

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	11
ГЛАВА I. АРИФМЕТИКА. АЛГЕБРА	13
§ 1. Натуральные числа	15
1.1. Десятичная запись натуральных чисел.	15
1.2. Арифметические действия над натуральными числами. Степень с натуральным показателем	16
1.3. Делимость натуральных чисел	18
1.4. Признаки делимости	19
1.5. Простые и составные числа	20
1.6. Наибольший общий делитель. Наименьшее общее кратное.	21
1.7. Деление с остатком	23
<i>Примеры заданий № 1.</i>	24
§ 2. Дроби	28
2.1. Обыкновенная дробь. Основное свойство дроби. Сравнение дробей.	28
2.2. Арифметические действия с обыкновенными дробями	31
2.3. Десятичная дробь. Сравнение десятичных дробей . . .	32
2.4. Арифметические действия с десятичными дробями	33
2.5. Нахождение части от целого и целого по его части . . .	35
2.6. Представление обыкновенной дроби в виде десятичной. Бесконечные периодические десятичные дроби	36
2.7. Округление чисел	37
<i>Примеры заданий № 2.</i>	38
2.8. Проценты	41
2.9. Нахождение процентов от величины и величины по её процентам	42
2.10. Отношение. Процентное отношение	43
2.11. Пропорции	45
2.12. Прямая и обратная пропорциональные зависимости .	46
<i>Примеры заданий № 3.</i>	47

§ 3. Рациональные числа	51
3.1. Целые числа. Рациональные числа	51
3.2. Координатная прямая	52
3.3. Модуль числа. Сравнение рациональных чисел	52
3.4. Арифметические действия с рациональными числами	54
<i>Примеры заданий № 4.</i>	56
§ 4. Целые выражения.	60
4.1. Буквенное выражение (выражение с переменными). Алгебраические выражения	60
4.2. Свойства степени с натуральным показателем	60
4.3. Одночлен	62
4.4. Многочлен. Степень многочлена. Корень многочлена с одной переменной	63
4.5. Сложение, вычитание и умножение многочленов	65
4.6. Квадрат суммы и квадрат разности. Формула разности квадратов	66
4.7. Формулы суммы кубов и разности кубов.	67
4.8. Разложение многочленов на множители.	68
<i>Примеры заданий № 5.</i>	70
§ 5. Дробные выражения	74
5.1. Алгебраические (рациональные) дроби.	74
5.2. Тожество. Тожественные преобразования выражений	75
5.3. Основное свойство рациональной дроби. Сокращение дробей	75
5.4. Действия с алгебраическими дробями	76
<i>Примеры заданий № 6.</i>	79
5.5. Степень с нулевым и целым отрицательным показателями.	84
5.6. Стандартный вид числа	85
<i>Примеры заданий № 7.</i>	86
§ 6. Корень из числа	89
6.1. Квадратный корень. Арифметический квадратный корень	89

Содержание

6.2. Свойства арифметического квадратного корня.	90
6.3. Тождественные преобразования выражений, содержащих квадратные корни.	91
6.4. Корень третьей степени	93
6.5. Запись корня с помощью степени с дробным показателем	94
6.6. Понятие об иррациональном числе. Десятичные приближения иррациональных чисел	94
6.7. Понятие о множестве. Числовые множества. Множество действительных чисел	95
<i>Примеры заданий № 8.</i>	98
§ 7. Уравнения с одной переменной	103
7.1. Общие сведения об уравнениях с одной переменной . .	103
7.2. Линейное уравнение с одной переменной	105
7.3. Квадратное уравнение	106
7.4. Теорема Виета	108
7.5. Квадратный трёхчлен. Разложение квадратного трёхчлена на множители	109
<i>Примеры заданий № 9.</i>	111
7.6. Рациональные уравнения.	114
7.7. Метод замены переменной	115
<i>Примеры заданий № 10.</i>	117
§ 8. Функции	120
8.1. Понятие функции. Область определения и область значений функции	120
8.2. Способы задания функции	121
8.3. График функции	123
8.4. Нули функции. Промежутки знакопостоянства. Возрастание и убывание функции. Наибольшее и наименьшее значения функции	125
8.5. Чтение графиков функций, отображающих реальные процессы.	127
8.6. Линейная функция и её свойства. Прямая пропорциональность	129

8.7. Обратная пропорциональная зависимость.	
Функция $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, и её свойства	131
<i>Примеры заданий № 11.</i>	133
8.8. Квадратичная функция и её свойства	146
8.9. Функция $y = \sqrt{x}$ и её свойства	150
8.10. График функции $y = \sqrt[3]{x}$	151
8.11. Функция $y = x $ и её свойства	152
8.12. Решение уравнений графическим методом	152
<i>Примеры заданий № 12.</i>	154
§ 9. Уравнения с двумя переменными	165
9.1. Решение уравнения с двумя переменными. График уравнения	165
9.2. Системы уравнений с двумя переменными. Решение систем уравнений графическим методом	167
9.3. Методы решения систем двух уравнений с двумя переменными	171
<i>Примеры заданий № 13.</i>	174
§ 10. Текстовые задачи	179
10.1. Решение текстовых задач с помощью уравнений	179
<i>Примеры заданий № 14.</i>	181
10.2. Решение текстовых задач с помощью систем уравнений.	185
<i>Примеры заданий № 15.</i>	187
10.3. Решение текстовых задач арифметическим способом	189
<i>Примеры заданий № 16.</i>	190
10.4. Практико-ориентированные задачи	193
<i>Примеры заданий № 17 [Зонт]</i>	199
<i>Примеры заданий № 18 [Лист]</i>	205
<i>Примеры заданий № 19 [Печь].</i>	210
<i>Примеры заданий № 20 [Шины]</i>	216
<i>Примеры заданий № 21 [Квартира]</i>	222

§ 11. Неравенства	224
11.1. Числовые неравенства и их свойства	224
11.2. Оценка значений числовых выражений с помощью свойств числовых неравенств	226
11.3. Общие сведения о неравенствах с одной переменной	228
11.4. Числовые промежутки	229
11.5. Линейные неравенства с одной переменной. Системы линейных неравенств	230
11.6. Квадратные неравенства	233
<i>Примеры заданий № 22</i>	235
§ 12. Числовые последовательности	241
12.1. Понятие последовательности	241
12.2. Способы задания последовательности	242
12.3. Арифметическая прогрессия	244
12.4. Сумма n первых членов арифметической прогрессии	245
12.5. Геометрическая прогрессия. Формула сложных процентов	246
12.6. Сумма n первых членов геометрической прогрессии	249
12.7. Сумма бесконечной геометрической прогрессии, модуль знаменателя которой меньше единицы	250
<i>Примеры заданий № 23</i>	250
§ 13. Элементы комбинаторики, теории вероятностей, описательной статистики	254
13.1. Комбинаторные задачи. Перебор вариантов	254
13.2. Комбинаторные правила суммы и произведения	256
13.3. Представление данных в виде таблиц, диаграмм, графиков	257
13.4. Статистика. Статистические характеристики	259
13.5. Частота и вероятность случайного события	261
13.6. Достоверные и невозможные события. Равновозможные события. Классическое определение вероятности	263
13.7. Представление о геометрической вероятности	266
<i>Примеры заданий № 24</i>	267

ГЛАВА II. ГЕОМЕТРИЯ	275
§ 14. Простейшие геометрические фигуры и их свойства .	277
14.1. Прямая, луч, отрезок. Измерение отрезков	277
14.2. Угол. Измерение углов	279
14.3. Смежные и вертикальные углы	280
14.4. Перпендикулярные прямые. Угол между пересекающимися прямыми. Перпендикуляр и наклонная. Расстояние от точки до прямой	281
<i>Примеры заданий № 25.</i>	282
§ 15. Параллельные прямые	286
15.1. Признаки параллельности прямых	286
15.2. Свойства параллельных прямых	287
<i>Примеры заданий № 26.</i>	289
§ 16. Треугольник	291
16.1. Элементы треугольника. Равные треугольники	291
16.2. Виды треугольников	293
16.3. Признаки равенства треугольников	294
16.4. Свойства равнобедренного треугольника	296
16.5. Признаки равнобедренного треугольника	297
16.6. Сумма углов треугольника. Свойство внешнего угла треугольника	298
16.7. Неравенство треугольника. Зависимость между величинами сторон и углов треугольника	300
16.8. Признаки равенства прямоугольных треугольников. Свойства прямоугольного треугольника	301
16.9. Терема Фалеса. Теорема о пропорциональных отрезках	303
16.10. Средняя линия треугольника	305
16.11. Подобные треугольники	306
16.12. Признаки подобия треугольников	307
<i>Примеры заданий № 27.</i>	309
16.13. Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике	315
16.14. Теорема Пифагора	316
16.15. Синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла прямоугольного треугольника	317

16.16. Синус, косинус, тангенс и котангенс угла от 0° до 180°	320
16.17. Теорема косинусов	322
16.18. Теорема синусов	323
<i>Примеры заданий № 28.</i>	324
§ 17. Окружность и круг	329
17.1. Понятие о геометрическом месте точек. Примеры ГМТ	329
17.2. Окружность и круг, их элементы	330
17.3. Свойства элементов окружности	332
17.4. Касательная и секущая к окружности	333
17.5. Взаимное расположение двух окружностей	335
17.6. Окружность, описанная около треугольника	336
17.7. Окружность, вписанная в треугольник	338
17.8. Центральные и вписанные углы. Градусная мера дуги окружности	340
17.9. Длина окружности	341
<i>Примеры заданий № 29.</i>	342
§ 18. Многоугольник	350
18.1. Четырёхугольник и его элементы	350
18.2. Параллелограмм и его свойства	351
18.3. Признаки параллелограмма	353
18.4. Прямоугольник, ромб, квадрат	356
<i>Примеры заданий № 30.</i>	357
18.5. Трапеция. Средняя линия трапеции	362
18.6. Четырёхугольник, вписанный в окружность	364
18.7. Четырёхугольник, описанный около окружности ...	365
18.8. Сумма углов выпуклого многоугольника	366
18.9. Правильные многоугольники	367
<i>Примеры заданий № 31.</i>	369
§ 19. Площадь и объём	376
19.1. Понятие площади многоугольника. Площадь прямоугольника	376
19.2. Площадь параллелограмма и трапеции.	377

Содержание

19.3. Формулы для нахождения площади треугольника . . .	378
19.4. Площадь круга. Площадь сектора	380
19.5. Формулы объёмов прямоугольного параллелепипеда, куба и шара.	381
<i>Примеры заданий № 32.</i>	381
§ 20. Декартовы координаты на плоскости.	389
20.1. Координатная плоскость	389
20.2. Формула расстояния между двумя точками. Координаты середины отрезка	390
20.3. Уравнение фигуры. Уравнение окружности	392
20.4. Общее уравнение прямой. Уравнение прямой с угловым коэффициентом	394
20.5. Графическая интерпретация неравенств с двумя переменными	396
<i>Примеры заданий № 33.</i>	396
§ 21. Векторы на плоскости	400
21.1. Понятие вектора. Модуль вектора. Коллинеарные векторы. Равные векторы	400
21.2. Координаты вектора	402
21.3. Сложение и вычитание векторов	404
21.4. Умножение вектора на число	407
21.5. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам	408
21.6. Скалярное произведение векторов.	409
<i>Примеры заданий № 34.</i>	411
§ 22. Геометрические преобразования	416
22.1. Движение фигуры. Параллельный перенос	416
22.2. Осевая симметрия.	417
22.3. Центральная симметрия	419
22.4. Поворот	422
22.5. Гомотетия. Подобие фигур	424
<i>Примеры заданий № 35.</i>	426
Ответы к примерам заданий.	434

§ 1. НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

1.1. Десятичная запись натуральных чисел

Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 и т. д., используемые при счёте предметов, называют **натуральными**.

Все натуральные числа, записанные в порядке возрастания, образуют **ряд натуральных чисел** (или **натуральный ряд**). Первым числом натурального ряда является число 1, вторым — число 2, третьим — число 3 и т. д.

В натуральном ряде за каждым числом следует ещё одно число, большее предыдущего на единицу. Поэтому в натуральном ряде нет последнего числа. Следовательно, среди натуральных чисел есть наименьшее число — это число 1, но нет наибольшего.

Натуральные числа записывают с помощью специальных знаков, которые называют **цифрами**. Этих цифр десять:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

В записи числа в зависимости от места, занимаемого цифрой, она может обозначать разные числа. Например, в числе 172 цифра 7 обозначает число семьдесят, а в числе 7549 — обозначает число семь тысяч.

Место, занимаемое цифрой в записи числа, называют **разрядом**.

Если считать справа налево, то первое место в записи числа называют **разрядом единиц**, второе — **разрядом десятков**, третье — **разрядом сотен** и т. д. Например, в числе 7049 имеем 9 единиц разряда единиц, 4 единицы разряда десятков, 0 единиц разряда сотен и 7 единиц разряда тысяч.

Запись натуральных чисел, которой мы пользуемся, называют **десятичной**. Такое название связано с тем, что десять единиц каждого разряда составляют одну единицу следующего старшего разряда.

1.2. Арифметические действия над натуральными числами. Степень с натуральным показателем

Если по двум данным числам по некоторому правилу определяют третье число, то этот процесс в математике называют **действием**.

Действия сложения, вычитания, умножения и деления называют **арифметическими действиями**.

В равенстве $a + b = c$ числа a и b называют **слагаемыми**, число c и запись $a + b$ — **суммой**.

В равенстве $a - b = c$ число a называют **уменьшаемым**, число b — **вычитаемым**, число c и запись $a - b$ — **разностью**.

В равенстве $a \cdot b = c$ числа a и b называют **множителями**, а число c и запись $a \cdot b$ — **произведением**.

В равенстве $a : b = c$ число a называют **делимым**, число b — **делителем**, число c и запись $a : b$ — **частным**.

Арифметические действия обладают следующими свойствами.

1. Переместительное свойство сложения. От перестановки слагаемых сумма не меняется:

$$a + b = b + a.$$

2. Сочетательное свойство сложения. Чтобы к сумме двух чисел прибавить третье число, можно к первому числу прибавить сумму второго и третьего чисел:

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

3. Переместительное свойство умножения. От перестановки множителей произведение не меняется:

$$ab = ba.$$

4. Сочетательное свойство умножения. Чтобы произведение двух чисел умножить на третье число, можно первое число умножить на произведение второго и третьего чисел:

$$(ab)c = a(bc).$$

5. Распределительное свойство умножения относительно сложения. Чтобы число умножить на сумму двух чисел, можно это число умножить на каждое слагаемое и полученные произведения сложить:

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Степенью числа a с натуральным показателем n , большим 1, называют произведение n множителей, каждый из которых равен a :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ множителей}}, \text{ где } n > 1.$$

Степенью числа a с показателем 1 называют само это число:

$$a^1 = a.$$

Например, $3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$, $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Вторую степень числа называют **квадратом числа**. Например, запись a^2 читают « a в квадрате». Третью степень числа называют **кубом числа** и запись a^3 читают « a в кубе».

Если в числовое выражение входит степень, то сначала выполняют возведение в степень, а потом — остальные действия.

Например, $5 \cdot 2^2 = 5 \cdot 4 = 20$, $5 + 2^2 = 5 + 4 = 9$.

Задача. Вычислите удобным способом:

1) $25 \cdot 867 \cdot 4$; 2) $329 \cdot 754 + 329 \cdot 246$; 3) $125 \cdot 24 \cdot 283$.

Решение. 1) Используем переместительное, а затем сочетательное свойства умножения:

$$25 \cdot 867 \cdot 4 = 867 \cdot (25 \cdot 4) = 867 \cdot 100 = 86\,700.$$

2) Имеем: $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$. Тогда:

$$329 \cdot 754 + 329 \cdot 246 = 329 \cdot (754 + 246) = 329 \cdot 1000 = 329\,000.$$

$$3) 125 \cdot 24 \cdot 283 = 125 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 283 = (125 \cdot 8) \cdot (3 \cdot 283) = 1000 \cdot 849 = 849\,000.$$

1.3. Делимость натуральных чисел

Если натуральное число a делится нацело на натуральное число b , то число a называют **кратным числа b** , а число b — **делителем числа a** .

Например, числа 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 являются делителями числа 30, а число 30 является кратным каждого из этих чисел.

❶ Если каждое из натуральных чисел a и b делится нацело на число k , то и сумма $a + b$ также делится нацело на число k .

Например, каждое из чисел 21 и 36 делится нацело на 3. Тогда сумма чисел 21 и 36 также делится нацело на 3.

❷ Если число a делится нацело на число k , а число b не делится нацело на число k , то сумма $a + b$ также не делится нацело на число k .

Например, число 35 делится нацело на число 7, а число 17 на число 7 не делится нацело. Тогда сумма $35 + 17$ также не делится нацело на число 7.

Задача. Целые числа x и y таковы, что $(6x + 11y)$ делится нацело на 31. Докажите, что $(x + 7y)$ делится нацело на 31.

Решение. Запишем: $x + 7y = 31(x + 2y) - 5(6x + 11y)$. Из условия следует, что $5(6x + 11y)$ делится нацело на 31. Кроме того, $31(x + 2y)$ делится нацело на 31. Тогда рассматриваемая разность $31(x + 2y) - 5(6x + 11y)$ делится нацело на 31.

1.4. Признаки делимости

Цифры 0, 2, 4, 6, 8 называют **чётными**, а цифры 1, 3, 5, 7, 9 — **нечётными**.

Признак делимости на 2. Если запись натурального числа оканчивается чётной цифрой, то это число делится нацело на 2. Если запись натурального числа оканчивается нечётной цифрой, то это число не делится нацело на 2.

Признак делимости на 10. Если запись натурального числа оканчивается цифрой 0, то это число делится нацело на 10. Если запись натурального числа оканчивается любой цифрой, отличной от 0, то это число не делится нацело на 10.

Признак делимости на 5. Если запись натурального числа оканчивается цифрой 0 или 5, то это число делится нацело на 5. Если запись натурального числа оканчивается любой цифрой, отличной от 0 или 5, то это число не делится нацело на 5.

Признак делимости на 3. Если сумма цифр числа делится нацело на 3, то и само число делится нацело на 3. Если сумма цифр числа не делится нацело на 3, то и само число не делится нацело на 3.

Например, число 7854 делится нацело на 3, так как сумма его цифр, равная 24, делится нацело на 3. Число 3749 не делится нацело на 3, так как сумма его цифр, равная 23, не делится нацело на 3.

Признак делимости на 9. Если сумма цифр числа делится нацело на 9, то и само число делится нацело на 9. Если сумма цифр числа не делится нацело на 9, то и само число не делится нацело на 9.

.....
Задача 1. Докажите, что значение выражения $10^{10} + 2$ делится нацело на 3.

Решение. Значение данного выражения имеет вид $100\dots02$. Сумма цифр этого числа равна 3. Поэтому оно делится нацело на 3.

Задача 2. Запись десятизначного натурального числа состоит из десяти различных цифр. Может ли это число быть степенью числа 2?

Решение. Сумма цифр данного числа равна 45. Следовательно, это число кратно 9. Однако ни одна степень числа 2 не делится нацело на 9. Значит, данное число не может быть степенью числа 2.

.....

1.5. Простые и составные числа

Натуральное число называют **простым**, если оно имеет только два натуральных делителя: единицу и само это число.

Например, числа 2, 7, 11, 13 являются простыми.

Число 2 — наименьшее простое число. Это единственное чётное простое число.

Простых чисел бесконечно много.

Натуральное число, имеющее больше двух натуральных делителей, называют **составным**.

Например, числа 6, 15, 49, 1000 являются составными.

Поскольку число 1 имеет только один делитель, его не относят ни к простым, ни к составным.

❶ Любое составное число можно представить в виде произведения простых чисел, т. е. разложить на простые множители.

Например, $10 = 2 \cdot 5$; $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$; $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$; $81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$; $200 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$.

❶ Любые два разложения данного числа на простые множители могут отличаться только порядком следования множителей.

Обычно произведение одинаковых множителей в разложении числа на простые множители заменяют степенью. Например, пишут: $18 = 2 \cdot 3^2$; $80 = 2^4 \cdot 5$; $81 = 3^4$; $200 = 2^3 \cdot 5^2$.

Задача. Разложите на простые множители число 3150.

Решение. 1) 3150 кратно 2, $3150 : 2 = 1575$;

2) 1575 не кратно 2, но кратно 3, $1575 : 3 = 525$;

3) 525 кратно 3, $525 : 3 = 175$;

4) 175 не кратно 3, но кратно 5, $175 : 5 = 35$;

5) 35 кратно 5, $35 : 5 = 7$.

$$\begin{aligned} & \text{Следовательно, } 3150 = 2 \cdot 1575 = 2 \cdot 3 \cdot 525 = \\ & = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 175 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 35 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = \\ & = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7. \end{aligned}$$

Результат вычислений можно представить в виде следующей таблицы:

3150	2
1575	3
525	3
175	5
35	5
7	7
1	

1.6. Наибольший общий делитель. Наименьшее общее кратное

Наибольшее натуральное число, на которое делится нацело каждое из двух данных натуральных чисел, называют **наибольшим общим делителем** этих чисел.

Наибольший общий делитель чисел a и b обозначают так: НОД (a ; b).

Например, НОД (28; 42) = 14.

Задача 1. Найдите НОД (180; 840).

Решение. Представим разложение данных чисел на простые множители в виде произведения степеней. Имеем: $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1$, $840 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1$.