Торопись, ведь дни проходят,
Ты у времени в гостях.
Не рассчитывай на помощь,
Помни: всё в твоих руках.

Юстас Палецкис

Предисловие к первой части

Две стихии господствуют в математике – числа и фигуры с их бесконечным многообразием свойств и взаимосвязей. Задача – это почти всегда поиск, раскрытие каких-то свойств и отношений, а средства её решения – это интуиция и догадка, эрудиция и владение методами математики. Эти же качества человеческого ума воспитываются, укрепляются, обогащаются у каждого, кто регулярно отдает часть своего досуга умственной гимнастике, и лучшим видом которой является решение математических головоломок, ребусов, задач с интригующим содержанием.

В первой части книги предпочтение отдано стихии чисел. Такая одноплановость состава задач не уменьшает ни удовольствия, ни пользы от самостоятельного поиска их решения и даже от ознакомления с решениями, приведенными в книге: какое-либо из них может оказаться более изящным, чем свое.

Само возникновение понятия числа – одно из гениальнейших проявлений человеческого разума. Действительно, числа не только что-то измеряют, сравнивают, вычисляют, но даже рисуют, проектируют, сочиняют, играют, делают умозаключения, выводы.

Самые древние по происхождению числа – натуральные. «Ручейки» натуральных чисел, сливаясь, порождают безбрежный океан вещественных и разного рода особых специальных чисел.

Внутренняя красота разнообразных свойств первых обитателей этого океана – вещественных чисел – привлекла к ним внимание автора предлагаемых умственно-гимнастических упражнений. Искомое тут почти всегда число или какое-либо свойство чисел определенного вида. Некоторое пристрастие автора к большим числам вполне созвучно космической эре цивилизации. Работа с такими числами потребует обращения к справочникам, таблицам и калькуляторам, а этот навык необходим в наше время каждому.

Некоторые из предлагаемых задач близки по форме и содержанию задачам школьных учебников. Другие – по трудности – на ступеньку выше, оставаясь все же в границах доступности для учащихся 9–11 классов и всех, окончивших школу. Но и те, и другие задачи нацелены на проникновение разумом в удивительный мир чисел, на раскопку его богатств, на возбуждение математической любознательности и собственной инициативы. Упражняйтесь!

Глава 1.1

В математику тропинки одолейте без запинки

Тропинка наблюдений и поиска закономерностей

Зеленый огонек светофора, открывающего доступ к математике, зажигается для нас еще в раннем детстве вместе с таблицей умножения. И не только потому, что с помощью таблицы умножения мы начинаем учиться вычислять и преобразовывать математические выражения. Таблица умножения является одной из форм проявления закономерностей, правильностей, управляющих жизнью и направляющих нашу умственную деятельность.

Вот выучил мальчик таблицу умножения. Радость познания и жажда исследований побудили его выписать в свою тетрадь последние цифры произведения чисел 0, 1, 2, ... , 9 на 7:

$$0, 7, 4, 1, 8, 5, 2, 9, 6, 3. \qquad (*)$$

7 x 0 = **0**	7 x 5 = 3**5**
7 x 1 = **7**	7 x 6 = 4**2**
7 x 2 = 1**4**	7 x 7 = 4**9**
7 x 3 = 2**1**	7 x 8 = 5**6**
7 x 4 = 2**8**	7 x 9 = 6**3**

Вычитая из каждого последующего числа предыдущее, он обнаруживает ритмичную последовательность разностей:

7, –3, –3, опять 7, –3, –3 и опять 7, –3, –3.

Простое действие вычитания сотворило гармонию чисел!

Продолжая наблюдения, мальчик устанавливает дополнительно, что, переписав последовательность (*) в обратном порядке, он получает строку последних цифр результатов в таблице умножения на 3.

3 х 1 = **3**	3 х 6 = 1**8**
3 х 2 = **6**	3 х 7 = 2**1**
3 х 3 = **9**	3 х 8 = 2**4**
3 х 4 = 1**2**	3 х 9 = 2**7**
3 х 5 = 1**5**	3 х 0 = **0**

Мы можем сказать теперь, что этот мальчик вышел на одну из тропинок к математике, тропинку находок и маленьких открытий, объявившихся при помощи наблюдений незнакомых для себя соотношений и связей между числами или фигурами. Математика, в сущности, и занимается изучением и классификацией всевозможных закономерностей.

Что же касается искусства вычислений и преобразований, то оно всего лишь рабочее орудие математика. Впрочем, владеть им надо в совершенстве. Гаусс – «король математиков» – никогда не избегал вычислений, даже любил вычислять. Многие из его ранних открытий являются результатом наблюдений и изучения своих кропотливых вычислений.

От наблюдений над разностями чисел одного из столбиков таблицы умножения естествен шаг к испытаниям «на разность» какого-либо набора произвольно взятых чисел.

Возьмем наугад четыре натуральных числа a_1, a_2, a_3, a_4 и вычислим абсолютные значения четырех разностей «по кругу»:

$$|a_1 - a_2|, \quad |a_2 - a_3|, \quad |a_3 - a_4|, \quad |a_4 - a_1|.$$

С получившимися разностями произведем аналогичные вычисления и, повторив эту процедуру несколько раз – совсем не так уж много, – доберемся, к удивлению, всегда до четырех нулей!

Можно нарочно взять числа с контрастными разностями, например такие: 5, 1012, 98, 96, но процедура вычислений никогда не получается длительной. В данном случае

$|5 - 1012| = 1007$
$|1012 - 98| = 914$
$|98 - 96| = 2$
$|96 - 5| = 91$
$|1007 - 914| = 93$
$|914 - \ldots$

5	1012	98	96	
1007	914	2	91	
93	912	89	916	
819	823	827	823	
4	4	4	4	
0	0	0	0	– всего пять шагов.

Мы брали много других исходных «квартетов» чисел, и ни разу нам не потребовалось более 12 шагов!

Но ведь все множество натуральных чисел не испытаешь! Поэтому экспериментально обнаруженный феномен еще нельзя считать закономерным, пока не убедишься в его всеобщности. Попытайтесь!

Если самостоятельный поиск обоснования закономерного, а не случайного превращения четверок разностей в нули не приведет вас к успеху, загляните в решение задачи «Безошибочный прогноз» (с. 241).

Иной результат наблюдается для серии разностей в случае комплекта из трех произвольных натуральных чисел: в финале всегда получаются две единицы и нуль в том или ином чередовании.

П р и м е р. Пусть исходная тройка чисел $R_0 = (7, 12, 1)$.

Тогда последовательность разностей будет:

$R_1 = (5, 11, 6)$, $R_2 = (6, 5, 1)$, $R_3 = (1, 4, 5)$, $R_4 = (3, 1, 4)$,
$R_5 = (2, 3, 1)$, $R_6 = (1, 2, 1)$, $R_7 = (1, 1, 0)$, ...

Много интересных, красивых, полезных числовых соотношений, связей, результатов таится на тропинке наблюдений над простыми числами, т. е. имеющими только два делителя: единицу и самого себя (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...).

Наблюдаем: из цифр 1, 3, 6, 9 формируются 24 различных четырехзначных числа; из них только два – простые: 3169 и 3691 – хотите верьте, хотите проверьте!

Заменим цифру 6 цифрой 8, и никакая расстановка цифр 1, 3, 8, 9 не дает простого четырехзначного числа. Догадываетесь почему?

Не может не восхитить результат еще одного наблюдения.

Будем делить произведение n первых натуральных чисел ($1 \cdot 2 \cdot \ldots \times$ $\times (n-1) \cdot n = n!$ – читается «эн факториал») на их сумму ($1 + 2 + \ldots +$ $+ (n-1) + n$), краткая запись: $\sum\limits_{n=1}^{n} n$.

Наблюдаем: $n = 3$ – простое число:

$\dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$ (делится, $n + 1 = 4$ – составное число);

$\dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{10}$ (не делится, $n + 1 = 5$ – простое число);

$\dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{15}$ (делится, $n + 1 = 6$ – составное число);

$\dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{21}$ (не делится, $n + 1 = 7$ – простое число);

$\dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{28}$ (делится, $n + 1 = 8$ – составное число);

$\dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{36}$ (делится) и т. д.

Замечания в скобках подсказывают вывод-гипотезу: $n!$ ($n > 2$) *не делится* на $\sum\limits_{n=1}^{n} n$ только в том случае, когда $n + 1$ – простое число.

Ни одним примером не удается опровергнуть эту гипотезу.

Значит, надо пытаться защитить ее. (Излагаемое далее доказательство можно опустить при первом чтении.)

Запишем исследуемое частное в виде дроби:

$$\frac{n!}{1+2+\ldots+n} = \frac{(n-1)!n}{0{,}5\cdot n(n+1)} = \frac{2\cdot(n-1)!}{n+1}.$$

Если $n + 1$ – четное число, т. е. составное, то легко обосновать, что $\frac{n+1}{2} < n - 1$ и, значит, входит множителем в $(n - 1)!$

Пусть $n + 1$ – нечетное составное,

$$n + 1 = p \cdot q \quad (p, q \in N).$$

Легко видеть, что $p < n - 1$ и $q < n - 1$, следовательно, если $p \neq q$, то оба входят множителями в $(n - 1)!$; если $p = q$, т. е. $n + 1 = q^2$, то в составе $(n - 1)!$ найдется множитель q и множитель, кратный q.

Итак, гипотеза верна, числовая закономерность обоснована!

Тропинка проб и ошибок

Она проложена по преимуществу на множестве разнообразных головоломок и игр с математическим содержанием. Часто игра-задача такого рода имеет не единственное решение и может стать темой соревнования: кто найдет больше решений?

Пусть построен симметричный звездчатый n-угольник ($n \geqslant 5$). Он имеет $2n$ вершин и может называться $2n$ -вершинником. Требуется разместить в его вершинах числа 1, 2, ..., $2n$ так, чтобы получились одинаковые суммы (S_n) четверок чисел, расположенных вдоль n воображаемых прямолинейных отрезков (см. рис. 1.1 и 1.2).

Возможное значение «магической» суммы S_n можно вычислить заранее. Умножая S_n на число n воображаемых отрезков, получаем с одной стороны nS_n, а с другой удвоенную сумму всех размещаемых чисел, которая равна $(1 + 2n)2n$. Из $nS_n = (1 + 2n)2n$ следует, что $S_n = 2(1 + 2n)$. Для 5-угольной звезды $S_5 = 22$, для 6-угольной – $S_6 = 26$ и т. д. Одно из возможных решений для 7-угольной звезды представлено на рисунке 1.1. Получено оно простым подбором, иначе говоря, методом «проб и ошибок».

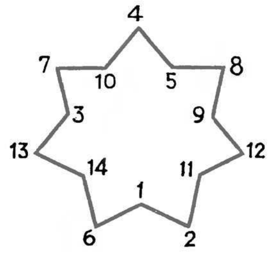

Рис. 1.1

Во всех случаях на воображаемых или построенных прямолинейных отрезках звездчатого $2n$-вершинника расположено по 4 вершины.

ЭВМ, решавшая задачу для звездчатого 12-вершинника, установила, что возможно 80 различных вариантов «магических» расположений чисел и более 2000 для 18-вершинника.

Можно провести игру-соревнование на 6-, 7-, 9-угольных звездах, но не пытайтесь составить звездчатые магические 5- и 8-угольники (10- и 16-вершинники). «Не выйдет», – разъяснила ЭВМ, – рассматривавшая и эти задачи.

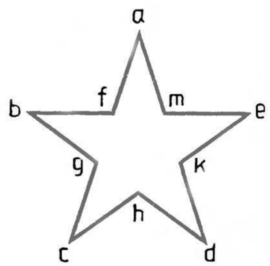

Рис. 1.2

Впрочем, несуществование решения 5-угольной звезды (рис. 1.2) нетрудно обосновать и не консультируясь с ЭВМ. Как было сказано, $S_5 = 22$, а сумма всех размещаемых чисел $1 + 2 + ... + 10 = 55$. Вычитая из 55 сумму чисел, расположенных на двух отрезках с общим элементом a, получим:

$$b + e + h = 55 - 44 + a, \quad b + e + h = 11 + a.$$

Крайние числа (1 и 10) не могут расположиться на одном отрезке, скажем, быть значениями b и e, так как в этом случае $1 + 10 + h = 11 + a$, следовательно, $h = a$, что противоречит условию задачи.

Пусть 1 и 10 расположены на разных лучах, например $a = 10$ и $b = 1$.

Тогда $10 + 11 = 1 + e + h$, следовательно, $e + h = 20$.

Но и это невозможно, так как на заданном множестве (1, ..., 10) сумма любой пары элементов меньше 20. Так доказано, что магическая 5-угольная звезда неосуществима на заданном множестве чисел.

Тропинка отсеивания несущественного

Всем известна поговорка: «Ложка дегтя портит бочку меда».

Предположим, действительно какой-то озорник из бутылки с дегтем перелил ложку дегтя в банку с медом. Перемешал тщательно, а затем такую же ложку смеси перелил из банки в бутылку с дегтем.

Чего получилось больше: меда в бутылке с дегтем или дегтя в банке с медом?

Положим теперь, что эту операцию переливания по ложке смеси туда и обратно озорнику удалось повторить несколько раз.

Наш вопрос тот же. А каков ваш ответ?

Надеемся, вы решили эту задачу?! А каким способом: арифметически или предпочли обратиться за помощью к уравнениям? На любом из этих путей, наверно, пришлось немало повозиться с дробями и преобразованиями?

Правильный ответ: одинаково. Если он у вас получился, то не показался ли неожиданным и удивительным?

Действительно, при любом числе переливаний меда в бутылке с дегтем окажется столько же, сколько дегтя в банке с медом!

Но для получения правильного ответа к этой задаче не понадобятся никакие вычисления, если отсеять из ее условия несущественные сведения – своего рода камуфляж.

Так как по условию задачи о меде и дегте переливается какое-то количество смеси из бутылки в банку и такое же количество смеси переливается обратно, то совершенно не существенно ни количество меда в банке, ни количество дегтя в бутылке, ни перемешивание, ни состав смеси в данной ее порции, ни количество переливаний туда и обратно. Суть в том, что после каждой пары переливаний объем содержимого в банке и в бутылке остается таким же, как и вначале. А если так, то очевидно, что в бутылку с дегтем должно поступить ровно столько меда, сколько дегтя из бутылки поступило в банку с медом.

Вот и все решение задачи.

Отбрасывание несущественных сведений, которыми естественно обрастает задача, возникающая из практики, до тех пор, пока останутся только существенные, делает задачу «прозрачной» для решения.

Такова суть еще одной скромной тропинки в математике.

Пересечение тропинок

Решая задачи из одной области математики, мы часто используем методы другой. Например, выявление свойств функции при помощи чертежа, в частности отыскание корней уравнения, в левой части которого дана эта функция, – пример использования геометрических методов в алгебре.

Отождествляя линию или поверхность с уравнением (ее уравнением), мы геометрические задачи решаем средствами алгебры (эта область математики так и называется: аналитическая геометрия).

Оперируя с электронной счетной машиной, мы арифметику десятичных чисел переводим в арифметику двоичных или восьмеричных чисел, а всё вместе – в динамику механизмов и электрического тока.

Рассмотрим такую задачу. На центральном поле уменьшенной шахматной доски (5×5) помещен конь (рис. 1.3). Он должен обойти всю доску, побывав на каждом поле по одному разу.

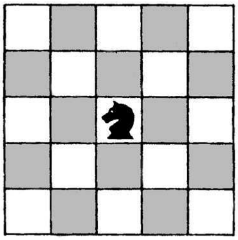

Рис. 1.3

(Если не знаете, по какому правилу перемещается шахматный конь, спросите у любого шахматиста.)

Великий математик Эйлер уделял большое внимание подобным задачам.

Конечно, нас не удовлетворит решение предложенной задачи, основанное на бессистемных попытках перемещений коня в расчете на «слепую» удачу. Ну, а на осмысленную систему действий может навести нас тропинка подбора какой-нибудь простой, наглядной интерпретации связей между пунктами последовательного перемещения коня.

Перенумеруем поля данной шахматной доски (рис. 1.4). На доске поля 13 и 14 или 13 и 8 соседние, но с точки зрения возможных перемещений коня полями, соседними с полем 13, являются поля 2 и симметричное ему 22, 4 и симметричное ему 24, 10 и 6, 20 и 16.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Рис. 1.4

Значит, сохраняя за полем 13 центральное положение, надо связать его прямыми выходами на эти поля (2, 22, 4, 24, 10, 6, 20, 16), расположив их вокруг центрального поля 13. Если теперь между этими полями и вне их расположить остальные 16 полей, стараясь сохранить симметрию шахматной доски, то может получиться, например, такая сеть, как на рисунке 1.5. Связи между соседними полями изображены отрезками прямых.

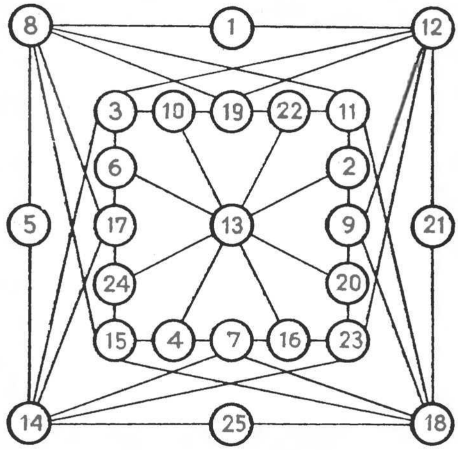

Рис. 1.5

Теперь видно, что у коня много разных маршрутов (кстати, сколько?), и легко выбрать какой-либо из них. Конь может переместиться с поля 13, например, на поле 2, далее обойти поля внутреннего прямоугольника и, наконец, внешнего. Остается только перенести выбранный маршрут на шахматную доску.

Разветвление тропинок

Тот, кто увлечен математикой, обычно не успокаивается тем, что успешно овладел изложенным в учебнике доказательством того или иного математического утверждения. Наоборот, не выходя из круга приобретенных к этому периоду времени знаний, он ищет другие способы доказательства.

Поиск вариантов доказательства обогащает нас знаниями, развивает инициативу, математическое мышление и здоровый спортивный азарт и даже может стать предметом коллекционирования.