# СОДЕРЖАНИЕ

# § 1. НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

## 1.1. Десятичная запись натуральных чисел

Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 и т. д., используемые при счёте предметов, называют **натуральными**.

Все натуральные числа, записанные в порядке возрастания, образуют **ряд натуральных чисел** (или натуральный ряд). Первым числом натурального ряда является число 1, вторым — число 2, третьим — число 3 и т. д.

В натуральном ряде за каждым числом следует ещё одно число, большее предыдущего на единицу. Поэтому в натуральном ряде нет последнего числа. Следовательно, среди натуральных чисел есть наименьшее число — это число 1, но нет наибольшего.

Натуральные числа записывают с помощью специальных знаков, которые называют **цифрами**. Этих цифр десять:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

В записи числа в зависимости от места, занимаемого цифрой, она может обозначать разные числа. Например, в числе 172 цифра 7 обозначает число семьдесят, а в числе 7549 — обозначает число семь тысяч.

Место, занимаемое цифрой в записи числа, называют **разрядом**.

Если считать справа налево, то первое место в записи числа называют **разрядом единиц**, второе — **разрядом десятков**, третье — **разрядом сотен** и т. д. Например, в числе 7049 имеем 9 единиц разряда единиц, 4 единицы разряда десятков, 0 единиц разряда сотен и 7 единиц разряда тысяч.

Запись натуральных чисел, которой мы пользуемся, называют **десятичной.** Такое название связано с тем, что десять единиц каждого разряда составляют одну единицу следующего старшего разряда.

## 1.2. Арифметические действия над натуральными числами. Степень с натуральным показателем

Если по двум данным числам по некоторому правилу определяют третье число, то этот процесс в математике называют **действием.**

Действия сложения, вычитания, умножения и деления называют **арифметическими действиями.**

В равенстве $a + b = c$ числа $a$ и $b$ называют **слагаемыми**, число $c$ и запись $a + b$ — **суммой.**

В равенстве $a - b = c$ число $a$ называют **уменьшаемым**, число $b$ — **вычитаемым**, число $c$ и запись $a - b$ — **разностью.**

В равенстве $a \cdot b = c$ числа $a$ и $b$ называют **множителями**, а число $c$ и запись $a \cdot b$ — **произведением.**

В равенстве $a : b = c$ число $a$ называют **делимым**, число $b$ — **делителем**, число $c$ и запись $a : b$ — **частным.**

Арифметические действия обладают следующими свойствами.

1. **Переместительное свойство сложения.** От перестановки слагаемых сумма не меняется:

$$a + b = b + a.$$

2. **Сочетательное свойство сложения.** Чтобы к сумме двух чисел прибавить третье число, можно к первому числу прибавить сумму второго и третьего чисел:

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

3. **Переместительное свойство умножения.** От перестановки множителей произведение не меняется:

$$ab = ba.$$

4. **Сочетательное свойство умножения.** Чтобы произведение двух чисел умножить на третье число, можно первое число умножить на произведение второго и третьего чисел:

$$(ab)c = a(bc).$$

5. **Распределительное свойство умножения относительно сложения.** Чтобы число умножить на сумму двух чисел, можно это число умножить на каждое слагаемое и полученные произведения сложить:

$$a\,(b + c) = ab + ac.$$

**Степенью** числа $a$ с натуральным показателем $n$, бóльшим 1, называют произведение $n$ множителей, каждый из которых равен $a$:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}}, \text{ где } n > 1.$$

Степенью числа $a$ с показателем 1 называют само это число:

$$a^1 = a.$$

Например, $3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$, $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Вторую степень числа называют **квадратом числа**. Например, запись $a^2$ читают «$a$ в квадрате». Третью степень числа называют **кубом числа** и запись $a^3$ читают «$a$ в кубе».

Если в числовое выражение входит степень, то сначала выполняют возведение в степень, а потом — остальные действия.

Например, $5 \cdot 2^2 = 5 \cdot 4 = 20$, $5 + 2^2 = 5 + 4 = 9$.

**Задача.** Вычислите удобным способом:

1) $25 \cdot 867 \cdot 4$; 2) $329 \cdot 754 + 329 \cdot 246$; 3) $125 \cdot 24 \cdot 283$.

**Решение.** 1) Используем переместительное, а затем сочетательное свойства умножения:

$25 \cdot 867 \cdot 4 = 867 \cdot (25 \cdot 4) = 867 \cdot 100 = 86\,700$.

2) Имеем: $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$. Тогда:

$329 \cdot 754 + 329 \cdot 246 = 329 \cdot (754 + 246) = 329 \cdot 1000 =$
$= 329\,000$.

3) $125 \cdot 24 \cdot 283 = 125 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 283 = (125 \cdot 8) \cdot (3 \cdot 283) =$
$= 1000 \cdot 849 = 849\,000$.

## 1.3. Делимость натуральных чисел

Если натуральное число $a$ делится нацело на натуральное число $b$, то число $a$ называют **кратным числа** $b$, а число $b$ — **делителем числа** $a$.

Например, числа 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 являются делителями числа 30, а число 30 является кратным каждого из этих чисел.

! Если каждое из натуральных чисел $a$ и $b$ делится нацело на число $k$, то и сумма $a + b$ также делится нацело на число $k$.

Например, каждое из чисел 21 и 36 делится нацело на 3. Тогда сумма чисел 21 и 36 также делится нацело на 3.

! Если число $a$ делится нацело на число $k$, а число $b$ не делится нацело на число $k$, то сумма $a + b$ также не делится нацело на число $k$.

Например, число 35 делится нацело на число 7, а число 17 на число 7 не делится нацело. Тогда сумма $35 + 17$ также не делится нацело на число 7.

**Задача.** Целые числа $x$ и $y$ таковы, что $(6x + 11y)$ делится нацело на 31. Докажите, что $(x + 7y)$ делится нацело на 31.

**Решение.** Запишем: $x + 7y = 31\,(x + 2y) - 5\,(6x + 11y)$. Из условия следует, что $5\,(6x + 11y)$ делится нацело на 31. Кроме того, $31\,(x + 2y)$ делится нацело на 31. Тогда рассматриваемая разность $31\,(x + 2y) - 5\,(6x + 11y)$ делится нацело на 31.

## 1.4. Признаки делимости

Цифры 0, 2, 4, 6, 8 называют **чётными**, а цифры 1, 3, 5, 7, 9 — **нечётными**.

**Признак делимости на 2.** Если запись натурального числа оканчивается чётной цифрой, то это число делится нацело на 2. Если запись натурального числа оканчивается нечётной цифрой, то это число не делится нацело на 2.

**Признак делимости на 10.** Если запись натурального числа оканчивается цифрой 0, то это число делится нацело на 10. Если запись натурального числа оканчивается любой цифрой, отличной от 0, то это число не делится нацело на 10.

**Признак делимости на 5.** Если запись натурального числа оканчивается цифрой 0 или 5, то это число делится нацело на 5. Если запись натурального числа оканчивается любой цифрой, отличной от 0 или 5, то это число не делится нацело на 5.

**Признак делимости на 3.** Если сумма цифр числа делится нацело на 3, то и само число делится нацело на 3. Если сумма цифр числа не делится нацело на 3, то и само число не делится нацело на 3.

Например, число 7854 делится нацело на 3, так как сумма его цифр, равная 24, делится нацело на 3. Число 3749 не делится нацело на 3, так как сумма его цифр, равная 23, не делится нацело на 3.

**Признак делимости на 9.** Если сумма цифр числа делится нацело на 9, то и само число делится нацело на 9. Если сумма цифр числа не делится нацело на 9, то и само число не делится нацело на 9.

**Задача 1.** Докажите, что значение выражения $10^{10} + 2$ делится нацело на 3.

**Решение.** Значение данного выражения имеет вид 100...02. Сумма цифр этого числа равна 3. Поэтому оно делится нацело на 3.

**Задача 2.** Запись десятизначного натурального числа состоит из десяти различных цифр. Может ли это число быть степенью числа 2?

**Решение.** Сумма цифр данного числа равна 45. Следовательно, это число кратно 9. Однако ни одна степень числа 2 не делится нацело на 9. Значит, данное число не может быть степенью числа 2.

## 1.5. Простые и составные числа

Натуральное число называют **простым**, если оно имеет только два натуральных делителя: единицу и само это число.

Например, числа 2, 7, 11, 13 являются простыми.

Число 2 — наименьшее простое число. Это единственное чётное простое число.

Простых чисел бесконечно много.

Натуральное число, имеющее больше двух натуральных делителей, называют **составным**.

Например, числа 6, 15, 49, 1000 являются составными.

Поскольку число 1 имеет только один делитель, его не относят ни к простым, ни к составным.

**!** Любое составное число можно представить в виде произведения простых чисел, т. е. разложить на простые множители.

Например, $10 = 2 \cdot 5$; $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$; $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$; $81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$; $200 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$.

**!** Любые два разложения данного числа на простые множители могут отличаться только порядком следования множителей.

Обычно произведение одинаковых множителей в разложении числа на простые множители заменяют степенью. Например, пишут: $18 = 2 \cdot 3^2$; $80 = 2^4 \cdot 5$; $81 = 3^4$; $200 = 2^3 \cdot 5^2$.

**Задача.** Разложите на простые множители число 3150.

**Решение.** 1) 3150 кратно 2, 3150 : 2 = 1575;

2) 1575 не кратно 2, но кратно 3, 1575 : 3 = 525;

3) 525 кратно 3, 525 : 3 = 175;

4) 175 не кратно 3, но кратно 5, 175 : 5 = 35;

5) 35 кратно 5, 35 : 5 = 7.

Следовательно, $3150 = 2 \cdot 1575 = 2 \cdot 3 \cdot 525 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 175 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 35 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$.

Результат вычислений можно представить в виде следующей таблицы:

$$\begin{array}{r|l} 3150 & 2 \\ 1575 & 3 \\ 525 & 3 \\ 175 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

## 1.6. Наибольший общий делитель. Наименьшее общее кратное

Наибольшее натуральное число, на которое делится нацело каждое из двух данных натуральных чисел, называют **наибольшим общим делителем** этих чисел.

Наибольший общий делитель чисел $a$ и $b$ обозначают так: НОД ($a$; $b$).

Например, НОД (28; 42) = 14.

**Задача 1.** Найдите НОД (180; 840).

**Решение.** Представим разложение данных чисел на простые множители в виде произведения степеней. Имеем: $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1$, $840 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1$.