



## ВВЕДЕНИЕ

Эта книга адресована *учащимся 10—11 классов* для подготовки к единому государственному экзамену. Материал данного пособия представлен в виде разделов, соответствующих основным темам школьного курса математики, присутствующим в ЕГЭ. Для каждой темы предложены задания части 1 и части 2 профильного уровня, а также обобщающие контрольные работы. Ко всем заданиям приведены ответы.

Тренировочные задания позволят учащимся систематически, при прохождении каждой темы, готовиться к этому экзамену. Достаточно будет в 10—11-х классах решать задания из этого пособия параллельно с темой по математике, изучаемой на школьных уроках, а в конце 11-го класса, в качестве повторения, — варианты ЕГЭ по математике.

Данное пособие может использоваться совместно с любым учебником алгебры и начал анализа и геометрии для 10—11-х классов.

Книга также будет полезна *учителям математики*, так как дает возможность эффективно организовать подготовку учащихся к единому государственному экзамену непосредственно на уроках, в процессе изучения всех тем. Можно предложить несколько вариантов работы:

— включение заданий тестового характера в систему заданий для 10—11-х классов вместе со стандартными упражнениями учебника;

— использование заданий и контрольных работ на этапе обобщающего повторения по каждой теме или на

этапе итогового повторения и подготовки к ЕГЭ в конце 11-го класса;

— контроль и коррекция знаний учащихся.

В структуре экзаменационной работы выделены две части, которые различаются по содержанию, форме записи ответа, степени сложности и числу заданий.

В данном учебном пособии также представлены две группы заданий. Формы записи ответов для разных заданий соответствуют формулировкам заданий в ЕГЭ.

Для каждого из заданий **части 1** ответом может являться целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Единицы измерений не пишут. В этом разделе содержатся задания базового уровня по материалу курса «Алгебра и начала анализа», а также задания из различных разделов математики с 5-го по 11-й класс.

Задания **части 2** требуют развернутого ответа. При оформлении решений обращают внимание на правильную запись хода решения, наличие обоснований и верный ответ. В эту группу включаются самые сложные задания по геометрии и алгебре 7—11-х классов повышенного и высокого уровней сложности.

Надеемся, что данное пособие поможет учителям математики эффективно организовать подготовку к ЕГЭ на своих уроках, а старшеклассникам — систематизировать знания по математике, самостоятельно подготовиться к экзамену и успешно его сдать.

# I. ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО КУРСУ МАТЕМАТИКИ (10—11 классы)

## 1. ТРИГОНОМЕТРИЯ

### 1.1. Тожественные преобразования тригонометрических выражений

Теоретические сведения

*Формулы одного аргумента*

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (1)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (2)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (3)$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1, \alpha \neq \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbf{Z} \quad (4)$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (5)$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (6)$$

**Формулы сложения**

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (7)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (8)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad (9)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (10)$$

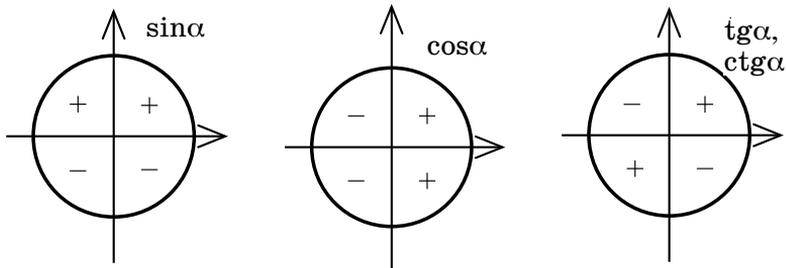
**Формулы двойного угла**

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad (11)$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (12)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} \quad (13)$$

**Знаки тригонометрических функций**



**Решение типовых заданий**

Каждый год в ЕГЭ встречаются задания на применение формул приведения. Их применяют для преобразования выражений вида

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right); \sin(\pi + \alpha); \operatorname{tg}(270^\circ + \alpha); \operatorname{ctg}(360^\circ - \alpha) \text{ и т.д.}$$

Преобразовывать подобные выражения помогает следующее правило: 1) находим четверть, в которой расположен угол, и определяем знак функции в этой четверти (угол  $\alpha$  считаем углом I четверти); 2) меняем функцию на кофункцию, если аргументом служат углы  $\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$ ,  $\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right)$ ..., или не изменяем функцию, если

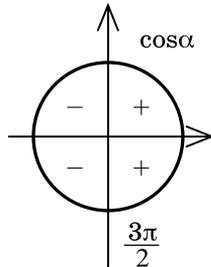
аргументом служат углы  $(\pi \pm \alpha)$ ,  $(2\pi \pm \alpha)$ ...

**Задание 1.** Упростите выражение  $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$ .

Решение.

1) Угол  $\frac{3\pi}{2} - \alpha$  лежит в III четверти, где  $\cos \alpha$  отрицателен.

2) Угол  $\frac{3\pi}{2}$  находится на вертикальной оси, поэтому «киваем головой сверху вниз», отвечая на вопрос: «Меняется название функции?» — «Да». Поэтому получаем  $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha$ .



Ответ:  $-\sin \alpha$ .

**Задание 2.** Упростите выражение  $\sin(\pi - \alpha)$ .

Решение.

1) Угол  $\pi - \alpha$  лежит во II четверти, где  $\sin \alpha$  положителен.

2) Угол  $\pi$  находится на горизонтальной оси  $\pi = 180^\circ$ , поэтому «киваем головой справа налево», отвечая на вопрос: «Меняется название функции?» — «Нет». Поэтому получаем  $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ .

**Задание 3.** Упростите выражение  $\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha)$ .

Ответ:  $-\operatorname{ctg} \alpha$ .

**Задание 4.** Упростите выражение  $\operatorname{ctg}(360^\circ - \alpha)$ .

Ответ:  $-\operatorname{ctg} \alpha$ .

Рассмотрим более сложные случаи, когда сначала используется свойство четности тригонометрических функций ( $\cos \alpha$  — четная функция,  $\sin \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha$  — нечетные функции), а затем формулы приведения.

**Задание 5.** Упростите выражение  $\sin(\alpha - \pi)$ .

Решение. Сравним выражения из заданий 2 и 5. Чтобы применить формулы приведения, используем нечетность  $\sin t$ .

$$\sin(\alpha - \pi) = -\sin(\pi - \alpha) = -\sin \alpha.$$

Ответ:  $-\sin \alpha$ .

**Задание 6.** Упростите выражение  $\cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$ .

Решение.

$$\cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha.$$

Ответ:  $-\sin \alpha$ .

**Задание 7.** Упростите выражение  $\operatorname{tg}(\alpha - 270^\circ)$ .

Решение.

$$\operatorname{tg}(\alpha - 270^\circ) = -\operatorname{tg}(270^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

Ответ:  $-\operatorname{ctg} \alpha$ .

**Задание 8.** Упростите выражение  $\operatorname{ctg}(\alpha - 360^\circ)$ .

Решение.

$$\operatorname{ctg}(\alpha - 360^\circ) = -\operatorname{ctg}(360^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha.$$

Ответ:  $\operatorname{ctg} \alpha$ .

Рассмотрим следующую ситуацию, когда, прежде чем применить формулы приведения, необходимо уменьшить аргумент, используя свойство периодичности тригонометрических функций (наименьший положительный период  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$  равен  $2\pi$ , поэтому уменьшать аргумент можно, вычитая из него числа, кратные  $2\pi$ ; наименьший положительный период  $\operatorname{ctg} \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$  равен  $\pi$ , поэтому уменьшать аргумент можно, вычитая из него числа, кратные  $\pi$ ).

**Задание 9.** Упростите выражение

$$\frac{\sin\left(\frac{9}{2}\pi - \alpha\right) - \operatorname{ctg}(5\pi + \alpha)}{\sin(\pi - \alpha) - 1}.$$

Решение.

Когда надо преобразовывать выражения в числителе и знаменателе, удобно преобразовывать отдельно числитель, отдельно знаменатель.

В числителе:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{9}{2}\pi - \alpha\right) - \operatorname{ctg}(5\pi + \alpha) &= \sin\left(4\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) - \operatorname{ctg} \alpha = \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \operatorname{ctg} \alpha = \cos \alpha - \operatorname{ctg} \alpha. \end{aligned}$$

В знаменателе:  $\sin(\pi - \alpha) - 1 = \sin \alpha - 1$ .

Разделим числитель на знаменатель, получим:  
 $\frac{\cos \alpha - \operatorname{ctg} \alpha}{\sin \alpha - 1}$ . Выражения в числителе и знаменателе содержат один и тот же аргумент  $\alpha$ , поэтому используем формулы одного аргумента (а именно:  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ ).

$$\frac{\cos \alpha - \operatorname{ctg} \alpha}{\sin \alpha - 1} = \frac{\cos \alpha - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}{\sin \alpha - 1} = \frac{\cos \alpha (\sin \alpha - 1)}{\sin \alpha (\sin \alpha - 1)} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

Ответ:  $\operatorname{ctg} \alpha$ .

Если сумма (разность) аргументов тригонометрических функций равна  $\frac{\pi}{2}$ ;  $\pi$ ;  $\frac{3}{2}\pi$  и т.д., то помогают формулы приведения.

**Задание 10.** Вычислите:  $\cos^2 15^\circ + \cos^2 75^\circ$ .

Решение.

Так как  $15^\circ + 75^\circ = 90^\circ$ , то

$$\begin{aligned} \cos^2 15^\circ + \cos^2 75^\circ &= \cos^2 (90^\circ - 75^\circ) + \cos^2 75^\circ = \\ &= \sin^2 75^\circ + \cos^2 75^\circ = 1. \end{aligned}$$

Ответ: 1.

Разобраться в обилии формул тригонометрии часто помогает сравнение аргументов тригонометрических функций, входящих в выражение.

**Задание 11.** Упростите выражение  $\frac{\sin 4\beta}{\cos 2\beta}$ .

Решение.

Аргументы числителя и знаменателя отличаются в 2 раза, значит, применим формулы двойного угла в числителе.

$$\frac{\sin 4\beta}{\cos 2\beta} = \frac{2 \sin 2\beta \cos 2\beta}{\cos 2\beta} = 2 \sin 2\beta.$$

Ответ:  $2 \sin 2\beta$ .

В заданиях на преобразования выражений, содержащих степени с натуральными показателями, сначала применяют формулы сокращенного умножения.

**Задание 12.** Упростите выражение

$$\frac{\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} - \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \operatorname{ctg}^2 \alpha.$$

Решение.

$$\begin{aligned} & \frac{\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} - \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \operatorname{ctg}^2 \alpha = \\ & = \frac{(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} - (\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha)^2 = -1 - 1 = -2. \end{aligned}$$

Ответ:  $-2$ .

### Задания для самостоятельного решения

Дайте краткий ответ. Для каждого из заданий ответом может являться целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

1. Найдите значение выражения  $3\sin^2 \beta + 10 + 3\cos^2 \beta$ .
2. Найдите значение выражения  $16 - 6\sin^2 \beta - 6\cos^2 \beta$ .
3. Вычислите:  $\cos^2 15^\circ + \cos^2 75^\circ$ .

4. Вычислите:  $\cos^2 15^\circ - \sin^2 75^\circ$ .

5. Упростите выражение  $\frac{\sin 4\beta}{\cos 2\beta} - 2\sin 2\beta + 0,29$ .

6. Вычислите:

$$\left(\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}\right) \cdot \sqrt{3} \text{ при } x = \frac{5\pi}{6}.$$

7. Дано:  $\cos \beta = 0,8$  и  $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$ . Найдите:  $\sin \beta$ .

8. Дано:  $\operatorname{tg} \beta = \frac{7}{24}$  и  $180^\circ < \beta < 270^\circ$ . Найдите:  $\cos \beta$ .

9. Дано:  $\operatorname{ctg} \beta = -1\frac{1}{3}$ . Найдите:  $\cos 2\beta$ .

10. Дано:  $\cos \alpha = -0,6$ ,  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ;  $\sin \beta = -0,6$ ,  $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$ .

Найдите:  $\sin(\alpha - \beta)$ .

11. Дано:  $\cos \alpha = -0,6$ ,  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ;  $\sin \beta = -0,6$ ,  $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$ .

Найдите:  $\cos(\alpha + \beta)$ .

12. Найдите значение выражения  $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \beta\right)$ , если  $\sin \beta = 0,11$ .

13. Найдите значение выражения  $\sin(180^\circ - \beta)$ , если  $\sin \beta = -0,24$ .

14. Найдите значение выражения  $\sin(270^\circ - \beta)$ , если  $\cos \beta = -0,41$ .
15. Найдите значение выражения  $\cos(\beta - 270^\circ)$ , если  $\sin \beta = 0,59$ .
16. Найдите значение выражения  $\operatorname{tg}^2(\alpha - \pi)$ , если  $\operatorname{ctg} \alpha = 2,5$ .
17. Найдите значение выражения  $\cos^2\left(\alpha - \frac{3}{2}\pi\right)$ , если  $\sin \alpha = 0,2$ .
18. Найдите значение выражения

$$\frac{\sin\left(\frac{13}{2}\pi - \alpha\right) - \operatorname{ctg}(6\pi + \alpha)}{1 + \sin(2\pi - \alpha)},$$

если  $\operatorname{ctg} \alpha = 8$ .

19. Найдите значение выражения

$$\frac{\sin\left(\frac{9}{2}\pi - \alpha\right) - \operatorname{ctg}(5\pi + \alpha)}{\sin(\pi - \alpha) - 1},$$

если  $\operatorname{tg} \alpha = 0,25$ .

## 1.2. Тригонометрические уравнения

Перед изучением данной темы полезно повторить теоретические сведения, изложенные в теме «Тожественные преобразования тригонометрических выражений».

### Теоретические сведения

#### Общие формулы

$$\sin x = a, -1 \leq a \leq 1 \Leftrightarrow x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbf{Z} \quad (1)$$

$$\cos x = a, -1 \leq a \leq 1 \Leftrightarrow x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbf{Z} \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + \pi k, k \in \mathbf{Z} \quad (3)$$

$$\operatorname{ctg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + \pi k, k \in \mathbf{Z} \quad (4)$$

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a \quad (5)$$

$$\operatorname{arctg}(-a) = \pi - \operatorname{arctg} a \quad (6)$$

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a \quad (7)$$

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a \quad (8)$$

#### Особые случаи

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z} \quad (9)$$

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi n, n \in \mathbf{Z} \quad (10)$$

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbf{Z} \quad (11)$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n, n \in \mathbf{Z} \quad (12)$$

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z} \quad (13)$$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z} \quad (14)$$

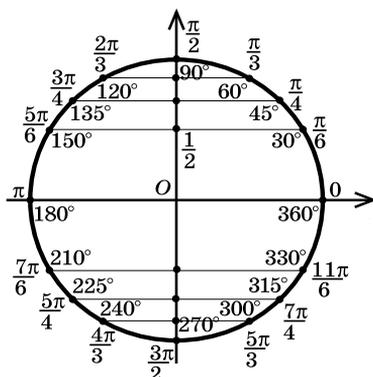
Находить значения арксинусов (арккосинусов, арктангенсов, арккотангенсов) некоторых углов помогает следующая таблица.

Угол \ Значения	0	$\frac{\pi}{6} = 30^\circ$	$\frac{\pi}{4} = 45^\circ$	$\frac{\pi}{3} = 60^\circ$	$\frac{\pi}{2} = 90^\circ$
$\arcsin \uparrow$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos \uparrow$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{arctg} \uparrow$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\operatorname{arctg} \uparrow$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Например:  $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$ .

				$\frac{\pi}{3} = 60^\circ$	
$\arcsin \uparrow$				$\frac{\sqrt{3}}{2}$	

### Тригонометрический круг



### Решение типовых заданий

Рассмотрим простейшие уравнения и на примере их решения покажем, как отвечать на дополнительные вопросы. Такие вопросы — еще одна особенность ЕГЭ по математике: обычно требуется не только решить тригонометрическое уравнение, но из полученного семейства решений выбрать те, которые удовлетворяют некоторым условиям.

#### Простейшие уравнения (дополнительные вопросы)

**Задание 1.** Решите уравнение  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Решение.** По формуле (1) имеем:

$$x = (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}; \quad x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k.$$

Ответ:  $(-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$ .

При ответах на дополнительные вопросы удобнее представить решения в виде объединения двух семейств решений:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, & k \in \mathbf{Z} \quad (1), \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, & n \in \mathbf{Z} \quad (2). \end{cases} \quad (I)$$

Дополнительные вопросы к заданию 1.

А. Найдите наименьший положительный корень.

Выбираем наименьшее положительное решение из каждого семейства. Из (1) имеем  $x = \frac{\pi}{3}$ , из (2)  $x = \frac{2\pi}{3}$ . Наименьшим из них будет  $\frac{\pi}{3}$ .

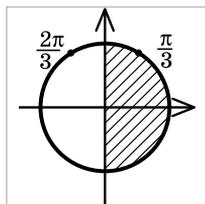
Ответ:  $\frac{\pi}{3}$  или  $60^\circ$ .

Б. Найдите наибольший отрицательный корень.

При  $k = -1$  из (1) имеем  $x = \frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{3}$ . При  $n = -1$  из (2) имеем  $x = \frac{2\pi}{3} - 2\pi = -\frac{4\pi}{3}$ . Наибольшим из них будет  $-\frac{4\pi}{3}$ .

Ответ:  $-\frac{4\pi}{3}$  или  $-240^\circ$ .

В. Укажите те корни уравнения, для которых  $\cos x > 0$ .



Отметим все решения уравнения (I) на тригонометрическом круге. Из этих решений надо выбрать те, для которых  $\cos x > 0$ . Известно, что  $\cos x > 0$ , если  $x$  лежит в I четверти или в IV четверти.

Получаем, что  $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .

Ответ:  $\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .

Г. Укажите те корни, которые лежат в промежутке  $[-3\pi; -\pi]$ .

Решим системы: 
$$\begin{cases} -3\pi \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi k \leq -\pi, & (1^*) \\ k \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

и 
$$\begin{cases} -3\pi \leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \leq -\pi, & (2^*) \\ n \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

Имеем (1\*): 
$$\begin{cases} -\frac{5}{3} \leq k \leq -\frac{2}{3}, \\ k \in \mathbf{Z} \end{cases} \Leftrightarrow k = -1 \text{ и } x = -\frac{5\pi}{3}.$$

(2\*): 
$$\begin{cases} -\frac{11}{6} \leq n \leq -\frac{5}{6}, \\ n \in \mathbf{Z} \end{cases} \Leftrightarrow n = -1 \text{ и } x = -\frac{4\pi}{3}.$$

Ответ:  $-\frac{5\pi}{3}$ ;  $-\frac{4\pi}{3}$ .

Д. Сколько корней имеет уравнение на промежутке

$\left[-3\pi; \frac{\pi}{2}\right]$ ?

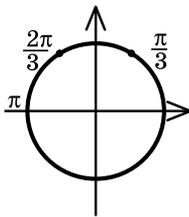
Решим системы: 
$$\begin{cases} -3\pi \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi k \leq \frac{\pi}{2}, & (1^{**}) \\ k \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

и 
$$\begin{cases} -3\pi \leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \leq \frac{\pi}{2}, & (2^{**}) \\ n \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

Решением (1\*\*) являются  $k = -1$  и  $k = 0$ . Решением (2\*\*) является  $n = -1$ . Таким образом, получаем  $2 + 1 = 3$  корня.

Ответ: 3 корня.

Е. Найти ближайший к  $\pi$  корень уравнения.



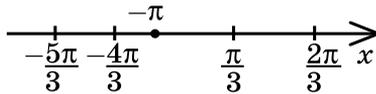
Отметим все корни уравнения (I) на тригонометрическом круге.

Искомым корнем является  $\frac{2\pi}{3}$ .

Ответ:  $\frac{2\pi}{3}$ .

Ж. Между какими корнями заключено число  $-\pi$ ?

Отметим корни уравнения (I) на координатной прямой.



Ответ:  $-\frac{4\pi}{3} < -\pi < \frac{\pi}{3}$ .

**Задание 2.** Решите уравнение  $\sin(\pi - x) + \cos(\frac{\pi}{2} + x) = -1$ .

**Решение.** При решении тригонометрических уравнений полезно упростить аргумент. В данном случае применить формулы приведения (см. «Тожественные преобразования тригонометрических выражений» в разделе 1.1). Имеем:

$$\sin x + \sin x = -1, \sin x = -\frac{1}{2}.$$

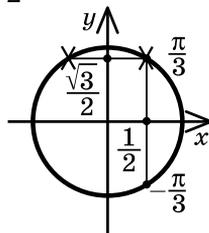
По формуле (1) для решения простейших уравнений

$$x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

**Задание 3.** Решите уравнение  $\frac{\cos x - \frac{1}{2}}{\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}} = 0$ .

Решение.  $\frac{\cos x - \frac{1}{2}}{\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2}, \\ \sin x \neq \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$



Отмечаем решения системы на тригонометрическом круге.

Ответ:  $-\frac{\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}$ .

**Задание 4.** Решите уравнение  $\frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi^2 - x^2}} = 0$ .

Решение.  $\frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi^2 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \pi n, n \in \mathbf{Z}, \\ \pi^2 - x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} n \quad (1), \\ x^2 < \pi^2 \quad (2). \end{cases}$

Решением неравенства (2) является промежуток  $(-\pi; \pi)$ . Отберем решения уравнения (1), принадлежащие промежутку  $(-\pi; \pi)$ . Это 0 и  $\pm \frac{\pi}{2}$ .

Ответ: 0;  $\pm \frac{\pi}{2}$ .

При решении тригонометрических уравнений необходимо помнить, что функции  $\operatorname{tg} t$  или  $\operatorname{ctg} t$  существуют не при всех действительных значениях  $t$ .

**Задание 5.** Решите уравнение

$$\left( \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left( \operatorname{tg} \left( x - \frac{\pi}{4} \right) - 1 \right) = 0.$$

Решение. Произведение равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю, а другой при этом существует.

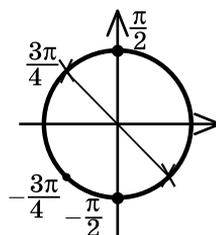
$$\left( \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left( \operatorname{tg} \left( x - \frac{\pi}{4} \right) - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \operatorname{tg} \left( x - \frac{\pi}{4} \right) - 1 = 0, \\ \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}, \\ x \neq \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

При решении системы используем тригонометрический круг.

Решение системы:

$$x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}, x = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbf{Z}.$$



Ответ:  $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}; \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbf{Z}.$

Обратимся к более сложным уравнениям. Сначала рассмотрим общие методы решения уравнений, присущие как тригонометрическим, так и показательным и логарифмическим уравнениям, а затем обратимся к специальным методам, характерным только для тригонометрических уравнений.

### *Метод введения новой переменной*

**Задание 6.** Укажите наибольший отрицательный корень уравнения  $\cos^2(\pi - x) - 2\sin x + 2 = 0$ . Ответ запишите в градусах.

**Решение.** Упростим аргумент, применив формулы приведения:  $\cos^2 x - 2\sin x + 2 = 0$ . В левой части уравнения присутствуют две тригонометрические функции. Уменьшим количество функций.

Используем основное тригонометрическое тождество:  $1 - \sin^2 x - 2\sin x + 2 = 0$ . Получим квадратное уравнение относительно  $\sin x$ .

Введем новую переменную. Пусть  $a = \sin x$ ,  $-1 \leq a \leq 1$  (\*), тогда уравнение примет вид  $a^2 + 2a - 3 = 0$ .

Решая квадратное уравнение, получим  $a = -3$  или  $a = 1$ .  $a = -3$  не удовлетворяет условию (\*).

Если  $a = 1$ , то  $\sin x = 1$  и  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ . Вспомните, что необходимо указать в ответе.

Наибольший отрицательный корень получим при  $k = 1$ . Он равен  $\frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3}{2}\pi$ . Переведем в градусную меру, получим  $-270^\circ$ .

Ответ:  $-270^\circ$ .

**Задание 7.** Сколько корней имеет уравнение

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 3 \cos 2x = 2 \text{ на отрезке } \left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]?$$

**Решение.** Сначала упростим аргумент, т.е. применим формулы приведения:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 3 \cos 2x = 2, \quad \sin x - 3 \cos 2x = 2.$$

Далее сравним аргументы, так как аргументы  $\sin x$  и  $\cos 2x$  отличаются в два раза, применим формулы двойного угла (см. «Тожественные преобразования тригонометрических выражений» в разделе 1.1).

$$\sin x - 3(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2.$$

Теперь в уравнении две функции. Уменьшим число функций.

$$\sin x - 3(1 - \sin^2 x - \sin^2 x) = 2.$$

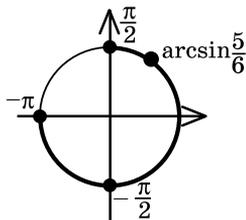
Пусть  $a = \sin x$ ,  $-1 \leq a \leq 1$ . Решим уравнение

$$6a^2 + a - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1, \\ a = \frac{5}{6}. \end{cases}$$

Получим: 
$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}, \\ x = (-1)^m \arcsin \frac{5}{6} + \pi m, m \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Отберем корни, принадлежащие отрезку  $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$ . Так как длина отрезка  $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$  меньше  $2\pi$ , то можно использовать не координатную прямую, а тригонометрический круг.

Этому отрезку принадлежат два корня:  $-\frac{\pi}{2}, \arcsin \frac{5}{6}$ .



Ответ: 2 корня.

### Метод разложения на множители

**Задание 8.** Между какими корнями уравнения  $\sin 2x + \sin(-x) = 2 \cos(-x) - 1$  заключено число  $\frac{5\pi}{12}$ ?

**Решение.** Сначала упростим аргумент, используя свойство четности (нечетности) функций ( $\cos x$  — четная функция,  $\sin x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$  — нечетные функции).  
 $\sin 2x + \sin(-x) = 2 \cos(-x) - 1,$   
 $\sin 2x - \sin x - (2 \cos x - 1) = 0.$

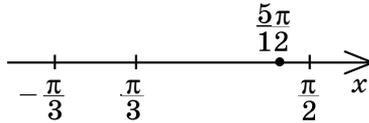
Сравним аргументы тригонометрических функций. Применим формулы двойного угла.

$$\begin{aligned} 2 \sin x \cos x - \sin x - (2 \cos x - 1) &= 0, \\ \sin x(2 \cos x - 1) - (2 \cos x - 1) &= 0, \\ (2 \cos x - 1)(\sin x - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Уравнение имеет следующие корни:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}, \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Отметим корни на координатной прямой.



Получим, что  $\frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$ .

Ответ:  $\frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$ .

### Метод решения однородных уравнений

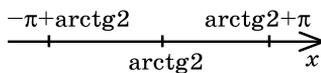
**Задание 9.** Найдите наименьшую длину отрезка, на котором есть два корня уравнения  $\sin x - 2\cos x = 0$  (\*).

**Решение.** Исходное уравнение является однородным уравнением 1-й степени, решается делением на  $\cos x$  или на  $\sin x$  ( $\cos x \neq 0$ , иначе  $\cos x = 0$ , и при подстановке в уравнение (\*) получим, что и  $\sin x = 0$ , а это противоречит основному тригонометрическому тождеству  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ).

Разделим обе части уравнения на  $\cos x$  ( $\cos x \neq 0$ ).

Получим:  $\operatorname{tg} x - 2 = 0$ ,  $\operatorname{tg} x = 2$ ,  $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .

Отметим корни уравнения на координатной прямой.



Наименьшая длина  $\pi + \operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg} 2 = \pi$ .

Ответ:  $\pi$ .

**Задание 10.** Решите уравнение

$$1 - \sin(-x) \cdot \cos x - 3 \cos^2(-x) = 0.$$

**Решение.** Упростим аргумент, используя свойства четности  $\cos x$  и нечетности  $\sin x$ . Получим:

$$\begin{aligned} 1 + \sin x \cdot \cos x - 3 \cos^2 x &= 0. \\ \sin^2 x + \cos^2 x + \sin x \cdot \cos x - 3 \cos^2 x &= 0. \\ \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 2 \cos^2 x &= 0. \end{aligned}$$

Получим однородное уравнение 2-й степени, которое решается делением, например на  $\cos^2 x$ .

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0.$$

Введем новую переменную  $a = \operatorname{tg} x$ . Получим, что  $\operatorname{tg} x = 1$ ,  $\operatorname{tg} x = -2$ .

Ответ:  $\frac{\pi}{4} + \pi m, m \in \mathbf{Z}; -\operatorname{arctg} 2 + \pi n, n \in \mathbf{Z}$ .

*Замечание.* Уравнения  $\cos x = -2$ ,  $\sin x = -2$  не имеют решений, а уравнения  $\operatorname{tg} x = -2$ ,  $\operatorname{ctg} x = -2$  имеют бесконечное число решений.

Уравнения

$$\sin^2 x + \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0 \tag{1}$$

и

$$\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x = 0 \tag{2}$$

являются однородными, но если уравнение (1) решается с помощью деления (на  $\cos^2 x \neq 0$ ), то уравнение (2) решается с помощью разложения на множители (иначе можно потерять корни  $\pi m, m \in \mathbf{Z}$ ), а только затем делением (например, на  $\sin x \neq 0$ ).

### Задания для самостоятельного решения

Дайте краткий ответ. Для каждого из заданий ответом может являться целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

1. Укажите наибольший отрицательный корень уравнения  $2\sin x + 1 = 0$ . Ответ запишите в градусах.
2. Укажите наименьший положительный корень уравнения  $\sqrt{3} \operatorname{ctg} x + 3 = 0$ . Ответ запишите в градусах.
3. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения  $2\sqrt{3} \operatorname{tg} x - 6 = 0$ . Ответ запишите в градусах.
4. Найдите наименьший положительный корень уравнения  $\cos(2x) = 0,5$ . Ответ запишите в градусах.
5. Укажите наименьший положительный корень уравнения  $\sin(4x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Ответ запишите в градусах.
6. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения  $\cos(2x)\cos x - \sin(2x)\sin x = 1$ . Ответ запишите в градусах.
7. Укажите число корней уравнения  $\sin 200x \cos 199x - \cos 200x \sin 199x = 0$ , принадлежащих промежутку  $[0; 4\pi]$ .
8. Укажите число корней уравнения  $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x + \cos x = 0$ , принадлежащих промежутку  $[0; 2\pi]$ .
9. Укажите ближайший к 0 корень уравнения  $2\sin x + 1 = 0$ . Ответ запишите в градусах.
10. Укажите ближайший к  $\frac{\pi}{2}$  корень уравнения  $2\cos x + \sqrt{3} = 0$ . Ответ запишите в градусах.
11. Укажите ближайший к  $\pi$  корень уравнения  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Ответ запишите в градусах.
12. Укажите ближайший к  $\pi$  корень уравнения  $\sin x = \frac{-3}{2\sqrt{3}}$ . Ответ запишите в градусах.

13. Укажите число корней уравнения  $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ , которые лежат в промежутке  $[0; 3\pi]$ .
14. Укажите количество корней уравнения  $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ , которые лежат в промежутке  $[-\pi; 2\pi]$ .
15. Укажите число корней уравнения  $\sin x = \frac{1}{3}$  на промежутке  $[0; \pi]$ .
16. Укажите число корней уравнения  $\sin x = \frac{1}{3}$  на промежутке  $[\pi; 2\pi]$ .
17. Укажите число корней уравнения  $\operatorname{tg} x = 2$  на промежутке  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .
18. Укажите ближайший к  $\frac{\pi}{6}$  корень уравнения  $\cos(4x) = 1$ . Ответ запишите в градусах.
19. Найдите сумму корней уравнения  $\cos(x + 2000\pi) = 0$ , принадлежащих промежутку  $[0; 2\pi]$ . Ответ запишите в градусах.
20. Укажите наименьший положительный корень уравнения  $\operatorname{tg}(2x - 10^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Ответ запишите в градусах.
21. Решите уравнение  $\cos(\pi x) = 1$ . В ответе укажите произведение корней уравнения, принадлежащих промежутку  $(1; 6)$ .
22. Решите уравнение  $\sin(\pi x) = 1$ . В ответе укажите сумму корней уравнения, принадлежащих промежутку  $(1; 6)$ .

23. Укажите наименьший положительный корень уравнения  $\sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -1$ . Ответ запишите в градусах.
24. Укажите наименьший положительный корень уравнения  $\frac{\cos x - \frac{1}{2}}{\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}} = 0$ . Ответ запишите в градусах.
25. Определите число корней уравнения  $\frac{\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}} = 0$  из промежутка  $[0; 2\pi]$ .
26. Определите число корней уравнения  $\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} = 0$  из промежутка  $[0; 2\pi]$ .
27. Сколько корней имеет уравнение  $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}-2} + 2$  на промежутке  $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$ ?
28. Сколько корней имеет уравнение  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 3\cos 2x = 2$  на отрезке  $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$ ?
29. Укажите наименьший положительный корень уравнения  $(\cos x - 2)\sin \pi x = 0$ .
30. Укажите корень уравнения  $(\sin 2x + \sqrt{2})\cos \pi x = 0$ , принадлежащий промежутку  $[2; 3]$ .
31. Укажите корень уравнения  $\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , принадлежащий промежутку  $(0; \pi)$ . Ответ запишите в градусах.

32. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения  $\cos x + \cos(2x) = 2$ . Ответ запишите в градусах.

33. Укажите наименьший положительный корень уравнения  $2\cos^2(\pi - x) + 5\sin x - 4 = 0$ . Ответ запишите в градусах.

34. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения  $\cos(2x) + 5\cos(-x) + 3 = 0$ . Ответ запишите в градусах.

35. Найдите сумму корней уравнения

$$\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0,$$

принадлежащих промежутку  $[-\pi; \pi]$ . Ответ запишите в градусах.

36. Укажите число корней уравнения

$$\sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sqrt{3},$$

принадлежащих промежутку  $[-\pi; 2\pi]$ .

37. Укажите наименьший положительный корень уравнения  $3\cos x + \sin(-2x) = 0$ . Ответ запишите в градусах.

38. С помощью графиков укажите число корней уравнения  $\sin(2x) = x$ .

39. С помощью графиков укажите число корней уравнения  $\cos x = 10x$ .

40. Укажите число корней уравнения  $\frac{\sin x - \frac{1}{2}}{\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}} = 0,$

принадлежащих промежутку  $[-2\pi; 0]$ .

41. Укажите число корней уравнения  $6\sin^2 x + 5\sin x \cos x + 3\cos^2 x = 2$ , принадлежащих промежутку  $[-\pi; 0]$ .

42. Укажите число корней уравнения  $\operatorname{tg}(3x) = \operatorname{tg} x$  из промежутка  $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ .

43. Решите уравнение  $4\cos x = x^2 + 4$ .

44. Решите уравнение  $\sin\left(\frac{37\pi}{2} + x\right) = 3x^2 + 1$ .

45. Найти наибольший отрицательный корень уравнения:  $(2\cos x - 1) \cdot \sqrt{\sin x} = 0$ . Ответ запишите в градусах.

46. Найдите сумму различных корней уравнения  $\cos x \cos(5x) = \cos(6x)$ , принадлежащих промежутку  $[0; \pi]$ . Ответ запишите в градусах.

47. Укажите число корней уравнения

$$\left(\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1\right) = 0,$$

принадлежащих промежутку  $[0; 2\pi]$ .

48. Найдите сумму корней уравнения  $\sin(2x)(\operatorname{tg} x - 1) = 0$ , принадлежащих промежутку  $[0; 2\pi]$ . Ответ запишите в градусах.

49. Найдите сумму корней уравнения  $\sin(2\pi x) + 6\cos(\pi x) = 3 + \sin(\pi x)$ , принадлежащих промежутку  $[-20; 20]$ .

50. Найдите сумму корней уравнения  $\cos(2\pi x) - 3\sin(\pi x) + 1 = 0$ , принадлежащих промежутку  $[0; 20]$ .

51. Решите уравнение  $x^2 + y^2 + \cos^2 x = 2xy$ .

52. Решите уравнение  $\frac{42x^2 + \pi x - \pi^2}{\sqrt{\sin x + 1}} = 0$ .

53. Решите уравнение  $\frac{\sqrt{\sin x} - 1}{2\pi x - \pi^2} = 0$ .

54. Решите уравнение  $\frac{\cos x - \sin x}{4x - \pi} = 0$ .

55. Решите уравнение  $\frac{3\cos x + \cos 2x - 1}{\operatorname{tg} x - \sqrt{3}} = 0$ .

56. Решите уравнение  $\frac{\operatorname{tg} x - \sqrt{3}}{3\cos x + \cos 2x - 1} = 0$ .

57. Решите уравнение  $\frac{12\operatorname{ctg} x - 5}{13\sin x - 12} = 0$ .

58. Решите уравнение  $\frac{13\sin x - 12}{12\operatorname{ctg} x - 5} = 0$ .

### КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

#### Вариант 1

Ответом в заданиях этой группы может быть целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

1. Дано:  $\cos \alpha = -0,8$  и  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Найдите  $\sin \alpha$ .
2. Какое число из промежутка  $(0; 1,4)$  не входит в область определения функции  $y = \operatorname{tg}(\pi x)$ ?
3. Найдите наименьшее значение функции  $y = \sin x$  на промежутке  $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}\right]$ .

4. Укажите наибольшее целое число, не превосходящее  $\cos 61^\circ$ .
5. Укажите наибольший отрицательный корень уравнения  $2\cos(\pi - x) - \sqrt{3} = 0$ . Ответ запишите в градусах.
6. Найдите значение выражения  $\frac{\sin(x+y)}{\sin x \sin y}$ , если  $\operatorname{ctg} x = 15$ ,  $\operatorname{ctg} y = -13$ .
7. Найдите наименьшее значение функции  $y = \frac{15}{\sin x - 4}$ .
8. Укажите число корней уравнения  $\frac{\sin x}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}} = 0$ .
9. Укажите наибольшее целое значение  $a$ , при котором уравнение  $(a - 2) \sin x = a^2 - 4$  имеет хотя бы одно решение.

Запишите решение с полным его обоснованием.

10. Укажите корни уравнения  $0,5\sin 2x \operatorname{ctg} x - \cos x = \sin^2 x$ , принадлежащие промежутку  $[0; \pi]$ .

## Вариант 2

Ответом в заданиях этой группы может быть целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

1. Дано:  $\sin \beta = 0,8$  и  $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ . Найдите  $\cos \beta$ .

2. Какое число из промежутка  $(0,4; 1,8)$  не входит в область определения функции  $y = \operatorname{ctg}(\pi x)$ ?
3. Найдите наименьшее значение функции  $y = \cos x$  на промежутке  $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ .
4. Укажите наибольшее целое число, не превосходящее  $\sin(-4^\circ)$ .
5. Укажите наименьший положительный корень уравнения  $2\sin(\pi + x) - 1 = 0$ . Ответ запишите в градусах.
6. Найдите значение выражения  $\frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}$ , если  $\operatorname{tg} x = 19$ ,  $\operatorname{tg} y = -17$ .
7. Найдите наибольшее значение функции  $y = \frac{15}{\sin x + 4}$ .
8. Сколько корней имеет уравнение  $\frac{\sin x}{\sqrt{\pi^2 - x^2}} = 0$ ?
9. Укажите наименьшее целое значение  $a$ , при котором уравнение  $(a + 4)\cos x = a^2 - 16$  имеет хотя бы одно решение.

Запишите решение с полным его обоснованием.

10. Укажите число корней уравнения  $0,5\sin(2x)\operatorname{tg} x - \sin x = \cos^2 x$ , принадлежащих промежутку  $[-\pi; \pi]$ .

## 2. АЛГЕБРА

### 2.1. Тожественные преобразования логарифмических выражений

#### Теоретические сведения

Определение. Логарифмом числа  $b$  по основанию  $a$  ( $a > 0$ ;  $a \neq 1$ ) называется показатель степени, в которую надо возвести число  $a$ , чтобы получить  $b$ :

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b.$$

$\lg b$  — обозначение десятичного логарифма, т.е. логарифма числа  $b$  по основанию 10,  $\ln b$  — обозначение натурального логарифма, т.е. логарифма числа  $b$  по основанию  $e$  ( $e \approx 2,7\dots$ ).

Основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a b} = b \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0).$$

Свойства логарифмов ( $a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0$ ):

$$1) \log_a a = 1$$

$$2) \log_a 1 = 0$$

$$3) \log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

$$4) \log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

$$5) \log_a b^p = p \cdot \log_a b$$

$$6) \log_{a^q} b = \frac{1}{q} \cdot \log_a b, q \neq 0$$

$$7) \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, c \neq 1$$

$$8) \log_a b = \frac{1}{\log_b a}, b \neq 1$$

$$9) a^{\log_b c} = c^{\log_b a}, c \neq 1, b \neq 1$$

### Решение типовых заданий

**Задание 1.** Найдите значение выражения  $\log_{0,3} \frac{1}{0,09}$ .

Решение.

Преобразуем выражение и используем определение логарифма:

$$\log_{0,3} (0,09)^{-1} = \log_{0,3} ((0,3)^2)^{-1} = \log_{0,3} (0,3)^{-2} = -2.$$

Ответ:  $-2$ .

**Задание 2.** Найдите значение выражения  $\log_2 \log_2 \sqrt[4]{2}$ .

Решение.

Преобразуем выражение, начиная с внутреннего логарифма, и воспользуемся определением логарифма:

$$\log_2 \log_2 \sqrt[4]{2} = \log_2 \log_2 2^{\frac{1}{4}} = \log_2 \left( \frac{1}{4} \log_2 2 \right) = \log_2 \frac{1}{4} = -2.$$

Ответ:  $-2$ .

Для преобразования суммы (или разности) логарифмических выражений иногда достаточно использовать определение логарифма, а чаще свойства логарифма (3) и (4). Если основания логарифмов разные, то можно привести логарифмы к одному основанию и затем применить свойства (3) и (4).

**Задание 3.** Найдите значение выражения

$$\log_3 81 - \log_3 27.$$

Решение.

*1-й способ.* Используя определение логарифма, получим  $\log_3 81 - \log_3 27 = 4 - 3 = 1$ .

*2-й способ.* Используя свойство (4) логарифма, получим

$$\log_3 81 - \log_3 27 = \log_3 \frac{81}{27} = \log_3 3 = 1.$$

Ответ: 1.

**Задание 4.** Найдите значение выражения

$$\log_3 15 - \log_3 \frac{5}{9} + \log_3 \frac{1}{81}.$$

Решение.

Преобразуем выражение с помощью свойства (4) логарифма:

$$\begin{aligned} \log_3 15 - \log_3 \frac{5}{9} + \log_3 \frac{1}{81} &= \log_3 \left( 15 : \frac{5}{9} \right) + \log_3 \frac{1}{81} = \\ &= \log_3 27 + \log_3 \frac{1}{81} = 3 + (-4) = -1. \end{aligned}$$

Ответ: -1.

Основное логарифмическое тождество используется при преобразовании выражений, содержащих логарифм в показателе степени. Идея таких преобразований заключается в получении равных основания степени и основания логарифма.

**Задание 5.** Найдите значение выражения  $10^{1-\lg 5}$ .

Решение.

Используя свойства степеней и основное логарифмическое тождество, получим

$$10^{1-\lg 5} = \frac{10^1}{10^{\lg 5}} = \frac{10}{5} = 2.$$

Ответ: 2.

**Задание 6.** Вычислите:  $\sqrt{5^{\log_5 16}}$ .

Решение.

Преобразуем выражение, используя свойства степеней:

$$\sqrt{5^{\log_5 16}} = 5^{\frac{1}{2} \log_5 16} = \left(5^{\log_5 16}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Применяя основное логарифмическое тождество, получим  $\left(5^{\log_5 16}\right)^{\frac{1}{2}} = 16^{\frac{1}{2}} = 4$ .

Ответ: 4.

**Задание 7.** Найдите значение выражения  $7^{\log_{\frac{1}{49}} \frac{1}{4}}$ .

Решение.

Используя свойство (6) логарифма и основное логарифмическое тождество, получим

$$7^{\log_{\frac{1}{49}} \frac{1}{4}} = 7^{\log_{(\tau)^{-2}} \frac{1}{4}} = \left(7^{\log_7 \frac{1}{4}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = 2.$$

Ответ: 2.

Иногда можно легко перейти от одного основания логарифма к другому с помощью свойства логарифма (6), например от  $\log_9 a$  к  $0,5 \log_3 a$ , т. к.  $(9=3^2)$ . В других случаях следует использовать свойства (7) или (8).

**Задание 8.** Найдите значение выражения

$$(\log_5 36 + \log_5 2 - \log_5 8) \cdot \log_9 \frac{1}{25}.$$

Решение.

Преобразовав выражение в скобках с помощью свойств (3) и (4), получим

$$(\log_5 36 + \log_5 2 - \log_5 8) = \log_5 \frac{36 \cdot 2}{8} = \log_5 9.$$

Используем формулу (7) перехода к новому основанию.

1-й способ.

$$\log_5 9 \cdot \log_9 \frac{1}{25} = \log_5 9 \cdot \frac{\log_5 \frac{1}{25}}{\log_5 9} = \log_5 \frac{1}{25} = -2.$$

2-й способ.

$$\log_5 9 \cdot \log_9 \frac{1}{25} = \frac{\log_9 9}{\log_9 5} \cdot \log_9 \frac{1}{25} = \frac{1 \cdot \log_9 \frac{1}{25}}{\log_9 5} = \log_5 \frac{1}{25} = -2.$$

3-й способ. Используя свойство (5), получим

$$\log_5 9 \cdot \log_9 \frac{1}{25} = \log_5 9 \cdot (-2) \log_9 5 = -2.$$

Ответ:  $-2$ .

**Задание 9.** Найдите значение выражения

$$\log_3 12 - \log_3 7 \cdot \log_7 5 \cdot \log_5 4.$$

Решение.

Преобразуем вычитаемое с помощью применения дважды формулы перехода к новому основанию:

$$\begin{aligned} \log_3 7 \cdot \log_7 5 \cdot \log_5 4 &= \log_3 7 \cdot \frac{\log_3 5}{\log_3 7} \cdot \log_5 4 = \\ &= \log_3 5 \cdot \log_5 4 = \log_3 5 \cdot \frac{\log_3 4}{\log_3 5} = \log_3 4. \end{aligned}$$

Первоначальное выражение теперь имеет вид

$$\log_3 12 - \log_3 4 = \log_3 \frac{12}{4} = 1.$$

Ответ: 1.

В заданиях, требующих выразить некоторое логарифмическое выражение через одно или два заданных значения логарифма, обычно надо использовать свойства логарифма произведения или частного (3) и свойство (8) перехода к новому основанию.

**Задание 10.** Чему равен  $\lg 15$ , если  $\lg 2 = a$ ,  $\lg 3 = b$ .

Решение.

Выразим  $\lg 15$  через  $\lg 2$  и  $\lg 3$ , учитывая, что

$$15 = 3 \cdot 5 = 3 \left( \frac{10}{2} \right).$$

$$\begin{aligned} \lg 15 &= \lg(3 \cdot 5) = \lg 3 + \lg 5 = \lg 3 + \lg \left( \frac{10}{2} \right) = \\ &= \lg 3 + \lg 10 - \lg 2 = b + 1 - a. \end{aligned}$$

Ответ:  $b + 1 - a$ .

Наибольшую сложность представляют преобразования логарифмических выражений, находящихся под радикалом. В процессе преобразований приходится рассматривать модули логарифмических выражений, для раскрытия которых требуется сравнить иррациональные числа (например,  $\log_2 3$  и  $\log_3 2$ ) или рациональное и иррациональное числа (например,  $\log_2 3$  и 1).

**Задание 11.** Представьте в виде разности логарифмов

$$\left( (\log_3^4 2 + \log_2^4 3 + 2)^{\frac{1}{2}} - 2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Решение.

Будем действовать последовательно. Рассмотрим выражение  $\log_3^4 2 + \log_2^4 3 + 2$ . Перейдем к основанию 3:

$$\log_3^4 2 + \log_2^4 3 + 2 = \log_3^4 2 + \frac{1}{\log_3^4 2} + 2.$$

Приведем к общему знаменателю и применим формулу квадрата суммы двух выражений. Получим:

$$\left( \frac{\log_3^4 2 + 1}{\log_3^2 2} \right)^2.$$

$$\text{Имеем: } (\log_3^4 2 + \log_2^4 3 + 2)^{0.5} = \frac{\log_3^4 2 + 1}{\log_3^2 2}.$$

Тогда:

$$(\log_3^4 2 + \log_2^4 3 + 2)^{0.5} - 2 = \frac{\log_3^4 2 + 1 - 2 \log_3^2 2}{\log_3^2 2} = \left( \frac{\log_3^2 2 - 1}{\log_3 2} \right)^2.$$

Окончательно получаем:

$$\left( (\log_3^4 2 + \log_2^4 3 + 2)^{0.5} - 2 \right)^{0.5} = \left| \frac{\log_3^2 2 - 1}{\log_3 2} \right|.$$

Раскрываем модули, учитывая, что  $0 < \log_3 2 < 1$  и  $0 < \log_3^2 2 < 1$ ,

$$A = \frac{1 - \log_3^2 2}{\log_3 2} = \frac{1}{\log_3 2} - \log_3 2 = \log_2 3 - \log_3 2.$$

Ответ:  $\log_2 3 - \log_3 2$ .

### Задания для самостоятельного решения

Дайте краткий ответ. Для каждого из заданий ответом может являться целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

1. Вычислите:  $\log_{0,3} \frac{1}{0,09}$ .

2. Вычислите:  $\log_2 \log_2 \sqrt[4]{2}$ .
3. Вычислите:  $\log_{625} 25$ .
4. Вычислите:  $\log_5 125$ .
5. Вычислите:  $\log_6 8 - \log_6 2 + \log_6 9$ .
6. Вычислите:  $\log_5 8 - \log_5 2 + \log_5 \frac{25}{4}$ .
7. Найдите значение выражения  $\log_3 81 - \log_3 27$ .
8. Найдите значение выражения
 
$$\log_3 15 - \log_3 \frac{5}{9} + \log_3 \frac{1}{81}.$$
9. Вычислите:  $\log_{35} 7 + \frac{1}{\log_5 35}$ .
10. Укажите значение выражения  $\log_{\sqrt{7}} \frac{1}{7} + 3^{\log_3 7}$ .
11. Укажите значение выражения  $\log_{\sqrt{7}} \frac{1}{7} + 3^{\log_{\sqrt{3}} 7}$ .
12. Укажите значение выражения  $\log_{36} 16 - \log_6 \frac{1}{9}$ .
13. Вычислите:  $(\sqrt{5})^{\log_5 16}$ .
14. Вычислите:  $2^{\log_{\sqrt{2}} 3}$ .
15. Найдите значение выражения  $10^{1-\lg 5}$ .

16. Укажите значение выражения  $(\sqrt{6})^{\frac{2}{\log_9 6}}$ .

17. Найдите значение выражения

$$(\log_5 36 + \log_5 2 - \log_5 8) \cdot \log_9 \frac{1}{25}.$$

18. Найдите значение выражения

$$\log_3 12 - \log_3 7 \cdot \log_7 5 \cdot \log_5 4.$$

19. Укажите значение выражения  $\left(\frac{1}{3}\right)^{4\log_1 \frac{2}{3}}$ .

20. Укажите значение выражения  $\log_8 \log_4 \log_2 16$ .

21. Укажите значение выражения  $\log_2 \frac{2}{3} + \log_4 \frac{9}{4}$ .

22. Укажите значение выражения  $\log_{0,5} 32 - \log_7 \frac{\sqrt{7}}{49}$ .

23. Укажите значение выражения  $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}}$ .

24. Укажите значение выражения

$$2^{\log_8 125} + \log_2 \log_5 \sqrt[8]{5}.$$

25. Укажите значение выражения  $\frac{\lg 128}{\lg 4}$ .

26. Укажите значение выражения  $\log_6 \frac{36}{a}$ , если

$$\log_6 a = -6.$$

27. Найдите значение выражения  $\log_c(16c^2)$ , если  $\log_c 2 = -3$ .

28. Найдите значение выражения  $\log_a \frac{81}{a^4}$ , если  $\log_a 3 = 2$ .

29. Найдите значение выражения

$$(0,1)^{\lg 0,1} - 10^{\log_{1000} 64} + 10 \cdot 100^{\frac{1}{2} \lg 9 - \lg 2}.$$

30. Найдите значение выражения

$$3 \log_2 49 \cdot \log_7 2 - 2^{\lg 2} \cdot 5^{\lg 2}.$$

31. Найдите значение выражения

$$4\sqrt{3} + 5^{\log_5 \frac{3}{5}} - 15^{0,5 + \log_{15} \frac{4}{\sqrt{5}}}.$$

32. Найдите значение выражения  $\frac{\log_2 4 + \log_2 \sqrt{10}}{\log_2 20 + 3 \log_2 2}$ .

33. Найдите значение выражения

$$\log_9 15 + \log_9 18 - 2 \log_9 \sqrt{10}.$$

34. Найдите значение выражения

$$6 \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7.$$

35. Найдите значение выражения

$$\log_2 14 - \log_2 5 \cdot \log_5 3 \cdot \log_3 7.$$

36. Найдите значение выражения

$$(\log_3 4 + \log_2 9)^2 - (\log_3 4 - \log_2 9)^2.$$

37. Найдите значение выражения  $\frac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \frac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$ .

38. Найдите значение выражения

$$\log_4 24 - \log_4 9 \cdot \log_9 13 \cdot \log_{13} 6.$$

39. Найдите значение выражения

$$(\log_7 22 - \log_7 12 + \log_7 6) \cdot \log_{11} 7.$$

40. Найдите значение выражения  $3^{\log_5 7} - 7^{\log_5 3}$ .

41. Найдите значение выражения  $9^{\log_3(1+0,5+0,25+\dots)}$ .

42. Упростите:  $6^{-0,5+\log_6 \frac{\sqrt{3}}{2}} - 2^{-0,5+\log_2 0,5}$ .

43. Упростите:  $\frac{1 - \lg^2 5}{2 \lg \sqrt{10} - \lg 5} - \lg 5$ .

## 2.2. Логарифмические уравнения и неравенства

### Теоретические сведения

$\log_a x = b$  ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ). Область определения (ООУ) этого уравнения  $x = a^b > 0$ .

$\log_a f(x) = b$  ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ). Область определения этого уравнения  $f(x) > 0$ . На этой области уравнение может иметь любое количество корней, в зависимости от функции  $f(x)$ .

$\log_a f(x) = \log_a g(x)$  ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ). Область определения этого уравнения задается системой 
$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

На этой области уравнение имеет корни, которые можно найти, решая уравнение  $f(x) = g(x)$ .

При решении логарифмических уравнений используются тождественные преобразования логарифмических выражений (см. Раздел 1.1). Кроме тождеств, при