма $MFKT$.

Решение.



Если $\angle MTK = 135°$, то $\angle FKT = 45°$. Тогда $\angle FTK = 180° - 90° - 45° = 45°$. Значит, треугольник FTK равнобедренный и $FT = FK = 14$.

Отрезок FT является высотой параллелограмма.

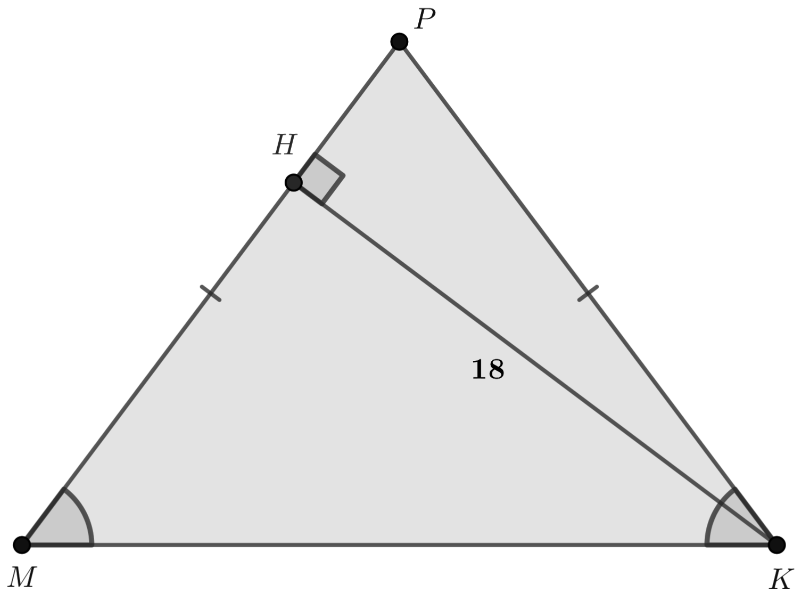
Получим $S_{MFKT} = FT \cdot FK = 14^2 = 196$.

Ответ: 196.

или

Треугольник MPK — равнобедренный. Известно, что MK — основание, угол при котором равен 75°. Найдите длину стороны MP, если высота, проведенная к этой стороне, равна 18.

Решение.



Так как треугольник MPK равнобедренный, то

$$\angle MPK = 180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ.$$

Проведем высоту KH. В прямоугольном треугольнике PHK катет KH лежит против угла в 30°, значит, $PM = PK = 2 \cdot 18 = 36$.

Ответ: 36.

$\boxed{4}$ *(1 балл)* Ежемесячный доход семьи равен 95 000 руб. Известно, что 40% этой суммы составляет заработная плата Татьяны. В результате кризиса ее заработная плата снизилась на 10%. На сколько процентов снизился общий доход семьи, если доходы остальных членов семьи не изменились?

Решение. Заработная плата Татьяны составляет $95\,000 \cdot 0{,}4 = 38\,000$ руб. Изменение ее заработной платы составит $38\,000 \cdot 0{,}1 = 3800$ руб. На эту же величину изменится доход семьи. Он снизится на $\dfrac{3800}{95\,000} \cdot 100\% = 4\%$.

Ответ: 4.

или

Динара и Карим состязались в беге на 1 км. Динара обогнала Карима на 90 с, но если бы Карим бежал в 1,5 раза быстрее, то он обогнал бы Динару на 1 мин. С какой скоростью бежала Динара? Ответ дайте в км/ч.

Решение. Пусть x – скорость Динары, y – скорость Карима в км/мин. Тогда

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{3}{2}.$$

Если Карим будет бежать в 1,5 раза быстрее, его скорость составит $1{,}5y$. Значит:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{1{,}5y} = 1 \Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{2}{3y} = 1.$$

Сложим полученные уравнения:
$$\frac{1}{y}-\frac{2}{3y}=\frac{5}{2}\Rightarrow\frac{1}{y}=\frac{15}{2}.$$
Тогда $\frac{1}{x}=\frac{1}{y}-\frac{3}{2}=6\Rightarrow x=\frac{1}{6}$ км/мин.

Выразим скорость в км/ч: $\frac{1}{6}$ км/мин составляет 10 км/ч.

Ответ: 10.

$\boxed{5}$ *(1 балл)* Найдите сумму всех трехзначных чисел, которые при делении на 3 дают остаток 1, а при делении на 4 — остаток 2.

Решение. Обозначим через A число, удовлетворяющее условию задачи. Тогда
$$A=3k+1,\ k\in\mathbb{Z}\quad\Rightarrow\quad(A-1)\,\vdots\,3.$$

С другой стороны, по условию задачи число A при делении на 4 дает остаток 2, значит, это число можно представить в виде
$$A=4p+2,\ p\in\mathbb{Z}\quad\Rightarrow\quad(A-2)\,\vdots\,4.$$
Тогда
$$(A+2)\,\vdots\,12\quad\Rightarrow\quad A=12l-2=12(l-1)+10=12s+10,\quad l,s\in\mathbb{Z}.$$

Значит, нужно найти сумму трехзначных чисел, которые при делении на 12 будут давать остаток 10.

Определим их количество:
$$100\le 12s+10\le 999\quad\Rightarrow\quad 8\le s\le 82.$$
Тогда всего подходящих чисел 75.

Эти числа образуют арифметическую прогрессию с разностью $d=12$ и первым членом $a_1=106$, который получается при $s=8$. Найдем сумму прогрессии:
$$S=\frac{2\cdot 106+74\cdot 12}{2}\cdot 75=41\,250.$$

Ответ: 41 250.

или

Миша начал читать книгу. Каждый день он читал в 2 раза меньше страниц, чем в предыдущий, и прочитал книгу за 6 дней. Сколько страниц книги прочитал Миша за третий день, если в книге 189 страниц?

Решение. Числа, равные количеству страниц, которое Миша читал каждый день, образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q=\frac{1}{2}$. Пусть x — количество страниц, прочитанных в первый день. Тогда по формуле суммы геометрической прогрессии получим
$$189=\frac{x\cdot(0{,}5^6-1)}{0{,}5-1}\quad\Rightarrow\quad x=\frac{189\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{64}}=96.$$

Тогда в третий день Миша прочитал $96\cdot\frac{1}{4}=24$ страницы.

Ответ: 24.

$\boxed{6}$ *(1 балл)* Найдите сумму всех целых чисел, входящих в область определения функции

$$f(x) = \sqrt{9 - x \cdot |x|} + \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 3}{10x^2 - 11x - 62}}.$$

Решение. Так как $\sqrt{5} - 3 < 0$, то второе слагаемое существует при условии

$$10x^2 - 11x - 62 < 0, \quad \text{откуда} \quad x \in \left(-2; \frac{31}{10}\right).$$

Первое слагаемое существует при условии $9 - x \cdot |x| \geq 0$. Рассмотрим два случая.

При $x \geq 0$ имеем $9 - x^2 \geq 0$, откуда $x \in [-3; 3]$. Пересечем с полученным условием для второго слагаемого, получим $x \in [0; 3]$.

При $x < 0$ получим неравенство $9 + x^2 \geq 0$, которое справедливо при всех x. В пересечении с условием для второго слагаемого получим $x \in (-2; 0)$.

Теперь объединим два полученных множества. Итак, $f(x)$ определена на промежутке $(-2; 3]$. Запишем целые числа из этого множества: -1; 0; 1; 2; 3. Сумма целых решений равна 5.

Ответ: 5.

или

Найдите наибольшее значение функции $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x+2}$ при условии, что аргумент принимает значения из области определения функции $g(x) = \sqrt{(x+5)(x+2)} + \sqrt{x+1}$.

Решение. Графиком функции $f(x)$ является гипербола, $x = -2$ — вертикальная асимптота, $y = 2$ — горизонтальная асимптота. Найдем область определения функции $g(x)$:

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0, \\ (x+5)(x+2) \geq 0. \end{cases}$$

Получим, что $x \geq -1$. На этом промежутке функция $f(x)$ убывает. Значит, свое наибольшее значение на указанном промежутке она принимает в самой левой точке промежутка, т.е. при $x = -1$. Тогда наибольшее значение равно $f(-1) = 3$.

Ответ: 3.

$\boxed{7}$ *(1 балл)* Найдите значение выражения

$$\sqrt{18}\left(\sqrt{x} - 3\right)\sqrt{2x + 18 + 12\sqrt{x}} - 6x$$

при $x = 0{,}15$.

Решение. Заметим, что

$$2x + 18 + 12\sqrt{x} = 2(\sqrt{x} + 3)^2.$$

Так как $\sqrt{x}$ принимает неотрицательные значения при всех допустимых x, то

$$\sqrt{2(\sqrt{x} + 3)^2} = \sqrt{2} \cdot |\sqrt{x} + 3| = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{x} + 3).$$

Тогда при $x \geq 0$ имеем

$$\sqrt{18}\left(\sqrt{x} - 3\right) \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{x} + 3) - 6x = 6x - 54 - 6x = -54.$$

Ответ: -54.

или

Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{3}a - \left(1+3\sqrt{3}\right)\sqrt{ab} + 3b}{\sqrt{a+9b-6\sqrt{ab}}} - \sqrt{b}$ при $a = 27$, $b = 5$.

Решение. При $a \geq 0$, $b \geq 0$ выражение в числителе дроби можно преобразовать следующим образом:

$$\sqrt{3}a - \left(1+3\sqrt{3}\right)\sqrt{ab} + 3b = \sqrt{3}a - \sqrt{ab} - 3\sqrt{3}\cdot\sqrt{ab} + 3b =$$
$$= \sqrt{a}\left(\sqrt{3a} - \sqrt{b}\right) - 3\sqrt{b}\left(\sqrt{3a} - \sqrt{b}\right) = \left(\sqrt{3a} - \sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a} - 3\sqrt{b}\right).$$

Выражение в знаменателе можно представить в виде квадрата разности:

$$a + 9b - 6\sqrt{ab} = \left(\sqrt{a} - 3\sqrt{b}\right)^2.$$

Так как $a = 27, b = 5$, то $\sqrt{a} - 3\sqrt{b} = 3\sqrt{3} - 3\sqrt{5} < 0$, поэтому

$$\sqrt{\left(\sqrt{a} - 3\sqrt{b}\right)^2} = \left|\sqrt{a} - 3\sqrt{b}\right| = 3\sqrt{b} - \sqrt{a}.$$

Тогда частное равно

$$\frac{\left(\sqrt{3a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} - 3\sqrt{b}\right)}{-\left(\sqrt{a} - 3\sqrt{b}\right)} = -\sqrt{3a} + \sqrt{b}.$$

Подставив данные числовые значения буквенных переменных, найдем значение исходного выражения: $-\sqrt{3a} + \sqrt{b} - \sqrt{b} = -\sqrt{3a} = -\sqrt{27\cdot 3} = -9$.

Ответ: -9.

$\boxed{8}$ *(1 балл)* Замените все буквы цифрами (одинаковые буквы — одинаковыми цифрами, разные буквы — разными), чтобы разность

ЛИЦЕЙ – ОГОНЬ

приняла наибольшее возможное значение. В ответе укажите это значение.

Решение. Чем больше уменьшаемое, тем больше разность. Наибольшее пятизначное число с различными цифрами — это 98 765.

Определим наименьшее возможное значение вычитаемого. На первую позицию нельзя поставить 0, поэтому $O = 1$. Все остальные цифры различны, значит, самое маленькое возможное вычитаемое равно 10 123.

Тогда разность равна 88 642.

Ответ: 88 642.

или

В конкурсе по поеданию булочек участвовало 5 человек. Все они съели разное количество булочек, и каждому удалось съесть хотя бы одну. Когда каждого участника спросили, сколько булочек в сумме было съедено за время конкурса, они назвали различные числа от 11 до 15, причем известно, что занявший первое место ошибся на 1, занявший второе место — на 2, третье — на 3, четвертое — на 4, пятое — на 5 булочек. Сколько булочек съел победитель конкурса?

Решение. Количество булочек, которое могли съесть участники конкурса, не меньше чем $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. Тогда меньше всего ошибся участник, назвавший число 15. Именно он занял первое место. Значит, всего было съедено 16 булочек.

Так как все участники съели различное количество булочек и каждый съел хотя бы одну, то победитель не мог съесть меньше 5 булочек.

Если победитель съел 5 булочек, то всего было съедено 15. Если он съел 6 булочек, то всего их могло быть 16: $16 = 1 + 2 + 3 + 4 + 6$. Если победитель съел 7 и более булочек, то минимальная сумма не меньше числа $7 + 1 + 2 + 3 + 4 = 17 > 16$.

Ответ: 6.

$\boxed{9}$ *(1 балл)* Окружность радиуса 3,5 вписана в треугольник KLT и касается сторон KT и KL соответственно в точках A и B. Известно, что $TA : AK = 1 : 2$, $KB : BL = 2 : 3$. Найдите наибольшую сторону треугольника KLT.

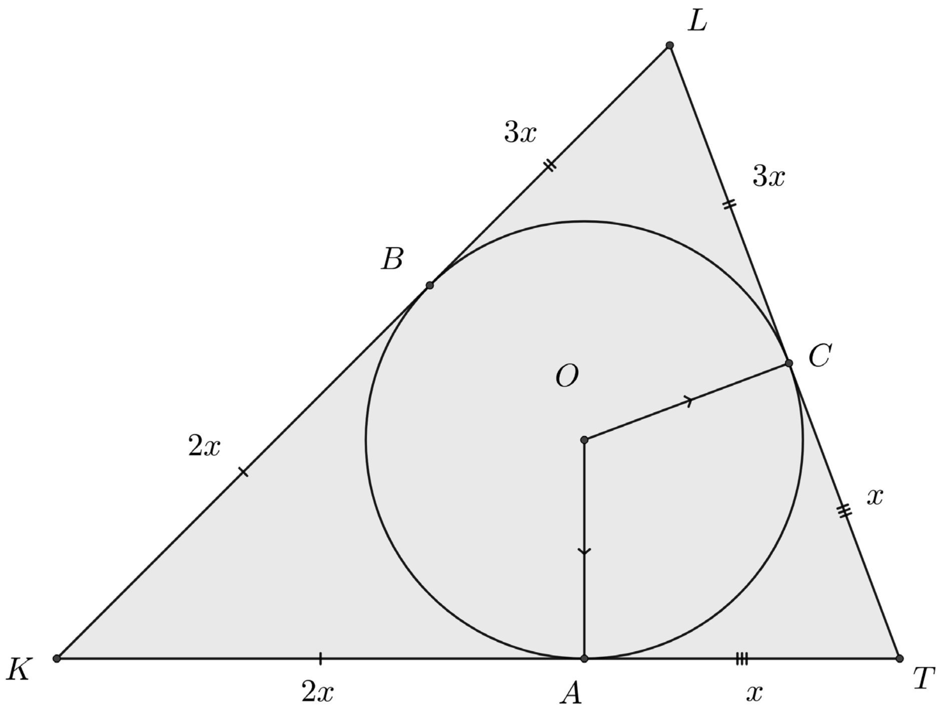
Решение. Выполним чертеж. Точку, в которой окружность касается стороны TL, обозначим C.

Пусть $AK = 2x$, $AT = x$ и $BK = 2y$, $BL = 3y$.

Отрезки касательных, проведенных из одной точки, равны, поэтому

$$BK = AK \quad \Rightarrow \quad x = y.$$

Так как $BL = CL$, $AT = CT$, то $KT = 3x$, $KL = 5x$, $TL = 4x$.



Заметим, что для сторон треугольника KLT выполняется соотношение

$$KL^2 = KT^2 + LT^2,$$

значит, это прямоугольный треугольник и $\angle KTL = 90°$.

Пусть O — центр вписанной окружности.

Тогда $OA \perp TK$, $OC \perp LT$ (радиусы, проведенные в точки касания). Значит, $OATC$ — прямоугольник. Так как $OC = OA$, то четырехугольник $OATC$ — квадрат.

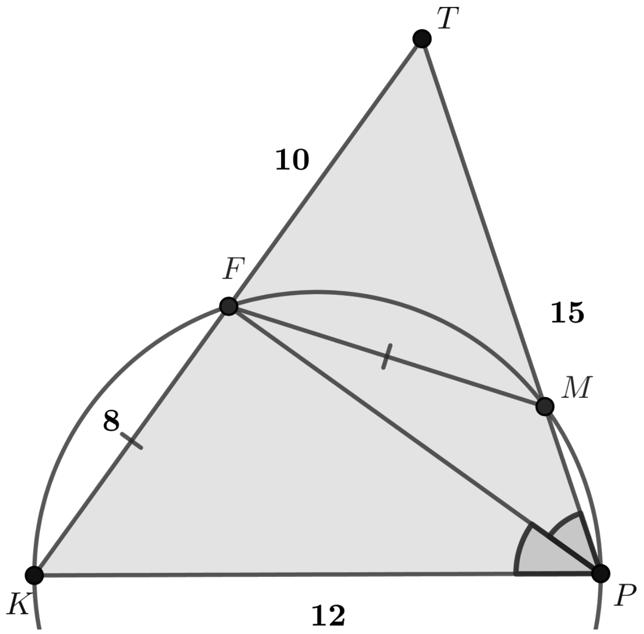
Получили, что $OA = 3{,}5 = x \quad \Rightarrow \quad KL = 5x = 17{,}5$.

Ответ: 17,5.

или

В треугольнике PKT мзвестны стороны: $PK = 12$, $PT = 15$, $KT = 18$. Проведена биссектриса PF. Окружность, описанная около треугольника PKF, пересекает сторону PT в точке M. Найдите периметр треугольника MFT.

Решение. Выполним чертеж.



По свойству биссектрисы имеем

$$\frac{KF}{FT} = \frac{KP}{TP} = \frac{4}{5}.$$

Из равенства $KT = KF + FT = 18$ следует, что $KF = 8$, $FT = 10$.

По теореме об отрезках секущих, проведенных из одной точки, имеем:

$$FT \cdot KT = MT \cdot PT \quad \Rightarrow \quad MT = 12.$$

Вписанные углы KPF и MPF равны, поэтому они опираются на равные хорды. Тогда $FM = 8$. Откуда $P_{MFT} = 10 + 8 + 12 = 30$.

Ответ: 30.

$\boxed{\textbf{10}}$ *(1,5 балла)* Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{ax^2 + x - a - 1}{\sqrt{1 - x}} = 0$$

не имеет решений. В ответ запишите разность между наибольшим и наименьшим значениями таких a.

Решение. Если $a = 0$, то $x = 1$ — корень числителя. Однако в этой точке знаменатель обращается в нуль. Уравнение не имеет решений при $a = 0$.

При любом $a \neq 0$ уравнение $ax^2 + x - a - 1 = 0$ имеет корни, так как

$$D = 1 + 4a^2 + 4a = (2a + 1)^2 \geq 0.$$

Тогда $x_1 = 1$, $x_2 = -\dfrac{a+1}{a}$. Чтобы исходное уравнение не имело решений, необходимо, чтобы $-\dfrac{a+1}{a} \geq 1$. Откуда $a \in [-0{,}5; 0)$.

Таким образом, $a \in [-0{,}5; 0]$. Найдем разность между наибольшим и наименьшим значениями: $0 - (-0{,}5) - 0{,}5$.

Ответ: 0,5.

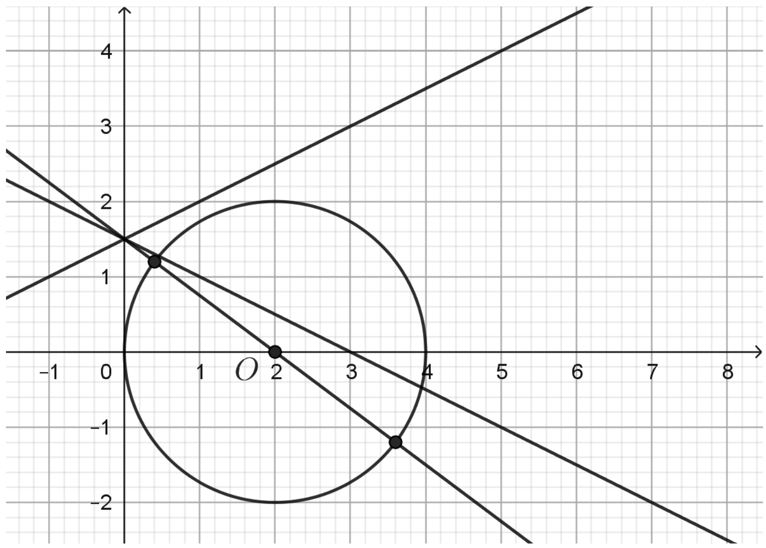
или

Найдите значение параметра a, при котором расстояние между точками, заданными на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} y^2 - 4x + x^2 = 0, \\ 2y + ax - 3 = 0, \end{cases}$$

будет наибольшим.

Решение. Первое уравнение системы на координатной плоскости определяет окружность $(x-2)^2 + y^2 = 4$ с центром в точке $(2,\ 0)$ и радиусом 2. Второе уравнение задает пучок прямых (кроме вертикальной) $y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}$, проходящих через точку с координатами $\left(0; \frac{3}{2}\right)$.



Решения системы — координаты общих точек окружности и прямой. Расстояние между точками будет наибольшим, если точки будут лежать на диаметре окружности, значит, прямая $y = -\frac{a}{2}\,x + \frac{3}{2}$ должна проходить через центр окружности. Подставим координаты центра окружности в уравнение прямой, получим:

$$0 = -a + \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad a = 1{,}5.$$

Ответ: 1,5.

Вступительные испытания 1-го этапа в 10-й класс

Задания по математике 2024 демо
Выполните задания (10 баллов)

$\boxed{1}$ *(0,5 балла)* Найдите значение выражения $12{,}8 \cdot 0{,}25 \cdot \left(\frac{3}{8} - 1\right)$.
Ответ: -2.

$\boxed{2}$ *(1 балл)* Решите уравнение

$$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 2x - 8} = 2.$$

Ответ: 5.

$\boxed{3}$ *(1 балл)* Периметр ромба равен 52, а одна из его диагоналей равна 10. Найдите площадь ромба.
Ответ: 120.

$\boxed{4}$ *(1 балл)* Три круассана на 30% дороже двух круассанов и стакана кофе. Найдите цену круассана, если стакан кофе стоит 40 руб. Ответ дайте в рублях.
Ответ: 130.

$\boxed{5}$ *(1 балл)* Таня вязала платок. Сумма петель в 1-м и 10-м рядах оказалась равной 482. Сколько петель в 11-м ряду, если в каждом ряду Таня делала на 2 петли меньше, чем в предыдущем?
Ответ: 230.

$\boxed{6}$ *(1 балл)* Укажите сумму целых значений аргумента, входящих в область определения функции

$$f(x) = \frac{\sqrt{28 - 3x - x^2}}{(|x| - 4)(x + 9)}.$$

Ответ: -18.

$\boxed{7}$ *(1 балл)* Найдите значение выражения

$$\frac{a\sqrt{a} - 1}{(\sqrt{a} - 1)^2 + 3\sqrt{a}} \cdot (\sqrt{a} + 1)$$

при $a = 2{,}7$.
Ответ: 1,7.

$\boxed{8}$ *(1 балл)* Миша, Коля и Вася вместе выполняют некоторую работу за 4 дня. Миша и Коля вдвоем выполняют эту работу за 6 дней, а Миша и Вася — за 8 дней. Во сколько раз производительность Коли выше производительности Васи?
Ответ: 1,5.

$\boxed{9}$ *(1 балл)* В треугольнике ABC, площадь которого равна 68, проведены высота BH и медиана AM. Расстояние между точками H и M равно 8. Найдите расстояние от точки A до прямой BC.
Ответ: 8,5.

$\boxed{10}$ *(1,5 балла)* На доске написано пятизначное число, в котором все цифры различны и нечетны. Если поменять местами первую и последнюю цифры числа, то оно будет делиться на 25, а если вычеркнуть вторую цифру числа, то оно будет делиться на 3. Какое число написано на доске, если известно, что оно оканчивается не на 9?
Ответ: 51 973.

Вступительные испытания 2-го этапа в 10-й класс

Задания по математике 2024 демо
для направлений «Информатика, инженерия и математика»,
«Экономика и математика»,«Математика»
Выполните задания (20 баллов)

$\boxed{\mathbf{1}}$ *(3 балла)* Решите неравенство

$$\frac{25+30x-54x^2}{\sqrt{1-x^6}} \geq 0.$$

или

Найдите все значения переменной x, при которых выражение

$$\frac{\sqrt{3+x-|-x-3|}}{\sqrt{x^2-6x+7}-\sqrt{7-x}}$$

не имеет смысла.

$\boxed{\mathbf{2}}$ *(3 балла)* Натуральное число называется палиндромом, если его десятичная запись одинаково читается слева направо и справа налево. Например, 12 321, 12 344 321 – палиндромы. Найдите все четырехзначные палиндромы, делящиеся на 15.

или

Мотоциклисты Айрат и Виталий ездят по круговой трассе по часовой стрелке, причем скорость Айрата больше скорости Виталия на 30 км/ч. В какой-то момент, одновременно проезжая мимо плаката «Жми на газ!», они оба увеличили свою скорость на 20 км/ч. В следующий раз после этого Айрат обогнал Виталия возле того же плаката, проехав с момента ускорения ровно 4 круга. Найдите скорости мотоциклистов до того, как они решили ускориться.

$\boxed{\mathbf{3}}$ *(4 балла)* Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Продолжения стороны CD за точку C и стороны AB за точку B пересекаются в точке N. Площадь треугольника ABD равна 2, площадь треугольника ABC равна 1, $AB = BN$. Диагонали BD и AC пересекаются в точке O.

а) Докажите, что BC — средняя линия треугольника AND.

б) Найдите OD, если $BO = 0{,}5$.

или

Высота трапеции $ABCD$ равна 7. Известны длины оснований трапеции: $AD = 10$, $BC = 8$. Через точку E, лежащую на стороне CD, проведена прямая BE, которая пересекает диагональ AC в точке O так, что $AO : OC = 5 : 2$.

а) Докажите, что $CE : CD = 4 : 9$.

б) Найдите площадь треугольника OEC.

$\boxed{\mathbf{4}}$ *(5 баллов)* На координатной плоскости Oxy фигура задана системой неравенств

$$\begin{cases} (|x|-4)(y-x+8) \leq 0, \\ y^2+x^2 \leq 8|x|. \end{cases}$$

Изобразите эту фигуру и вычислите ее площадь.

или

Дана функция $f(x) = |x+2| + |2x-6| - 8$. Изобразите на координатной плоскости графики функций $y = f(x)$ и $y = 7 - |x - t|$, где t — наименьшее значение функции $f(x)$. Вычислите площадь многоугольника, ограниченного данными графиками.

$\boxed{\mathbf{5}}$ *(5 баллов)* Найдите все такие значения параметра a, для каждого из которых множество решений уравнения

$$\frac{\sqrt{x^2+2ax+a^2}+\sqrt{x^2-6ax+9a^2}-4a}{\sqrt{4-x^2}}=0$$

есть отрезок.

или

При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{x^2-4a^2}{|x|+2a}+\frac{x}{\sqrt{x^2}}+\frac{(\sqrt{x-a})^2}{x-a}=0$$

имеет решения? В ответе укажите полученные значения a и соответствующие им решения.