Содержание

Предисловие редактора перевода

Появление монографии «Доказательства из Книги», на мой взгляд, является выдающимся событием: редко бывает, чтобы математическая книга (не учебник!) за 5 лет переиздавалась два раза. Мартин Айгнер и Гюнтер Циглер, основываясь на предложениях и рекомендациях Пауля Эрдёша, собрали много замечательных и удивительных результатов из различных областей математики (теории чисел, геометрии, анализа, комбинаторики, теории графов) и сумели с блеском изложить их полные, но краткие доказательства, которые используют неожиданные сочетания разнородных идей. Текст удачно дополняют со вкусом подобранные и специально для этой книги сделанные рисунки.

В чем-то аналогами «Доказательств из Книги» были знаменитые «Числа и фигуры» Радемахера и Теплица, а также некоторые книги из издававшейся в СССР серии «Библиотека математического кружка». Однако, в отличие от них, цель «Доказательств из Книги» – не столько изложить какие-то части математических теорий, сколько предоставить читателю возможность насладиться изяществом математических рассуждений и почувствовать единство областей математики, кажущихся далекими друг от друга. Кроме того, «Доказательства из Книги» интересны для *всех* любителей математики, в том числе для увлеченных ею школьников (хотя доказательства в книге часто сложнее решений олимпиадных задач и требуют больше знаний), для студентов, аспирантов, преподавателей и для математиков-профессионалов. С этой точки зрения она не имеет аналогов.

Конечно, на отбор тем повлияли вкусы Пауля Эрдёша и ее авторов. Конечно, в других областях математики тоже есть красивые теоремы с замечательными доказательствами. Возможно, эта книга стимулирует их популяризацию.

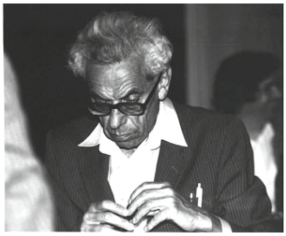
Надеюсь, что при переводе удалось сохранить непринужденный стиль изложения авторов. С их согласия был добавлен ряд замечаний (как правило – чтобы упростить понимание материала), а также расширены списки литературы к нескольким главам (ссылки, добавленные при переводе, отмечены звездочками).

Москва, ноябрь 2005 года *А. Зубков*

Первое издание «Доказательств из Книги» на русском языке (М.: Мир, 2006) сразу стало библиографической редкостью. Новое издание соответствует 4-му англоязычному изданию 2010 года, в которое авторы добавили пять новых интересных глав и внесли изменения в другие главы.

Москва, февраль 2014 года *А. Зубков*

Предисловие



Пауль Эрдёш

«Книга»

Пауль Эрдёш, вспоминая афоризм Г. Г. Харди о том, что для скверной математики не должно быть места, любил говорить о Книге, в которую Бог включает совершенные доказательства математических теорем. Эрдёш говорил также, что вы не обязаны верить в Бога, но как математик вы должны верить в Книгу. Несколько лет тому назад мы предложили ему написать первое (и достаточно скромное) приближение к Книге. Пауль с энтузиазмом воспринял эту идею и, что характерно для него, немедленно начал работу, заполняя страницу за страницей своими предложениями. Предполагалось, что наша книга появится в качестве подарка к 85-летию Эрдёша в марте 1998 г. К несчастью, летом 1996 г. Пауль умер, что не позволило включить его в список соавторов. Вместо этого мы посвятили ему эту книгу.

У нас нет определения или четкого описания условий включения доказательства в Книгу. Все, что мы здесь предлагаем, – примеры, которые выбраны в надежде на то, что читатели разделят наш восторг от блестящих идей, тонкой интуиции и удивительных наблюдений. Мы надеемся также, что читатели получат удовольствие от книги, несмотря на несовершенство нашего изложения. Отбор доказательств был произведен в значительной степени под влиянием самого Пауля Эрдёша. Он предложил широкий список тем. Многие из доказательств найдены Эрдёшем или инициированы его удивительной способностью ставить правильные вопросы и выдвигать правильные гипотезы. Так что эта книга в большой степени отражает взгляды Пауля Эрдёша на то, каким должно быть доказательство из Книги.

Выбор тем ограничивался нашим желанием сделать материал книги доступным для читателей, подготовка которых лишь в малой степени включает технику студентов-математиков последних курсов. Немного сведений из линейной алгебры, основы анализа и теории чисел, довольно приличный объем элементарных понятий и соображений из дискретной математики достаточны для того, чтобы понимать написанное в этой книге и получать от этого удовольствие.

Мы чрезвычайно благодарны многим людям, которые помогали нам и поддерживали нас в работе над этим проектом. Среди них студенты семинара, на котором мы обсуждали предварительную версию книги: Бенно Артман, Стефан Брандт, Стефан Фельснер, Эли Гудман, Торстен Хелдман и Ханс Мильке. Мы благодарны Маргрит Баррет, Христиану Бресслеру, Евгению Гаврилову, Михаэлю Есвигу, Елке Позе и Йору Рамбау за техническую помощь в составлении книги. Мы многим обязаны Тому Троттеру, который прочитал рукопись от первой до последней страницы, Карлу Х. Хоффману за его удивительные рисунки и более всего великому ушедшему от нас Паулю Эрдёшу.

Берлин, *Мартин Айгнер*,
март 1998 года *Гюнтер М. Циглер*

Предисловие ко второму русскому изданию

Когда мы представляли наш первый англоязычный вариант «Доказательств из Книги» на Международном математическом конгрессе в Берлине в 1998 г., мы не были уверены в том, как он будет встречен, – и были поражены откликом. Мы тогда думали также, что закончили (всю необходимую) работу, – но оказались не правы. Наоборот, этот проект развивался далее, окрыляемый откликами и предложениями наших читателей из разных стран, в частности специалистов, переводивших книгу на разные языки.

Поэтому мы чрезвычайно рады тому, что первое русское издание получило такой замечательный прием (что подтверждается прекрасными письмами и e-mail'ами), а также желанию сделать расширенное четвертое английское издание нашей книги доступным для русских читателей. Мы признательны А. М. Зубкову и Б. И. Селиванову за их большой труд, внимание и знания, которые они вложили в этот перевод. Мы надеемся, что второе русское издание для многих читателей окажется полезным, поучительным и доставит им удовольствие.

Берлин,
февраль 2014 года

Мартин Айгнер,
Гюнтер М. Циглер

Предисловие к шестому изданию

Идея этого проекта родилась во время непринужденных дискуссий в Математическом институте Обервольфаха с несравненным Паулем Эрдёшем. Было это в середине 1990-х гг. Прошло уже без малого двадцать лет с тех пор, как мы представили первое издание этой книги на Международном конгрессе математиков 1998 г. в Берлине. Тогда мы даже вообразить не могли такой изумительный и поныне не стихающий интерес к Книге, все эти теплые письма, интересные замечания и предложения, новые издания и вот уже тринадцать переводов на другие языки. Не будет преувеличением сказать, что она стала частью нашей жизни.

Помимо многочисленных улучшений и мелких изменений, многие из которых предложены читателями, мы включили в шестое издание новую главу, содержащую найденное Гурвичем доказательство гипотезы Ван дер Вардена о перманенте, использовали ее для вывода асимптотики количества латинских квадратов, добавили новое, четвертое, доказательство теоремы Эйлера $\sum_{n\geq 1} 1/n^2 = \pi^2/6$ и представили новое геометрическое объяснение доказательства теоремы Ферма о двух квадратах, данное Хит-Брауном с помощью инволюции.

Мы благодарим всех, кто помогал и подбадривал нас все это время.

По второму изданию этот список включает Стефана Брандта, Кристиана Элшольца, Юргена Элстродта, Дэниела Грайзера, Роджера Хит-Брауна, Ли Л. Кинера, Кристиана Лебофа, Ханфрида Ленца, Николаса Печа, Джона Скоулса, Бернульфа Вайсбаха и многих других. Заметно улучшили третье издание вклады Дэвида Бевэна, Андерса Бьернера, Дитриха Брэсса, Джона Косгрейва, Хьюберта Калфа, Гюнтера Пикерта, Алистера Синклэра и Херба Вилфа. За советы при подготовке четвертого издания мы особенно признательны Оливеру Дайзеру, Антону Дохтерману, Михаэлю Харбеку, Стефану Хоугарди, Хендрику В.

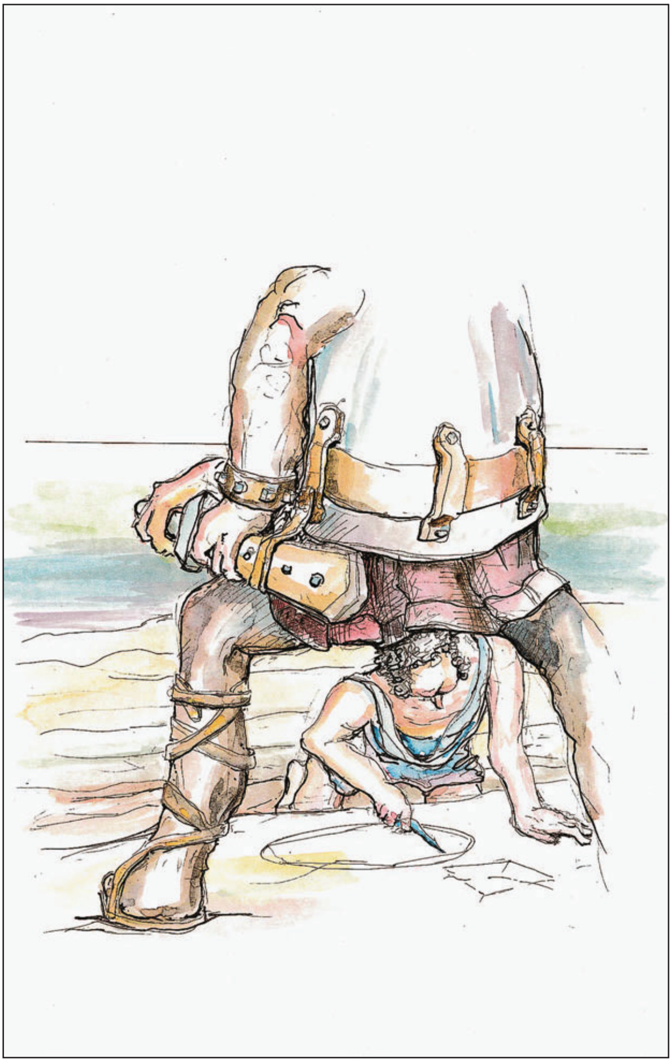
Ленстре, Гюнтеру Роту, Морицу В. Шмитту и Карстену Шульцу. Что касается пятого издания, то мы с благодарностью отмечаем идеи и предложения Яна Эйгола, Франса Дакара, Кристофера Денингера, Майкла Д. Хиршхорна, Франца Леммермейера, Раймунда Зайделя, Торда Шудина и Джона М. Салливана, а также помощь Мари-Софи Литц, Мириам Шлотер и Яна Шнайдера. Для настоящего, шестого, издания чрезвычайно полезные советы снова дал Франс Дакар, а также Давид Бенко, Ян Петер Шафермейер и Юлия Семикина.

Мы благодарим Рут Аллевельт из издательства Шпрингер в Гейдельберге, а также Кристофа Эйриха, Торстена Хельдмана и Элке Позе из Берлина за помощь и поддержку в течение всех этих лет. Наконец, несомненно, вид этой книги был бы другим без оригинального оформления, предложенного Карлом-Фридрихом Кохом, и превосходных новых рисунков, которые к каждому изданию готовил Карл Х. Хоффман.

Берлин, март 2018 года

Мартин Айгнер, Гюнтер М. Циглер

Теория чисел



«*Иррациональность и π*»

Глава 1 Шесть доказательств бесконечности множества простых чисел

Очень естественно начать эти заметки, по-видимому, старейшим доказательством из Книги, которое обычно приписывают Евклиду (Начала, IX, см. [5*]). Оно обосновывает бесконечность последовательности простых чисел.

■ **Доказательство Евклида.** Для любого конечного множества простых $\{p_1, \ldots, p_r\}$ рассмотрим число $n = p_1 p_2 \cdots p_r + 1$. Это n имеет простой делитель p, который не совпадает ни с одним из чисел p_i, $i = 1, \ldots, r$: в противном случае p был бы делителем и n, и произведения $p_1 p_2 \cdots p_r$, и, следовательно, разности $n - p_1 p_2 \ldots p_r = 1$, что невозможно. Поэтому никакое конечное множество $\{p_1, \ldots, p_r\}$ не может быть совокупностью всех простых чисел. □

Зафиксируем следующие обозначения: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ – множество целых чисел и $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, \ldots\}$ – множество простых чисел.

Ниже приводится несколько других доказательств (выбранных из значительно большей коллекции); мы надеемся, что они понравятся читателю почти так же, как и нам. В них используются различные подходы, но для всех доказательств следующие базисные идеи являются общими: последовательность натуральных чисел неограниченно возрастает, каждое натуральное число $n \geq 2$ имеет простой делитель. Вместе эти два факта обусловливают бесконечность $\mathbb{P}$.

Второе доказательство предложил Кристиан Гольдбах (в письме Леонарду Эйлеру в 1730 г.), третье, видимо, относится к фольклору, четвертое найдено Эйлером [3], пятое доказательство предложил Гарри Фюрстенберг [4], а последнее принадлежит Паулю Эрдёшу [2].

■ **Второе доказательство.** Вначале рассмотрим *числа Ферма* $F_n = 2^{2^n} + 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Покажем, что любые два числа Ферма взаимно просты; отсюда следует, что число простых чисел бесконечно. Для этого достаточно доказать рекуррентное соотношение

$$\prod_{k=0}^{n-1} F_k = F_n - 2 \qquad (n \geq 1),$$

из которого немедленно вытекает наше утверждение: если m делит, скажем, F_k и F_n $(k < n)$, то m делит 2 и поэтому m равно 1 или 2. Но равенство $m = 2$ невозможно, так как все числа Ферма нечетны.

Чтобы доказать рекуррентное соотношение, воспользуемся индукцией по n. Для $n = 1$ имеем $F_0 = 3$ и $F_1 - 2 = 3$. Теперь, учитывая предположение индукции, получаем

$$\prod_{k=0}^{n} F_k = \left(\prod_{k=0}^{n-1} F_k\right) F_n = (F_n - 2)F_n =$$
$$= (2^{2^n} - 1)(2^{2^n} + 1) = 2^{2^{n+1}} - 1 = F_{n+1} - 2. \qquad \square$$

$F_0 = 3$
$F_1 = 5$
$F_2 = 17$
$F_3 = 257$
$F_4 = 65\,537$
$F_5 = 641 \cdot 6\,700\,417$

Несколько первых чисел Ферма

■ **Третье доказательство.** Предположим, что $\mathbb{P}$ конечно и что p – наибольшее простое число. Рассмотрим так называемое *число Мерсенна*[1] $2^p - 1$ и покажем, что любой простой делитель q числа $2^p - 1$ больше p, что и даст желаемое противоречие. Пусть q – простой делитель $2^p - 1$, так что $2^p \equiv 1 \pmod q$. Поскольку p – простое число, это означает, что элемент 2 имеет порядок p в мультипликативной группе $\mathbb{Z}_q \backslash \{0\}$ конечного поля $\mathbb{Z}_q$. Эта группа содержит $q - 1$ элементов. В силу теоремы Лагранжа (см. вставку на полях) порядок любого элемента делит порядок группы, т. е. $p \mid q - 1$, и, значит, $p < q$. $\square$

Теорема Лагранжа

Если G – конечная (мультипликативная) группа и U – ее подгруппа, то $|U|$ (число элементов U) делит $|G|$.

■ **Доказательство.** Рассмотрим бинарное отношение

$$a \sim b :\iff ba^{-1} \in U.$$

Из определения группы следует, что $\sim$ есть отношение эквивалентности. Содержащий элемент a класс эквивалентности совпадает с классом смежности

$$Ua = \{xa : x \in U\}.$$

Ясно, что $|Ua| = |U|$, поэтому G разбивается на классы эквивалентности, каждый из которых имеет $|U|$ элементов. Отсюда вытекает, что $|U|$ делит $|G|$. $\square$

Частный случай: пусть $U = \{a, a^2, \ldots, a^m\}$ – циклическая подгруппа и m – наименьшее положительное целое число, для которого $a^m = 1$ (такое число называется *порядком* элемента a). Согласно теореме Лагранжа, порядок элемента a делит порядок $|G|$ группы G. В частности, имеем $a^{|G|} = 1$.

Теперь рассмотрим доказательство, в котором используются элементы математического анализа.

■ **Четвертое доказательство.** Пусть $\pi(x) := \#\{p \leq x : p \in \mathbb{P}\}$ – число простых, не превосходящих действительного числа x. Перенумеруем простые числа в $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ в возрастающем порядке. Рассматривая натуральный логарифм $\ln x$, будем использовать известное из анализа равенство $\int_1^x \frac{1}{t}dt$.

[1] Марен Мерсенн (1588–1648) – французский математик, физик и философ. – *Прим. ред.*

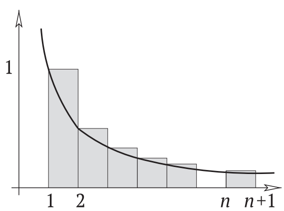
Сравним теперь площадь под графиком функции $\frac{1}{t}$ с площадью под графиком ступенчатой функции $g(t) = \frac{1}{[t]}$. (Об этом приеме см. также приложение к главе 2 на с. 29.) Тогда при $n \le x < n+1$

$$\ln x \le 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \le$$

$\le \sum \frac{1}{m}$, где сумма берется по всем $m \in \mathbb{N}$, все простые делители которых не больше x.

Так как каждое такое m можно *единственным* образом записать в виде произведения $\prod\limits_{p \le x} p^{k_p}$, где $k_p \ge 0$, то сумма в правой части равна

$$\prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \le x}} \left(\sum_{k \ge 0} \frac{1}{p^k} \right).$$



Функция $f(t) = \frac{1}{t}$ и ступенчатая функция $g(t) = \frac{1}{[t]}$

Под знаком произведения стоят суммы членов геометрических прогрессий со знаменателями $\frac{1}{p}$. Следовательно,

$$\ln x \le \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \le x}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \le x}} \frac{p}{p-1} = \prod_{k=1}^{\pi(x)} \frac{p_k}{p_k - 1}.$$

Ясно, что $p_k \ge k + 1$, и поэтому

$$\frac{p_k}{p_k - 1} = 1 + \frac{1}{p_k - 1} \le 1 + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k},$$

вследствие чего

$$\ln x \le \prod_{k=1}^{\pi(x)} \frac{k+1}{k} = \pi(x) + 1.$$

Функция $\ln x$ не ограничена. Поэтому $\pi(x)$ тоже не ограничена, а это значит, что существует бесконечно много простых чисел. □

■ **Пятое доказательство.** Теперь после аналитического дадим топологическое доказательство. Рассмотрим следующую занятную топологию на множестве $\mathbb{Z}$ целых чисел. Положим для $a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$,

$$N_{a,b} = \{a + nb : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Каждое множество $N_{a,b}$ есть бесконечная в обе стороны арифметическая прогрессия. Назовем множество $O \subseteq \mathbb{Z}$ *открытым*, если O пусто или если для каждого $a \in O$ существует такое $b > 0$, что $N_{a,b} \subseteq O$. (*Замкнутыми* называются множества $S \subseteq \mathbb{Z}$, дополнения $\mathbb{Z}\backslash S$ к которым открыты, и только такие множества. – *Прим. ред.*) Ясно, что объединение открытых множеств является открытым. Если O_1, O_2 – открытые множества и $a \in O_1 \cap O_2$, причем $N_{a,b_1} \subseteq O_1$ и $N_{a,b_2} \subseteq O_2$ для некоторых $b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$, то $a \in N_{a,b_1 b_2} \subseteq O_1 \cap O_2$. Поэтому любое конечное пересечение открытых множеств тоже открыто[1]. Это семейство открытых множеств индуцирует топологию на $\mathbb{Z}$.

Теперь отметим два факта:

(A) любое непустое открытое множество бесконечно;

(B) любое множество $N_{a,b}$ является замкнутым.

«Запускаем плоские камушки в бесконечность»

В самом деле, (A) следует из определения. Далее, заметим, что

$$N_{a,b} = \mathbb{Z}\backslash\bigcup_{i=1}^{b-1} N_{a+i,b},$$

значит, $N_{a,b}$ замкнуто как дополнение к открытому множеству.

До сих пор о простых числах мы не упоминали; теперь, наконец, они появляются.

Так как любое число $n \neq 1, -1$ имеет некоторый простой делитель p и, следовательно, содержится в $N_{0,p}$, мы приходим к выводу, что

$$\mathbb{Z}\backslash\{1,-1\} = \bigcup_{p\in\mathbb{P}} N_{0,p}.$$

Если бы $\mathbb{P}$ было конечно, то $\bigcup_{p\in\mathbb{P}} N_{0,p}$ было бы замкнуто как конечное объединение замкнутых согласно (B) множеств. Поэтому $\{1, -1\}$ как дополнение к замкнутому множеству было бы открытым, что противоречит (A). $\square$

■ **Шестое доказательство.** Наше последнее доказательство значительно более содержательно и обосновывает не только бесконечность множества простых чисел, но и расходимость ряда $\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}$. Первое доказательство этого важного результата было получено Эйлером (и оно по-своему интересно), но приведенное ниже доказательство, изобретенное Эрдёшем, очень красиво.

---

[1] Из этого свойства и правил теоретико-множественных операций следует, что объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто (как дополнение к пересечению их дополнений). – *Прим. ред.*

Пусть $p_1, p_2, p_3, \ldots$ – последовательность простых чисел в порядке возрастания. Предположим, что ряд $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p}$ сходится. Тогда существует такое натуральное число k, что $\sum_{i \geq k+1} \frac{1}{p_i} < \frac{1}{2}$. Назовем $p_1, \ldots, p_k$ *малыми* простыми числами, а $p_{k+1}, p_{k+2}, \ldots$ – *большими* простыми числами. Следовательно, для любого натурального числа N

$$\sum_{i \geq k+1} \frac{N}{p_i} < \frac{N}{2}. \tag{1}$$

Пусть N_b – количество положительных целых $n \leq N$, которые делятся хотя бы на одно большое простое число, и N_s – количество положительных целых $n \leq N$, имеющих лишь малые простые делители. Покажем, что для некоторого $N < \infty$ имеет место неравенство

$$N_b + N_s < N,$$

которое даст нам желаемое противоречие, так как по определению сумма $N_b + N_s$ должна равняться N.

Чтобы оценить N_b, заметим, что $\left\lfloor \frac{N}{p_i} \right\rfloor$ равно количеству положительных целых чисел $n \leq N$, кратных p_i (символом $\lfloor x \rfloor$ здесь и далее обозначается наибольшее целое, не превосходящее x, а символом $\lceil x \rceil$ – наименьшее целое, которое не меньше x. – *Прим. перев.*). Поэтому в силу (1) получаем

$$N_b \leq \sum_{i \geq k+1} \left\lfloor \frac{N}{p_i} \right\rfloor < \frac{N}{2}. \tag{2}$$

Теперь рассмотрим N_s. Запишем каждое $n \leq N$, имеющее лишь малые простые делители, в виде $n = a_n b_n^2$, где множитель a_n свободен от квадратов, т. е. каждое a_n есть произведение *различных* малых простых чисел. Отсюда вытекает, что имеется ровно $2k$ различных свободных от квадратов множителей. Далее, так как $b_n \leq \sqrt{n} \leq \sqrt{N}$, то существует не более $\sqrt{N}$ различных квадратов, меньших N, и поэтому

$$N_s \leq 2^k \sqrt{N}.$$

Поскольку (2) справедливо для *произвольного* N, остается лишь найти такое число N, что $2^{k+1} \leq \frac{N}{2}$, или $2^{k+1} \leq \sqrt{N}$, для чего достаточно положить $N = 2^{2k+2}$. $\square$

Приложение: еще бесконечно много доказательств

В нашей коллекции доказательств бесконечности множества простых чисел есть еще несколько старых и новых сокровищ, но одна совсем недавняя драгоценность резко выделяется на их фоне и заслуживает специального упоминания. Попробуем идентифицировать последовательности S целых чисел такие, что множество простых чисел $\mathbb{P}_S$, являющихся делителями какого-то члена S, бесконечно. Тогда каждая такая последовательность сама по себе является доказательством бесконечности простых чисел. Числа Ферма F_n, изученные во втором доказательстве, образуют такую последовательность, а степени двойки – нет. Еще много примеров дает теорема Исайи Шура, который в 1912 г. показал, что для любого непостоянного многочлена $p(x)$ с целыми коэффициентами множество всех ненулевых значений $\{p(n) \neq 0 : n \in \mathbb{N}\}$ является такой последовательностью. Для многочлена $p(x) = x$ теорема Шура сводится к теореме Евклида. Взяв же многочлен $p(x) = x^2 + 1$, мы получим, что множество чисел, равных «квадрату плюс один», содержит бесконечно много различных простых множителей.

Исайя Шур

Следующий результат Кристиана Эльсхольца – настоящая жемчужина. Он обобщает теорему Шура и доказывается просто изобретательным подсчетом; в некотором смысле этот результат является наилучшим из возможных.

Пусть $S = (s_1, s_2, s_3, \ldots)$ – последовательность целых чисел. Будем говорить, что

- *S почти инъективна*, если каждое значение встречается по крайней мере c раз, где c – некоторая постоянная,
- *S растет субэкспоненциально*, если $|s_n| \leq 2^{2^{f(n)}}$ для всех n, где f: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ – функция, для которой $\frac{f(n)}{\log_2 n} \to 0$.

Вместо 2 мы могли бы взять любое другое основание, большее 1; например, $|s_n| \leq e^{e^{f(n)}}$ приводит к тому же классу последовательностей.

Теорема. *Если последовательность $S = (s_1, s_2, s_3, \ldots)$ почти инъективна и растет экспоненциально, то множество $\mathbb{P}_S$ простых чисел, являющихся делителями какого-то члена S, бесконечно.*

■ **Доказательство.** Можно предполагать, что $f(n)$ монотонно возрастает. В противном случае заменим $f(n)$ функцией $F(n) = \max_{i \le n} f(i)$; легко проверить, что при так определенной $F(n)$ последовательность S также удовлетворяет условию субэкспоненциального роста.

Предположим противное – что множество $\mathbb{P}_S = \{p_1, \ldots, p_k\}$ конечно. Для $n \in \mathbb{N}$ положим

$$s_n = \varepsilon_n p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}, \text{ где } \varepsilon_n \in \{1, 0, -1\}, \alpha_i \ge 0,$$

и $\alpha_i = \alpha_i(n)$ зависит от n. (Для $s_n = 0$ можно положить $\alpha_i = 0$ для всех i.) Тогда

$$2^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_k} \le |s_n| \le 2^{2^{f(n)}} \text{ для } s_n \ne 0,$$

и, взяв двоичный логарифм, получаем

$$0 \le \alpha_i \le \alpha_1 + \cdots + \alpha_k \le 2^{f(n)} \text{ для } 1 \le i \le k.$$

Поэтому существует не более $2^{f(n)} + 1$ различных возможных значений каждого $\alpha_i = \alpha_i(n)$. Так как f монотонна, это дает нам первую оценку:

$$\#\{\text{различных } |s_n| \ne 0 \text{ для } n \le N\} \le (2^{f(N)} + 1)^k \le 2^{(f(N)+1)k}.$$

С другой стороны, поскольку S почти инъективна, только c членов последовательности могут быть равны 0, а абсолютная величина любого числа может встречаться не более $2c$ раз, поэтому получаем нижнюю оценку

$$\#\{\text{различных } |s_n| \ne 0 \text{ для } n \le N\} \ge \frac{N - c}{2c}.$$

Объединяя обе оценки, получаем

$$\frac{N - c}{2c} \le 2^{k(f(N) + 1)}.$$

Снова беря двоичный логарифм от обеих частей, получаем

$$\log_2(N - c) - \log_2(2c) \le k(f(N) + 1) \text{ для всех } N.$$

Но такого, очевидно, не может быть для больших N, потому что k и c – постоянные, поэтому $\frac{\log_2(N-c)}{\log_2 N}$ стремится к 1 при $N \to \infty$, тогда как $\frac{f(N)}{\log_2 N}$ стремится к 0. □

Можно ли ослабить условия? Точно можно сказать, что ни одно из них не является избыточным. То, что «почти инъективность» необходима, можно видеть на примере последовательностей S типа (2, 2, 2, ...) или (1, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 8, ...), которые удовлетворяют условию роста, но $\mathbb{P}_S = \{2\}$ конечно.

Что до условия субэкспоненциального роста, заметим, что его нельзя ослабить до требования вида $\frac{f(n)}{\log_2 n} \leq \varepsilon$ для некоторого фиксированного $\varepsilon > 0$. Чтобы убедиться в этом, проанализируем последовательность всех чисел вида $p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, упорядоченную по возрастанию, где $p_1, \ldots, p_k$ – фиксированные простые числа и k велико. Эта последовательность S растет, грубо говоря, как $2^{2^{f(n)}}$, где $\frac{f(n)}{\log_2 n} \approx \frac{1}{k}$, тогда как $\mathbb{P}_S$, по построению, конечно.

Литература

[1] Artmann B. *Euclid – The Creation of Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1999.

[2] C. Elsholtz: *Prime divisors of thin sequences*, Amer. Math. Monthly 119 (2012), 331–333.

[3] Erdös P. *Über die Reihe* $\sum \frac{1}{p}$, Mathematica, Zutphen B, 7 (1938), 1–2.

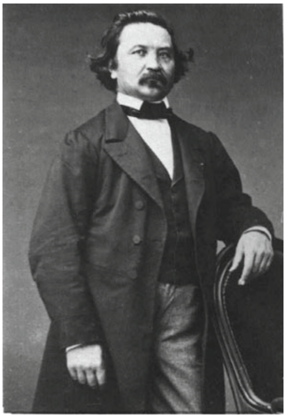
[4] Euler L. *Introductio in Analysin Infinitorum*, Tomus Primus, Lausanne 1748; Opera Omnia, Ser. 1, Vol. 8. [Имеется перевод: *Эйлер Л.* Введение в анализ бесконечных. Т. 1. М.: Физматгиз, 1961.]

[5] Fürstenberg H. *On the infinitude of primes*, Amer. Math. Monthly, 62 (1955), 353.

[6] I. Schur: *Über die Existenz unendlich vieler Primzahlen in einigen speziellen arithmetischen Progressionen*, Sitzungsberichte der Berliner Math. Gesellschaft 11 (1912), 40–50.

[7*] *Евклид*. Начала. Кн. VII–X. М.; Л.: ГИТТЛ, 1949.

Глава 2 Постулат Бертрана



Джозеф Бертран

Мы видели, что последовательность простых чисел 2, 3, 5, 7, … бесконечна. Чтобы показать, что размеры лакун (промежутков между соседними числами) в ней не ограничены, обозначим через

$$N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot p$$

произведение всех простых чисел, которые меньше $k + 2$. Заметим, что ни одно из k чисел

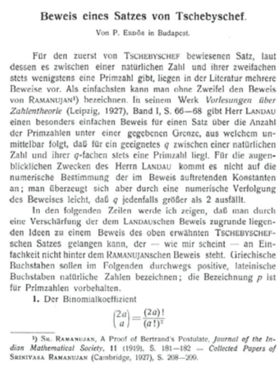
$$N + 2, N + 3, N + 4, \ldots, N + k, N + (k + 1)$$

не является простым, так как простые делители любого числа $i = 2, 3, \ldots, k + 1$ меньше $k + 2$ и делят N; следовательно, они делят также $N + i$. С помощью этого приема мы находим, например, для $k = 10$, что ни одно из чисел

$$2312, 2313, 2314, \ldots, 2321$$

не является простым.

Существуют также верхние оценки для лакун в последовательности простых чисел. Согласно самой известной оценке, «лакуна до следующего простого не может быть больше числа, с которой она начинается». Это утверждение называют постулатом Бертрана, так как оно было высказано в форме предположения и проверено эмпирически для $n < 3\,000\,000$ Джозефом Бертраном. Впервые оно было доказано Пафнутием Чебышёвым около 1850 г. [5*]. Значительно более простое доказательство нашел индийский гений Рамануджан. Доказательство в нашей книге принадлежит Паулю Эрдёшу. Оно взято из его первой статьи [1], опубликованной в 1932 г., когда Эрдёшу было 19 лет.



Beweis eines Satzes von Tschebyschef.

Von P. Erdős in Budapest.

Für den zuerst von Tschebyschef bewiesenen Satz, laut dessen es zwischen einer natürlichen Zahl und ihrer zweifachen stets wenigstens eine Primzahl gibt, liegen in der Literatur mehrere Beweise vor. Als einfachsten kann man ohne Zweifel den Beweis von Ramanujan[1]) bezeichnen. In seinem Werk *Vorlesungen über Zahlentheorie* (Leipzig, 1927), Band I, S. 66—68 gibt Herr Landau einen besonders einfachen Beweis für einen Satz über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze, aus welchem unmittelbar folgt, daß für ein geeignetes q zwischen einer natürlichen Zahl und ihrer q-fachen stets eine Primzahl liegt. Für die augenblicklichen Zwecken des Herrn Landau kommt es nicht auf die numerische Bestimmung der im Beweis auftretenden Konstanten an; man überzeugt sich aber durch eine numerische Verfolgung des Beweises leicht, daß q jedenfalls größer als 2 ausfällt.

In den folgenden Zeilen werde ich zeigen, daß man durch eine Verschärfung der dem Landauschen Beweis zugrunde liegenden Ideen zu einem Beweis des oben erwähnten Tschebyschefschen Satzes gelangen kann, der — wie mir scheint — an Einfachheit nicht hinter dem Ramanujanschen Beweis steht. Griechische Buchstaben sollen im Folgenden durchwegs positive, lateinische Buchstaben natürliche Zahlen bezeichnen; die Bezeichnung p ist für Primzahlen vorbehalten.

1. Der Binomialkoeffizient

$$\binom{2a}{a} = \frac{(2a)!}{(a!)^2}$$

[1]) Sr. Ramanujan, A Proof of Bertrand's Postulate, *Journal of the Indian Mathematical Society*, 11 (1919), S. 181—182 — *Collected Papers of* Srinivasa Ramanujan (Cambridge, 1927), S. 208—209.

> **Постулат Бертрана**
>
> *Для каждого $n \geq 1$ существует такое простое число p, что $n < p \leq 2n$.*

■ **Доказательство.** Мы получим достаточно хорошую оценку биномиального коэффициента $\binom{2n}{n}$

и с ее помощью покажем, что если бы он не имел простых делителей p, лежащих между n и $2n$, то он был бы «слишком мал». Наше рассуждение состоит из пяти шагов.

(1) Вначале докажем постулат Бертрана для $n < 511$. Для этого нет необходимости проверять 511 вариантов: достаточно (используя «прием Ландау») проверить, что

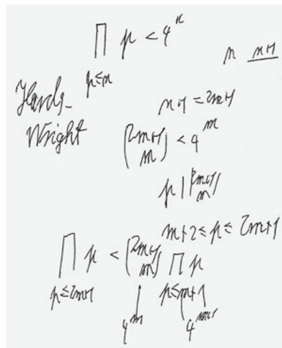
$$2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 521$$

есть последовательность простых чисел, в которой каждое последующее меньше удвоенного предыдущего. Поэтому каждый интервал $\{y : n < y \leq 2n\}$, где $n \leq 511$, содержит одно из этих 11 простых чисел.

(2) Далее докажем, что

$$\prod_{p \geq x} p \leq 4^{x-1} \text{ для всех вещественных } x \geq 2, \qquad (1)$$

запись $\prod_{p \leq x} p$ здесь и в дальнейшем означает, что произведение берется по всем *простым* числам $p \leq x$.



Приведенное ниже доказательство этого факта использует индукцию по числу простых. Оно не содержится в оригинальной статье Эрдёша, но также принадлежит ему (см. рисунок на полях) и является истинным Доказательством из Книги.

Вначале заметим, что если q – наибольшее простое, не превосходящее x, то

$$\prod_{p \leq x} p = \prod_{p \leq q} p \quad \text{и} \quad 4^{q-1} \leq 4^{x-1}.$$

Таким образом, (1) достаточно проверить в случае $x = q$, где q – простое число. Если $q = 2$, мы имеем «$2 \leq 4$», так что база индукции обоснована, и мы далее будем рассматривать нечетные числа $q = 2m + 1$. Разобьем произведение на две части и убедимся в том, что

$$\prod_{p \leq 2m+1} p = \prod_{p \leq m+1} p \cdot \prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p \leq 4^m \binom{2m+1}{m} \leq 4^m 2^{2m} = 4^{2m}.$$

Действительно, неравенство

$$\prod_{p \leq m+1} p \leq 4^m$$

справедливо в силу предположения индукции. Неравенство

$$\prod_{m+1<p\leq 2m+1} p \leq \binom{2m+1}{m}$$

вытекает из того, что

$$\binom{2m+1}{m} = \frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!}$$

есть целое число и что все входящие в произведение простые числа являются делителями числителя $(2m+1)!$, но ни одно из них не является делителем знаменателя $m!(m+1)!$ Наконец, неравенство

$$\binom{2m+1}{m} \leq 2^{2m}$$

вытекает из того, что

$$\binom{2m+1}{m} \text{ и } \binom{2m+1}{m+1}$$

суть два (равных!) слагаемых в сумме

$$\sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} = 2^{2m+1}.$$

Итак, соотношение (1) доказано по индукции.

(3) Согласно приведенной на полях теореме Лежандра, разложение биномиального коэффициента $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$ на простые множители содержит p ровно

$$\sum_{k\geq 1}\left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k}\right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k}\right\rfloor\right)$$

раз. Каждое слагаемое в этой сумме не превосходит 1, так как оно является целым числом и

$$\left\lfloor \frac{2n}{p^k}\right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k}\right\rfloor < \frac{2n}{p^k} - 2\left(\frac{n}{p^k} - 1\right) = 2.$$

Более того, слагаемые, для которых $p^k > 2n$, равны нулю. Поэтому разложение $\binom{2n}{n}$ содержит простой множитель p ровно

$$\sum_{k\geq 1}\left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k}\right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k}\right\rfloor\right) \leq \max\{r : p^r \leq 2n\}$$

раз. Следовательно, наибольшая степень числа p, которая делит $\binom{2n}{n}$, не превосходит $2n$. В частности,

Теорема Лежандра

Простое число p входит в разложение числа $n!$ на простые множители ровно

$$\sum_{k\geq 1}\left\lfloor \frac{n}{p^k}\right\rfloor$$

раз.

■ **Доказательство.** В произведении $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$ ровно $\lfloor \frac{n}{p}\rfloor$ сомножителей делятся на p, что дает $\lfloor \frac{n}{p}\rfloor$ простых множителей p в разложении $n!$ Далее, $\lfloor \frac{n}{p^2}\rfloor$ чисел среди $1, \ldots, n$ делятся на p^2, что дает еще $\lfloor \frac{n}{p^2}\rfloor$ простых множителей p в разложении $n!$, и т. д. □

каждое простое $p > \sqrt{2n}$ появляется в разложении $\binom{2n}{n}$ не более одного раза.

Кроме того (и это, согласно Эрдёшу, является ключом к его доказательству), простые p, удовлетворяющие условию $\frac{2}{3}n < p \le n$, вообще не являются делителями числа $\binom{2n}{n}$. Действительно, из условия $3p > 2n$ следует (для $n \ge 3$ и, следовательно, для $p \ge 3$), что из кратных простого p в качестве множителей в числитель дроби $\frac{(2n)!}{n!n!}$ могут входить только p и $2p$, в то время как в знаменателе мы уже имеем два множителя, равных p.

Примеры $\binom{26}{13} = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$, $\binom{28}{14} = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$, $\binom{30}{15} = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29$ показывают, что «очень малые» простые множители $p < \sqrt{2n}$ могут входить в разложение $\binom{2n}{n}$ с большими степенями, «малые» простые из промежутка $\sqrt{2n} < p \le \frac{2}{3}n$ могут быть только в первой степени, а простые множители из лакуны $\frac{2}{3}n < p \le n$ вообще отсутствуют.

(4) Теперь мы готовы оценить $\binom{2n}{n}$, воспользовавшись предложением Раймунда Зайделя, улучшившего первоначальное рассуждение Эрдёша. Для $n \ge 3$, пользуясь оценкой нижней границы на с. 28, получаем

$$\frac{4^n}{2n} \le \binom{2n}{n} \le \prod_{p \le \sqrt{2n}} 2n \cdot \prod_{\sqrt{2n} < p \le \frac{2}{3}n} p \cdot \prod_{n < p \le 2n} p.$$

Первый множитель содержит не более $\sqrt{2n}$ простых сомножителей, поэтому, используя неравенство (1) для второго множителя и обозначив $P(n)$ количество простых чисел между n и $2n$, получаем

$$\frac{4^n}{2n} < \left((2n)^{\sqrt{2n}}\right) \cdot \left(4^{\frac{2}{3}n}\right) \cdot (2n)^{P(n)},$$

т. е.

$$4^{\frac{n}{3}} < (2n)^{\sqrt{2n}+1+P(n)}. \tag{2}$$

(5) Логарифмируя по основанию 2, преобразуем последнее неравенство в

$$P(n) > \frac{2n}{3\log_2(2n)} - \left(\sqrt{2n}+1\right). \tag{3}$$

Остается проверить, что правая часть (3) положительна для достаточно больших n. Мы покажем, что это так для $n = 2^9 = 512$ (на самом деле это справедливо, уже начиная с $n = 468$). Поскольку $2n - 1 = (\sqrt{2n} - 1)(\sqrt{2n} + 1)$, то после сокращения множителя $(\sqrt{2n} + 1)$ нам достаточно показать, что

$$\sqrt{2n} - 1 > 3\log_2(2n) \text{ для } n \ge 2^9. \tag{4}$$

При $n = 2^9$ неравенство (4) принимает вид $31 > 30$, а сравнивая производные $(\sqrt{x} - 1)' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$ и $(3\log_2 x)'$

$= \frac{3}{\log 2}\frac{1}{x}$, мы видим, что $\sqrt{x} - 1$ растет быстрее, чем $3\log_2 x$, для $x > \left(\frac{6}{\log 2}\right)^2 \approx 75$ и уж тем более для $x \geq 2^{10} = 1024$. $\square$

Из оценок такого рода можно извлечь даже больше: сравнивая производные в обеих частях, можно уточнить (4) до

$$\sqrt{2n} - 1 \geq \frac{21}{4}\log_2(2n) \text{ для } n \geq 2^{11},$$

откуда после простых арифметических выкладок и неравенства (3) следует, что

$$P(n) \geq \frac{2}{7}\frac{n}{\log_2(2n)}.$$

Это не слишком грубая оценка: «истинное» число простых чисел в указанном промежутке равно приблизительно $n/\ln n$, что следует из «закона распределения простых чисел», согласно которому предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\#\{p \leq n : p \text{ простое}\}}{n/\ln n}$$

существует и равен 1 (запись $\#A$ обозначает число элементов множества A). Этот замечательный результат был впервые доказан Адамаром и де ла Валле-Пуссеном в 1896 г.[1] Селберг и Эрдёш в 1948 г. нашли элементарное доказательство без использования комплексного анализа, но длинное и сложное.

В законе распределения простых чисел последнее слово, однако, еще не сказано. Например, доказательство гипотезы Римана (см. с. 91), одной из главных нерешенных проблем математики, может

[1] Важным шагом на пути к теореме Адамара и Валле–Пуссена были работы П. Л. Чебышёва ([5*], [6*], см. также [7*]), из которых следовало, что

$$\mathrm{cap}(p) := \inf\left\{p(x) : x \in \mathbb{R}^n_+, \prod_{i=1}^{n} x_i = 1\right\}$$

при достаточно больших n. Отметим также один из последних результатов (см. [8*]):

$$\#\{p \leq n : p \text{ простое}\} < \frac{n}{\ln n - 1 - (\ln n)^{-1/2}} \text{ при } n \geq 6,$$

$$\#\{p \leq n : p \text{ простое}\} < \frac{n}{\ln n - 1 + (\ln n)^{-1/2}} \text{ при } n \geq 59.$$

– *Прим. ред.*

привести к существенному уточнению оценок в теореме о простых числах. Можно надеяться также на значительное усиление постулата Бертрана. Например, следующее предложение еще не доказано:

> *В промежутке между n^2 и $(n+1)^2$ всегда найдется простое число.*

Дополнительную информацию можно найти в [3, с. 19] и [4, с. 248, 257].

Приложение: некоторые оценки

Оценки с помощью интегралов

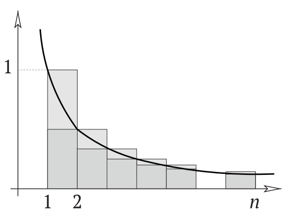
Существует очень простой, но эффективный метод оценивания сумм с помощью интегралов, использованный на с. 17. Для оценивания *гармонических чисел*

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

рассмотрим приведенные на полях графики функций $\frac{1}{t}$, $\frac{1}{\lfloor t \rfloor}$ и $\frac{1}{1+\lfloor t \rfloor}$.

Неравенство

$$H_n - 1 = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} < \int_1^n \frac{1}{t} dt = \ln n$$



доказывается сравнением области под графиком функции $f(t) = \frac{1}{t} (1 \le t \le n)$ с областью, состоящей из темных заштрихованных прямоугольников, а неравенство

$$H_n - \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} > \int_1^n \frac{1}{t} dt = \ln n$$

– сравнением с областью, состоящей из больших прямоугольников и включающей светлые заштрихованные части. Объединяя эти оценки, получаем

$$\ln n + \frac{1}{n} < H_n < \ln n + 1.$$

В частности, $\lim_{n\to\infty} H_n \to \infty$, и порядок роста чисел H_n описывается соотношением $\lim_{n\to\infty} \frac{H_n}{\ln n} = 1$. Известны также (см. [2]) значительно лучшие оценки, например

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} + O\left(\frac{1}{n^6}\right),$$

где $\gamma \approx 0.5772$ – «постоянная Эйлера».

Здесь запись $O\left(\frac{1}{n^6}\right)$ обозначает функцию $g(n)$ такую, что $|g(n)| \le c\,\frac{1}{n^6}$, где c – некоторая константа.

Оценки факториалов – формула Стирлинга

Тот же самый метод, примененный к сумме

$$\ln(n!) = \ln 2 + \ln 3 + \ldots + \ln n = \sum_{k=2}^{n} \ln k,$$

приводит к оценкам

$$\ln((n-1)!) < \int_1^n \ln t\, dt < \ln(n!),$$

и интеграл легко вычисляется:

$$\int_1^n \ln t\, dt = \big[t \ln t - t\big]_1^n = n \ln n - n + 1.$$

Отсюда мы получаем как оценку снизу для $n!$

$$n! > e^{n \ln n - n + 1} = e\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

так и оценку сверху

$$n! = n(n-1)! < ne^{n \ln n - n + 1} = en\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Чтобы найти асимптотику $n!$, требуется более тонкий анализ, который приводит к *формуле Стирлинга*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Здесь выражение $f(n) \sim g(n)$ означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$.

И снова существуют ее уточненные варианты, например:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51\,840n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right).$$

Оценки биномиальных коэффициентов

Как известно, непосредственно из определения биномиальных коэффициентов $\binom{n}{k}$ как числа k-подмножеств n-множества следует, что последовательность $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$:

- суммируется и $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$,
- симметрична: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Из функционального уравнения $\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$ образуют последовательность, которая симметрична и *унимодальна*: ее элементы возрастают при при-

							1							
						1		1						
					1		2		1					
				1		3		3		1				
			1		4		6		4		1			
		1		5		10		10		5		1		
	1		6		15		20		15		6		1	
1		7		21		35		35		21		7		1

Треугольник Паскаля

ближении к середине, так что средние биномиальные коэффициенты являются наибольшими:

$$1 = \binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \ldots < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} > \ldots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n} = 1.$$

Из асимптотических формул для факториалов, упомянутых выше, можно получить очень точные оценки для биномиальных коэффициентов. Однако в этой книге нам понадобятся лишь довольно грубые и простые оценки, например $\binom{n}{k} \le 2^n$ для всех k. С другой стороны, для $n \ge 2$ имеем

$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \ge \frac{2^n}{n},$$

причем равенство выполняется только при $n = 2$. В частности, для $n \ge 1$

$$\binom{2n}{n} \ge \frac{4^n}{2n}.$$

Действительно, так как центральный биномиальный коэффициент $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ является максимальным в последовательности

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{n}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n-1},$$

сумма всех n элементов которой равна 2^n, то он больше среднего значения элементов этой последовательности, равного $\frac{2^n}{n}$.

Наконец, отметим еще одну верхнюю оценку для биномиальных коэффициентов:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \le \frac{n^k}{k!} \le \frac{n^k}{2^{k-1}};$$

она довольно хороша для «малых» биномиальных коэффициентов из хвостов образуемой ими последовательности, если n велико по сравнению с k.

Литература

[1] Erdös P. *Beweis eines Satzes von Tschebyschef*. Acta Sci. Math. (Szeged), 5 (1930–32), 194–198.

[2] Graham R. L., Knuth D. E., Patashnik O. *Concrete Mathematics. A Foundation for Computer Science*. Addison-Wesley, Reading MA, 1989. [Есть русский

перевод: *Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О.* Конкретная математика. Основание информатики. М.: Мир, 1998.]

[3] Hardy G. H., Wright E. M. *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5th edition. Oxford University Press, 1979.

[4] Ribenboim P. *The New Book of Prime Number Records*. Springer-Verlag, New York, 1989.

[5*] Chebyshev P. L. *Mémoire sur les nombres premies*. Mémoires des savants étrangers de l'Acad. Imp. Sci. de St.-Pétersbourg, 1850, t. VII; J. de math. pures et appl., I série, 1852, t. XVII; русский перевод: О простых числах. В сб.: *Чебышёв П. Л.* Избранные математические труды. М.; Л.: ГИТТЛ, 1946. С. 53–72; Избранные труды. М.: Изд-во АН СССР, 1955. С. 33–54.

[6*] Chebyshev P. *Sur la fonction qui détermine la totalité des nombers premiers inférieurs à une limite donn. ee*. – Приложение III к Теории сравнений. СПб., 1849; Mémoires des savants étrangers de l'Acad. Imp. Sci. De St.-Pétersbourg, 1848, t. VI; J. de math. pures et appl., I série, 1852, t. XVII; русский перевод: Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины. В сб.: *Чебышёв П. Л.* Избранные математические труды. М.; Л.: ГИТТЛ, 1946. С. 29–52; Избранные труды. М.: Изд-во АН СССР, 1955. С. 9–32.

[7*] *Делоне Б. Н.* Петербургская школа теории чисел. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1947.

[8*] Panaitopol L. *Inequalities concerning the function $\pi(x)$: Applications*. Acta Arithmetica, 2000, v. XCIV, № 4, 373–381.