

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 6

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА 7

Числовые множества 8
Натуральные числа 9
Дроби 13
Целые и рациональные числа 25
Иррациональные и действительные
числа 29

**Вычисление и преобразование
выражений** 33
Тождественные преобразования 33
Многочлены 34
Алгебраические дроби 38
Иррациональные выражения 40
Логарифмические выражения 41
Тригонометрические выражения 46

Уравнения 58
Линейные уравнения 59
Квадратные уравнения 59
Рациональные уравнения 65
Иррациональные уравнения 67

Показательные уравнения 69
Логарифмические уравнения 70
Тригонометрические уравнения 76

Неравенства 81
Числовые неравенства и их
свойства 82
Числовые промежутки 83
Неравенства с одной переменной 84
Линейные неравенства 86
Метод интервалов 87
Квадратные неравенства 88
Рациональные неравенства 93
Иррациональные неравенства 94
Показательные неравенства 95
Логарифмические неравенства 96
Простейшие тригонометрические
неравенства 101

Большой вклад в развитие теории решения уравнений внёс Мухаммед аль-Хорезми — персидский учёный (математик, астроном, географ, историк). Он заложил основы алгебры как самостоятельной науки об общих методах решения числовых линейных и квадратных уравнений.



Мухаммед аль-Хорезми
(ок. 780 — ок. 846)

Томас Гарриот
(1560—1621)



Знаки неравенства в их современном виде придумал английский математик Т. Гарриот. Знаки «<» и «>» являлись повернутыми на 90° буквами V. Книга с такими обозначениями вышла после смерти автора, в 1631 г.

**Системы уравнений
и неравенств** 103
Системы уравнений с двумя
неизвестными 103

Системы неравенств с одной
неизвестной 106

Функции 110

Понятие функции. Способы
задания функции 110

Преобразование графиков
функций 111

Обратная функция 113

Свойства функции 113

Основные элементарные
функции 119

Числовые последовательности.

Прогрессии 130

Числовые последовательности 130

Прогрессии 132

Начала математического

анализа 133

Производная 134

Первообразная и интеграл 159

Элементы теории множеств 174

Основные понятия 174

Слово «функция» (от лат.
function — «совершение», «выпол-
нение») впервые было использовано
немецким математиком Г. В. Лейб-
ницем в XVII в.



Готфрид Вильгельм Лейбниц
(1646—1716)

Отношения на множествах 175

**Элементы математической
логики** 179

Высказывания 180

Предложения с переменными 182

ГЕОМЕТРИЯ 183

Планиметрия 184

Начальные геометрические
сведения 184

Треугольники 190

Четырёхугольники 204

Многоугольники 213

Окружность и круг 214

Площади фигур 222

Правильные многоугольники 229

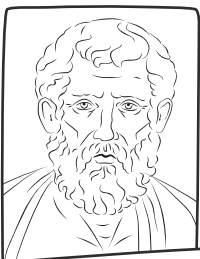
Векторы 231

Метод координат 234

Стереометрия 239

Введение в стереометрию 239

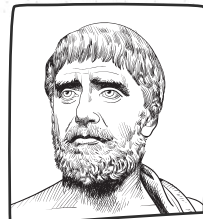
Взаимное расположение прямых
и плоскостей в пространстве 240



Герон Александрийский
(I в. н. э.)

Герон Александрийский — греческий математик
и механик. В его честь названа формула для
вычисления площади треугольника по сторонам,
хотя она была известна ещё Архимеду. Герон
интересовался треугольниками с целочисленными
сторонами, площади которых тоже являются це-
лыми, такие треугольники носят название геро-
новых. Простейшим героновым треугольником яв-
ляется египетский треугольник.

Фалес — древнегреческий философ и математик из Милета, его именем названа теорема о параллельных секущих.



Фалес Милетский
(ок. 625 — ок. 545 г. до н. э.)

Многогранники	250
Тела и поверхности вращения ...	260
Векторы в пространстве	268
Метод координат в пространстве ..	270
Подобные тела	279

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКИ **281**

Элементы комбинаторики	282	Случайные события и действия над ними	287
Правила выбора элементов. Перестановки, размещения и сочетания	282	Элементы статистики	298
Элементы теории вероятностей	287	Категории и характеристики случайных величин	298

ПРИЛОЖЕНИЕ **306**

Решение задач с экономическим содержанием	306	Задачи на оптимальный выбор....	312
Задачи на кредиты	306	Построение сечений многогранников	316
Задачи на вклады	311	Задачи на построение сечений....	317

Христиан Гюйгенс
(1629—1695)



Пьер Ферма
(1607—1665)

Блез Паскаль
(1623—1662)



Якоб Бернулли
(1654—1705)

Зарождение теории вероятностей относится к середине XVII в. и связано с именами Х. Гюйгенса, Б. Паскаля, П. Ферма и Я. Бернулли, которые исследовали закономерности, присущие азартным играм.

ВВЕДЕНИЕ

Перед вами справочник, который поможет обобщить, систематизировать и закрепить знания по математике за курс средней школы. В книге рассмотрены следующие разделы математики: «Алгебра», «Уравнения и неравенства», «Функции», «Начала математического анализа», «Геометрия», «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей».

Весь теоретический материал систематизирован и сопровождается наглядными схемами и таблицами, поясняющими рисунками, примерами решения задач. Это обеспечит максимальную сконцентрированность внимания, эффективное повторение и качественную подготовку по предмету.

На страницах книги читателя встретят персонажи из современности и из истории развития математической науки: взрослые и дети, учёные и преподаватели, которые зададут актуальные вопросы, дадут интересные и полезные содержательные ответы и пояснения. Диалоги персонажей помогут проанализировать научные факты и проблемы, связанные с выполнением отдельных заданий, сделают процесс усвоения материала более насыщенным и продуктивным.



Пособие поможет учащимся и выпускникам при подготовке к школьным занятиям, различным формам текущего и промежуточного контроля, а также к сдаче государственной итоговой аттестации.

Книга будет полезна школьникам, студентам и учителям, а также всем, кто интересуется математикой.



Желаем успехов!

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА



ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА

8



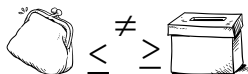
**ВЫЧИСЛЕНИЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ
ВЫРАЖЕНИЙ**

33



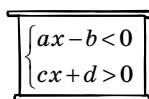
УРАВНЕНИЯ

58



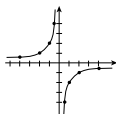
НЕРАВЕНСТВА

81



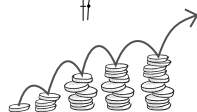
**СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ
И НЕРАВЕНСТВ**

103



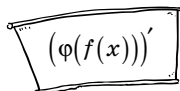
ФУНКЦИИ

110



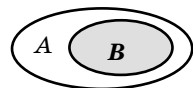
**ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ.
ПРОГРЕССИИ**

130



**НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО
АНАЛИЗА**

133



ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

174



**ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ЛОГИКИ**

179

ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА



Числовыми называются множества, элементами которых являются числа.

Множество натуральных чисел образуют числа, которые используются при счёте предметов.

$$N = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10 \dots\}$$

Натуральные числа (1; 2; 3; 4; 5...), числа, им противоположные (-1; -2; -3; -4; -5...), и число ноль образуют множество целых чисел.

$$Z = \{\dots - 3; - 2; - 1; 0; 1; 2; 3 \dots\}$$

Множество рациональных чисел составляют числа, которые можно представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$ (конечные или

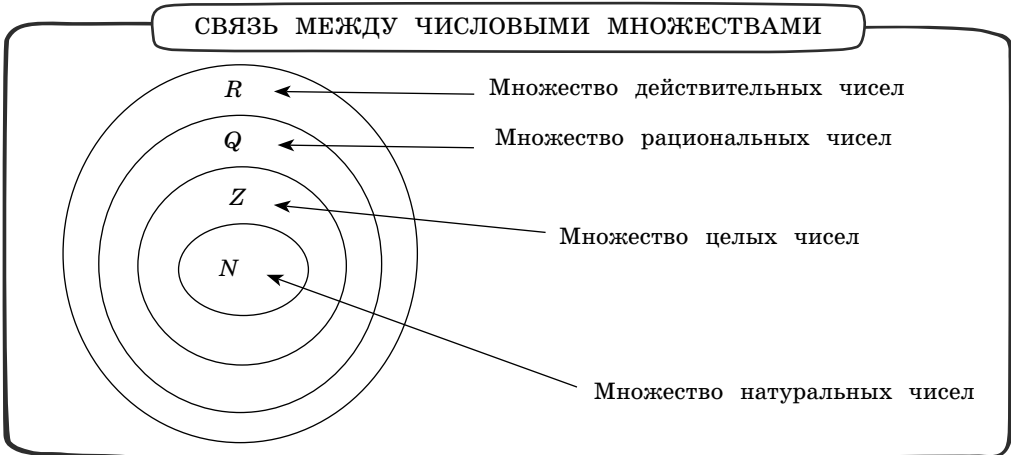
бесконечные периодические десятичные дроби). Обозначение: Q .

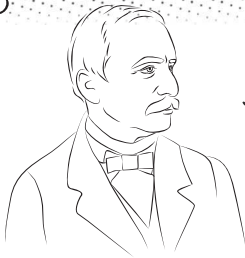
Множество иррациональных чисел составляют числа, которые не могут быть представлены в виде $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$ (бесконечные десятичные непериодические дроби). Обозначение: I .

Рациональные и иррациональные числа составляют множество действительных чисел. Обозначение: R .

$$R = Q \cup I$$

СВЯЗЬ МЕЖДУ ЧИСЛОВЫМИ МНОЖЕСТВАМИ





Немецкий математик XIX в. Л. Кронекер, желая подчеркнуть естественные причины появления множества натуральных чисел, сказал: «Бог создал натуральные числа, всё остальное — дело рук человека».

НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Множество натуральных чисел является бесконечным, т. к. для любого натурального числа n найдётся натуральное число больше, чем n .

ДЕЙСТВИЯ С НАТУРАЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ

СЛОЖЕНИЕ

$$a + b = c$$

↑ ↑ ↙
слагаемые сумма

$$a + b = b + a$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a + 0 = a$$

ВЫЧИТАНИЕ (ДЕЙСТВИЕ, ОБРАТНОЕ СЛОЖЕНИЮ)

$$a - b = c$$

↑ ↑ ↙
уменьшаемое вычитаемое разность

$$a - (b + c) = (a - b) - c = (a - c) - b$$

$$(a + b) - c = (a - c) + b = a + (b - c)$$

$$a - (b - c) = (a - b) + c$$

$$a - 0 = a$$

$$a - a = 0$$

УМНОЖЕНИЕ

$$a \cdot b = \underbrace{a + a + \dots + a}_b$$

b слагаемых

$$a \cdot b = c$$

↑ ↑ ↙
множители произведение

Вариант обозначения: $a \times b$.

$$a \cdot b = b \cdot a$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

$$(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$$

$$a \cdot 1 = a$$

$$a \cdot 0 = 0$$



ДЕЛЕНИЕ (ДЕЙСТВИЕ, ОБРАТНОЕ УМНОЖЕНИЮ)

$$a : b = c$$

делимое \swarrow \nearrow частное
делитель

$$(a : b) : c = a : (b \cdot c)$$

$$a : a = 1$$

$$a : (b : c) = (a : b) \cdot c$$

$$a : 1 = a$$

$$(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b$$

$$0 : a = 0 \quad (a \neq 0)$$

$$(a \cdot b) : c = a \cdot (b : c)$$

Варианты обозначения: $\frac{a}{b}$ или a/b .

★ Если частное c является натуральным числом, то говорят, что a делится (без остатка) на b .

★ Если частное c не является натуральным числом, то говорят, что a не делится (без остатка) на b .

Разделить с остатком число a на число b — значит найти два таких числа q и r , что $a = b \cdot q + r$ и $r < b$.

ДЕЛЕНИЕ С ОСТАТКОМ

$$\begin{array}{r} 70 \overline{) 3} \\ \underline{6} \\ 10 \\ \underline{9} \\ 1 \end{array}$$

делимое \swarrow делитель \nwarrow
остаток \swarrow неполное частное \nwarrow

Проверка: $70 = 3 \cdot 23 + 1$.



ВАЖНО! Остаток должен быть меньше делителя.



ВОЗВЕДЕНИЕ В СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Выражение a^n называется **степенью** числа a .

Вторая степень числа называется **квадратом** числа, третья степень — **кубом** числа.

показатель степени

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$$

n множителей

основание степени

СВОЙСТВА СТЕПЕНЕЙ

$$a^1 = a$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$a^x \cdot b^x = (ab)^x$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \text{ где } a \neq 0$$

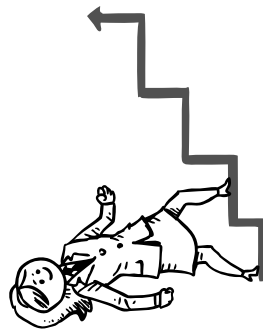
$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x, \text{ где } b \neq 0$$

ТАБЛИЦА КВАДРАТОВ

Десятки	Единицы									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

ТАБЛИЦА СТЕПЕНЕЙ

a^n	Значения n									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$2n$	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
$3n$	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19 683	59 049
$4n$	4	16	64	256	1024	4096				
$5n$	5	25	125	625	3125	15 625				
$6n$	6	36	216	1296	7776	46 656				
$7n$	7	49	343	2401	16 807					
$8n$	8	64	512	4096	32 768					
$9n$	9	81	729	6561	59 049					



Для чего в математике было придумано новое действие — возведение в степень? Ведь можно было обойтись умножением.



Множителей может быть очень много. Например, 5^{20} — это произведение 20 множителей, каждый из которых равен 5. Современным людям знание степени позволяет сэкономить время, а в древности оно помогало уменьшать ещё и финансовые затраты на записи, поскольку пергамен и папирус в Древней Греции стоили очень дорого.



Сложение и вычитание, умножение и деление, а также возведение в степень и извлечение корня попарно представляют собой обратные действия.

Свойства сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень представляют собой равенства, которые можно использовать не только слева направо, но и справа налево.



Действия сложения, вычитания, умножения и деления называют арифметическими действиями.

Только в результате сложения и умножения натуральных чисел получаются тоже натуральные числа.



ПОРЯДОК ДЕЙСТВИЙ

- ★ Действия 1-й ступени: сложение и вычитание.
- ★ Действия 2-й ступени: умножение и деление.
- ★ Действия 3-й ступени: возведение в степень.



ВЫРАЖЕНИЯ БЕЗ СКОБОК

В выражении без скобок сначала выполняют действия большей ступени. Если выражение содержит действия одной ступени, то их выполняют в порядке, в котором они записаны, — слева направо.

Возведение в степень
 ▼
 умножение/деление
 ▼
 сложение/вычитание

✓ Запись решения в строчку:

$$\begin{aligned}
 & \boxed{4 \ 1 \ 2 \ 5 \ 6 \ 3} \\
 & 17 - 5 \cdot 6 : 3 - 2 + 4 : 2 = \\
 & = 17 - 30 : 3 - 2 + 2 = \\
 & = 17 - 10 - 2 + 2 = 7 - 2 + 2 = 7.
 \end{aligned}$$

ВЫРАЖЕНИЯ СО СКОБКАМИ

В выражении со скобками сначала выполняют все действия в скобках, а затем действия большей ступени. Скобками пользуются, чтобы изменить порядок действий.

Действия в скобках



возведение в степень



умножение/деление



сложение/вычитание

✓ Запись решения по действиям:

$$\textcircled{1} \textcircled{3} \textcircled{5} \textcircled{2} \textcircled{4} \textcircled{6}$$

$$(3+1) \cdot 2 + 6^2 : 3 - 7 = 13$$

- 1) $3+1=4$;
- 2) $6^2=36$;
- 3) $4 \cdot 2=8$;
- 4) $36:3=12$;
- 5) $8+12=20$;
- 6) $20-7=13$.



ДРОБИ

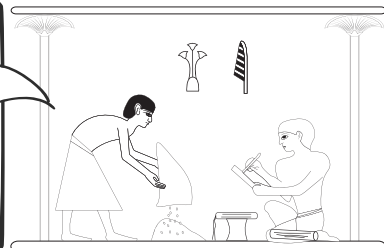
Дробь — форма представления числа в математике. Существует два вида дробей: обыкновенные и десятичные.

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДРОБИ

Число вида $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$, называют **обыкновенной дробью**.

$\frac{m}{n}$ ← числитель
 $\frac{m}{n}$ ← знаменатель

На древних вавилонских глиняных табличках и египетских папирусах встречаются не только натуральные числа, но и дроби. Этим источникам около 5000 лет. Первоначально применялись в основном обыкновенные дроби, они выражали результат измерения длины, площади и массы в тех случаях, когда выбранная единица измерения не укладывалась в целое число повторений.



Правильная дробь — это обыкновенная дробь, числитель которой меньше знаменателя, т. е. $m < n$.

Любая правильная дробь меньше единицы: $\frac{m}{n} < 1$, если $m < n$.

✓ Правильные дроби: $\frac{3}{8}$ ($3 < 8$); $\frac{1}{5}$ ($1 < 5$).

Неправильная дробь — это обыкновенная дробь, числитель которой больше знаменателя или равен ему, т. е. $m \geq n$.

Любая неправильная дробь больше единицы или равна ей:

$$\frac{m}{n} \geq 1, \text{ если } m \geq n.$$

✓ Неправильные дроби:

$$\frac{8}{3} (8 > 3); \quad \frac{5}{5} (5 = 5).$$

✓ Представление натурального числа в виде неправильной дроби:

$$4 = \frac{4}{1} \text{ или } 4 = \frac{8}{2}.$$

Любое натуральное число можно представить в виде неправильной дроби.



ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО ДРОБИ

Если числитель и знаменатель дроби умножить (разделить) на одно и то же число, отличное от нуля, то получится дробь, равная данной.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}; \quad \frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}, \quad c \neq 0$$

ВАЖНО! При использовании основного свойства изменяется только внешний вид дроби, её значение при этом остаётся неизменным.

Сокращение дроби — действие перехода к новой дроби, равной заданной, но с меньшими числителем и знаменателем.

Сократить дробь — значит разделить числитель и знаменатель на их общий делитель, больший 1.

Несократимой называется дробь, числитель и знаменатель которой — взаимно простые числа.

Сокращать дробь можно сразу на наибольший общий делитель числителя и знаменателя либо несколько раз на общий делитель.

Приведение дроби к новому знаменателю — действие замены заданной дроби равной ей дробью, но с большими числителем и знаменателем.

✓ $\frac{18}{26} = \frac{9}{13}$ (числитель и знаменатель дроби разделили на 2).

Сократим дробь $\frac{140}{175}$.

$$\checkmark 140 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7; \quad 175 = 5 \cdot 5 \cdot 7;$$

$$\text{НОД}(140; 175) = 5 \cdot 7 = 35.$$

$$\text{Тогда } \frac{140}{175} = \frac{140 : 35}{175 : 35} = \frac{4}{5}.$$

$$\checkmark \frac{140}{175} = \frac{140 : 5}{175 : 5} = \frac{28 : 7}{35 : 7} = \frac{4}{5}.$$

Приведение к новому знаменателю используется при сложении, вычитании, сравнении обыкновенных дробей, а также при представлении обыкновенной дроби в виде десятичной.

$$\checkmark \frac{1}{4} = \frac{25}{100} \quad (\text{числитель и знаменатель дроби умножили на } 25).$$

СМЕШАННЫЕ ЧИСЛА

Число, содержащее целую и дробную части, называется **смешанным**.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЕПРАВИЛЬНОЙ ДРОБИ В ВИДЕ СМЕШАННОГО ЧИСЛА

Разделить числитель на знаменатель с остатком.

Неполное частное — это целая часть, остаток от деления — числитель, знаменатель остаётся прежним.

$$\checkmark \frac{17}{7} = 2\frac{3}{7}, \text{ т. к. } 17:7 = 2 \text{ (ост. } 3\text{)}.$$

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СМЕШАННОГО ЧИСЛА В ВИДЕ НЕПРАВИЛЬНОЙ ДРОБИ

Умножить целую часть на знаменатель, прибавить числитель — получим числитель неправильной дроби.

Знаменатель остаётся прежним.

$$\checkmark 3\frac{5}{11} = \frac{3 \cdot 11 + 5}{11} = \frac{38}{11}.$$

Для чего нужно уметь представлять смешанное число в виде неправильной дроби и переводить неправильную дробь в смешанное число?

Смешанное число — это сумма натурального числа и обыкновенной дроби, записанная без знака «+».

$$\checkmark 8\frac{1}{3} = 8 + \frac{1}{3}.$$



При сравнении, сложении и вычитании гораздо удобнее работать со смешанными числами. А умножение, деление и возведение в степень выполняются с неправильными дробями.