Содержание

Предисловие к первому изданию

Вопреки названию, в книге речь идет не о математике вообще или каком-либо ее разделе. Наша цель состоит в том, чтобы показать, как приступить к решению той или иной задачи, как эффективно ее решить и что вынести из полученного опыта. Время и усилия, потраченные на изучение всего этого, окупятся сторицей, поскольку в результате вы приблизитесь к осознанию своего потенциала математического мышления.

Многолетний опыт работы с учениками и студентами убедил нас в том, что математическое мышление можно развить, если

- подходить к решению задачи с полной ответственностью;
- анализировать полученный опыт;
- связывать свои ощущения с действиями;
- изучать процесс решения задачи и
- обращать внимание на то, как полученные знания согласуются с вашим личным опытом.

Следовательно, предлагая вам решить ту или иную задачу, мы обращаем ваше внимание на важные моменты процесса математического мышления и тем самым показываем вам, как анализировать этот опыт и использовать его для решения жизненных задач.

Как использовать книгу с максимальным эффектом!

Нашу книгу надо не просто читать, ее нужно именно использовать, поэтому ее ценность зависит от того, насколько интенсивно читатель работает над задачами, предложенными в тексте. Цель задач — предоставить вам еще одну возможность попрактиковаться, что даст вам возможность освоить наши советы. Если вы не станете решать задачи со всей серьезностью, все комментарии обратятся в пустые слова и в случае необходимости вы не сумеете воспользоваться нашими советами. От вас потребуются усилия трех типов: физические, эмоциональные и интеллектуальные.

Пожалуй, один из самых важных выводов, которые предстоит вам сделать, состоит в следующем: если вы оказались в тупике (или застряли) это вполне естественное состояние и неотъемлемая часть совершенствования мыслительного процесса. Однако, чтобы извлечь из этого состояния максимум пользы, подумать пару минут и продолжить чтение определенно недостаточно. Не спешите, обдумайте задачу и читайте дальше лишь в том случае, если испробовали все возможные подходы к решению. Время, потраченное на размышление и поиск разных подходов, потрачено с большой пользой. После каждой задачи под заголовком «ЗАСТРЯЛИ?» мы предлагаем вам предложения-подсказки на случай, если процесс затормозился. Поскольку разные варианты решения влекут за собой разные логические ходы, некоторые из подсказок могут противоречить друг другу или не имеют отношения к выбранному вами подходу, так что не следует думать, что каждая из подсказок выведет вас на верный путь!

Коварные вопросы, не приводящие к решению задачи, ни в коем случае не должны вызывать в вас чувства разочарования. Неудачная попытка решения научит бо́льшему, чем вопрос с готовым ответом, если вы всерьез думаете над задачей, используете предлагаемые в книге методы и размышляете над тем, что сделали. Основная цель нашей книги не имеет отношения к ответам. Самое важное — это прочувствовать обсуждаемые в ней процессы размышлений.

Чтобы подчеркнуть наш акцент на процессах, а не на ответах, «решение» в традиционном смысле дано далеко не во всех случаях. Вместо него мы предлагаем варианты решений, иногда сопровождаемые комментариями, а также неправильные начала, частично организованные идеи и тому подобное. Элегантные решения, встречающиеся в многочисленных сборниках математических задач, крайне редко возникают в чьем-либо мозгу в законченном виде при первой же попытке решить задачу. Как правило, к ним приходят в результате длительного и мучительного мыслительного процесса (а также отдыха от него), решения претерпевают массу изменений на этом пути и даже полное переосмысление, однако большинство новичков этого не понимают. В результате нашего неформального подхода вы приобретаете уверенность в себе и прогрессируете, ну а элегантность решения приходит со временем.

Итак, наш подход основан на следующих пяти принципах:

1. Вы *можете* мыслить математически.
2. Математическое мышление можно *развить* практикой и анализом.
3. Математическому мышлению *способствуют* чувство противоречия, напряжение и удивление.
4. Математическое мышление *укрепляется* в атмосфере пытливости, вызова и анализа.
5. Математическое мышление помогает *разобраться* в себе и окружающем мире.

Вы наверняка обратите внимание на то, что текст написан от первого лица единственного числа, хотя у книги три автора. Это отражает наш стиль работы, равно как тот союз, который возник в процессе создания книги.

Книга в первую очередь адресована студентам как руководство для развития математического мышления. Она представляет только один подход к решению этой задачи и не сопоставляет его со схемами, предложенными ранее другими авторами, например Дьёрдем Пойа. Если вам любопытно ознакомиться с работой этого автора, которая оказала на нас огромное влияние, загляните в список литературы.

Некоторые из приведенных в книге задач оригинальные, а многие позаимствованы у математического сообщества. Мы бы хотели выразить благодарность своим друзьям и коллегам, которые предоставили нам эти задачи, но в особенности их неизвестным авторам — за удовольствие, что они нам доставили.

Особую признательность мы выражаем:

Дьёрдю Пойа и Дж. Г. Беннетту за их энтузиазм;

Грэму Риду за рисунки ПИКСА, которые впервые появились в книге *Mathematics: A Psychological Perspective (Математика. Психологическая перспектива)*, Open University Press, 1978;

Алану Шёнфилду за то, что указал на роль монитора, о чем речь идет в главе 7;

Майку Битхэму из Оксфордского университета за помощь в компьютерной обработке текста; многочисленным коллегам, и в особенности Джой Дэвис, Сюзи Гроувз, Питеру Стэйси и Коллетт Тэсс, а также огромному числу студентов в трех странах.

Мы предлагаем нашу книгу в помощь мыслительному процессу, в частности

Квентину и Лидии Мэйсон,

Марку Бёртону,

Кэрол и Эндрю Стэйси.

Предисловие ко второму изданию

Книга «Мыслим математически», опубликованная в 1982 г., и сегодня популярна во многих странах. Ею пользуются старшеклассники, абитуриенты, которые собираются изучать математику в университете, педагогических институтах, студенты математических факультетов. Цель нового издания — предложить ряд вопросов для исследования преподавателям начальной и средней школы, а также старшекурсникам-математикам. Они включены в новую главу 11. В первом издании вопросы (задачи) были выбраны для того, чтобы проиллюстрировать различные «процессы» или, как бы мы сформулировали сегодня, использование разных природных способностей с целью расширить и углубить понимание ключевых идей различных математических тем.

Кроме того, вы увидите, как обычные задачи, к которым подходят традиционно, могут порой преобразоваться в интригующие вопросы. А еще вы узнаете, что за самыми элементарными темами зачастую скрываются важные области высшей математики. В то же самое время мы воспользовались случаем и заменили язык, или терминологию, мыслительных процессов, использованный в оригинальном издании, на язык *природных способностей*, которым обладают все люди. Это позволило включить в книгу некоторые соображения и отличительные особенности, возникшие с тех пор, как было опубликовано первое издание.

Процессы и природные способности

В семидесятые годы и в начале восьмидесятых годов прошлого столетия был велик интерес к «процессам», с помощью которых делают те или иные вещи, и математическое мышление — яркий тому пример. Однако, хотя в последнее время интерес к вычленению процессов мышления и творчества вновь возрос, язык, с помощью которого они описываются, претерпел значительные изменения. Мы пришли к выводу, что целесообразнее для нас и для тех, с кем мы связаны математикой и педагогикой, мыслить категориями природных способностей, с которыми ученики и студенты приходят в класс. Таким образом, задача преподавателя состоит в том, чтобы помочь студентам использовать свои способности и развить их в контексте математического мышления.

Как и Калеб Гаттеньо, мы считаем, что основой действия является знание; без знания нет действия. Однако некоторые знания могут быть настолько интегрированы в нашу деятельность, что мы не осознаем, как они работают. Так, мы часто действуем автоматически, в силу привычки. Опять-таки, согласно Гаттеньо, математика как научная дисциплина возникает, когда люди осознают свои действия в определенном контексте (взаимоотношения и свойства в числах и пространстве) и выражают свое знание, чтобы получить «математику». Поэтому математику как свод книжных знаний можно рассматривать как формальное признание, выражение и анализ знаний, которые информируют математические действия в проблемных ситуациях. Чтобы стать преподавателем, необходимо быть в курсе знаний, которые генерируют математические действия, потому что именно они приводят к педагогическим навыкам. Следовательно, жизненно важно взращивать свое умение, занимаясь математическими задачами, которые выносят на поверхность важные математические сведения, которые могут информировать действия в будущем.

Знание тесно связано с познанием, действие тесно связано с поведением. Часто не принимают во внимание такой аспект человеческой психики, как эмоции, или аффективную сферу. В первом издании мы предположили, что если вы застряли, то это «вполне естественное состояние», в котором можно чему-то научиться, а при выражении эмоциональных наблюдений о состоянии «застряли» и в случае догадки (АГА!), хоть бы и преходящей, высвобождается энергия, которая и делает возможным прогресс. Все это вызывало положительные эмоции: удовольствие от поиска смысла с помощью ваших собственных способностей, волнующий миг открытия, эстетическое наслаждение от интересного результата и удовлетворение от найденного решения. В настоящем издании мы развиваем мысль о том, что развитие склонности распознавать проблемные ситуации в материальном мире, равно как и в мире математики («вопросительное отношение» из главы 8) дает существенный вклад в эмоциональную сферу.

Акцент на сотрудничество как обязательный компонент познания математики в настоящем издании отличает его от первоначальной книги, где признается значение совместной работы как способа открыть подходы, немыслимые в процессе единоличного рассуждения. В то же самое время жизненно важны периоды «самостоятельного мышления», во время которых рассматриваются разные возможности, которые либо разрабатываются, либо отбрасываются. Некоторые люди предпочитают начинать в одиночку, а потом, после определенного периода, обмениваются вариантами; другие же предпочитают начать с коллективной генерации идей, продолжить самостоятельно, а затем снова объединить усилия. Разумеется, хорошо, когда в результате совместных размышлений рождаются и формулируются соображения и наблюдения относительно характерных моментов исследования, даже если они могут случиться и в процессе индивидуального мышления. Присутствие других немаловажных лиц — существенный вклад в рождение стимула выражать и прояснять свои мысли, оно также помогает связывать их с мыслями других людей.

Мы также воспользовались случаем, чтобы дополнить новое издание извечными математическими темами, без которых немыслима математика. Краткое описание природных возможностей, тем и связанных с ними понятий вы найдете в новой главе 12.

Сила экспериментального подхода

Оригинальная книга представляла собой результат нашего собственного опыта как математиков-мыслителей, на которых огромное влияние оказала работа Дьёрдя Пойа. В 1967 г. Джон Мэйсон увидел на экране документальный фильм *Let Us Teach Guessing* («Давайте учить догадываться»), вскоре после того как он был отснят, где Джон, тогда еще старшеклассник, помогал учителю. В результате это привело к рождению нового подхода к преподаванию, который он потом реализовал и сформировал на основании опыта, полученного в школьные годы под руководством Джеффа Стила. К своему удивлению, много лет спустя Джон узнал, что Джефф по образованию был не преподаватель и не математик, а дирижер хора! Тем не менее благодаря его энтузиазму Джон с интересом изучал предмет в школе и поступил в университет с багажом азов математического мышления.

Приступив к своей первой работе в Открытом университете, Джон выяснил, что среди программных учебников есть одна из книг Дьёрдя Пойа. Когда Джона попросили организовать недельную летнюю школу для 7000 студентов на трех площадках, он включил в программу этот фильм наряду с занятиями, которые он назвал «*активное решение задач*». Джон наивно полагал, что все преподаватели математики, «обладая математическим мышлением, будут демонстрировать его ученикам», что естественным образом приведет учеников к рассмотрениям частностей и обобщениям, умению строить предположения и убеждаться в их истинности и тому подобное. Прошел не один год, пока он понял, что не все преподаватели имеют настолько хорошее математическое мышление, как он ранее предполагал. В результате появились курсы для преподавателей, призванные научить их математическому мышлению и анализировать полученный опыт с тем, чтобы они могли заострять внимание учеников на ключевых моментах. Тем временем и курс обучения претерпел изменения, а вместе с ним и программа летней школы, с упором на более простые задачи, которые, тем не менее, иллюстрируют «процесс» математического мышления или, другими словами, подталкивают учеников спонтанно использовать свои природные способности, необходимые для математического мышления.

В 1979 г. Джон впервые стал преподавать на курсах совместно с Леоне Бёртон, которая уже обучала учителей математики начальной школы работать с учениками в математическом ключе и исследовала результаты таких занятий на обучаемости детей. Команда преподавателей курса хотела, чтобы курс был практическим, поэтому для расширения экспериментальной базы были введены специальные дни для «собственного мышления». Идея заключалась в следующем: чтобы понять и почувствовать ученика, необходимо понимать и чувствовать соответствующие аспекты собственного мышления. Проблема состояла в том, каким образом выбирать задачи и комментарии для разделов «собственное мышление». Чтобы сделать правильный выбор, Леоне и Джон задумали написать книгу, а потом на другой стороне света к ним присоединилась Кэй Стэйси, которая была также воодушевлена подходом Пойа к открытию математики и в течение нескольких лет использовала его на подготовительных курсах для преподавателей математики начальной и средней школы, где она вместе с Сюзи Гроувз практиковала свои новаторские подходы к решению задач. В основе книги «Мыслим математически» лежит один из принципов, используемых в ее курсе, а именно делать и рассказывать — жизненно важно для того, чтобы подготовиться записать, а запись помогает организовать дела и рассказ таким образом, чтобы на основании догадок и полученного опыта сформировать знание для будущих действий. В нашем случае написание книги выкристаллизовало и организовало наше собственное мышление относительно того, какой именно опыт будет наиболее полезен преподавателям.

Как авторы мы объясняем неослабевающий интерес к нашей книге именно ее экспериментальной основой, которая присутствует и в новом издании. Смысл нового издания заключается в том, чтобы помочь преподавателям сделать опыт математического мышления основой обучения. Развитие вашего математического мышления, обсуждение любой математической темы значительно улучшаются, если сначала совместно обсуждать близкие к математике темы, а потом искать другой совместный опыт, на который можно опереться. Иными словами, все великие педагоги, которые занимались преподаванием математики, согласны в том, что обучение улучшается, если ученикам предлагать задачи, провоцирующие активность, в которой знакомые действия адаптированы и модифицированы таким образом, чтобы принять вызов. Отрабатывать задачи, которые вы можете решить, используя знакомые приемы, нецелесообразно, разве что вы хотите развить высокую скорость. Деятельность производит опыт, но, как мог бы сказать Эммануил Кант,

> *последовательность опытов не умножает опыта этой последовательности.*

Необходимо нечто большее. Пойа называл этот этап «*взгляд назад*» (*looking back*). Мы решили назвать его этапом обзора, что точнее термина «*анализ/размышление*» (*reflecting*), который мы тоже используем. Слово *reflection* имеет много значений. Джим Уилсон как-то сказал, что из всех четырех этапов, которые вычленяет Пойа, об этом этапе больше всего говорят, но меньше всего им пользуются. Большинство педагогов придерживаются мнения, что для того чтобы учиться на основании опыта, необходимо несколько отвлекаться от погружения в деятельность. В конце концов,

> *на основании опыта, пожалуй, не поймешь одной вещи — мы не слишком часто учимся на основании одного лишь опыта.*

Однако педагоги расходятся в следующих моментах: необходимые время, степень и инициатива отступления от действия. Очевидно, что если отвлечься слишком рано, все будут испытывать состояние фрустрации, и это вряд ли произведет полезный эффект. С другой стороны, если предоставить ученикам возможность «учиться на собственном опыте», результат будет неудовлетворительным для всех, кроме наиболее одаренных в плане математики учеников. Для большинства учеников учиться постигать математику — это научное исследование, а не просто естественное усилие над собой. Как говорил Лев Выготский, чтобы оценить опыт, большинству людей необходимо, чтобы рядом был кто-то более опытный, хотя бы некоторое время. Калеб Гаттеньо и некоторые другие математики считают, что обучение на самом деле происходит во время сна, когда мозг сам решает, что ему забыть или хотя бы что опустить. Как бы там ни было, если студенты занимаются анализом (намеренным размышлением), обзором, реконструкцией и повторением, у них гораздо больше вероятность в будущем постичь некие тайны. «Наука замечать», которую Джон Мэйсон сформулировал на основании своего опыта с Дж. Г. Беннеттом, возникла как попытка дать философски обоснованный метод исследования своей собственной практики, но она в равной мере относится и к обучению студентов.

Чтобы учиться на основании опыта, чтобы новые возможности приходили на ум в нужный момент, необходимо настроить себя замечать возможности соответствовать ситуациям, а не реагировать на них, сделать выбор в пользу осознанного действия, а не попадать в наезженную колею. Таким образом, предлагая задачи и следующие за ними подсказки, можно помочь людям научиться использовать свои природные способности. Чем больше ученики настраиваются и осознают свои природные способности, тем более гибкими и эффективными становятся эти способности. Они становятся, на языке Выготского, «действиями для себя», которые включаются сами, а не просто «действиями в себе», которые активирует учитель или какая-либо подсказка к задаче. Все это объясняет суть как предыдущего, так и настоящего издания: предлагаются вопросы, над которыми следует работать. За ними следуют подробные подсказки и комментарий. Однако от них мало толку или нет толку вовсе, если вы не отработаете их все, может, за достаточно длительный период времени, потом проанализируете и попытаетесь найти соответствие между прилагаемым комментарием и вашим собственным опытом. Наша цель — помочь вам научиться размышлять, а, попав в тупик, начинать все заново. Получить «ответ» — не всегда самый ценный результат потраченных усилий. Скорее, намного важнее и ценнее то, что вы замечаете в процессе — как вы застряли, как прогрессируете, строите предположения, используете свои природные способности, знакомитесь с математическими темами и т.п., а также те маленькие вспышки озарения и приятное волнение, которые вы испытываете, когда используете эти способности и достигаете прогресса. Предлагаемые вам задачи — это питательная среда для возбуждения деятельности; как правило, сами математические результаты не имеют значения. Иными словами, эта книга ставит задачу не преподать тот или иной объем математических знаний, а, скорее, показать читателям, какими способами можно использовать свои собственные природные способности, чтобы заставить их служить во имя исследования и понимания математических тем и явлений.

Поговорим о сложности задач. Первоначальное впечатление от вопроса может привести к ощущению «слишком сложный» или «недостаточно сложный». Работая над вопросом, надо понять следующее: как сделать что-либо менее сложным, чтобы добиться успеха (как правило, с помощью уточнений), или более сложным, определив некоторые *размеры возможного варьирования* и меняя их или же расширяя *диапазон допустимых изменений* этих черт. Выбирает уровень сложности для себя каждый самостоятельно в соответствии с текущим моментом, но хочется верить, что когда-нибудь у вас возникнет желание вернуться и заняться более сложной задачей. Суть в том, что поставленные вопросы послужат началом для математического опыта, а читатели и их учителя адаптируют степень сложности таким образом, чтобы опыт был продуктивен, и не будут зацикливаться исключительно на том, чтобы получить ответы к определенным задачам.

Благодарности

Когда мы работали над оригинальной книгой, мы полагали, что математические вопросы имеют отношение исключительно к миру математики и нет необходимости знакомить читателя с подроб-

ностями их происхождения. Однако с возрастом мы заинтересовались источниками задач, а также тем, как они трансформируются со временем. Когда мы были абсолютно уверены в источнике той или иной математической задачи, мы вводили их в новое издание. Если же такой ссылки нет, то источник либо утрачен, либо попал к нам от разных коллег по математическому сообществу, переходя из рук в руки, либо мы считаем, что сочинили это сами. Мы благодарны за комментарии по поводу новых ссылок Эве Нолл и Ами Мамоло.

Посвящение

Нашу первую книгу мы посвятили нашим детям, которые с тех пор, как и следовало ожидать, стали взрослыми. К несчастью, Леоне умерла от рака еще до того, как мы приступили к работе над новым изданием, поэтому мы посвящаем эту книгу ей. Как сказал ее сын Марк,

> *книги Леоне Бёртон были всегда посвящены мне, ее сыну. Эта же книга посвящается маме и ее памяти. Без всякого сомнения, я получил замечательный дар — решать задачи и мыслить математически; неважно, от кого он мне достался — от матери или Джона Мэйсона, принесшего к нам в дом первый компьютер, когда я был еще ребенком, чтобы я мог «поиграть в Лого».*

Джон Мэйсон, Оксфорд, апрель 2010
Кэй Стэйси, Мельбурн, апрель 2010

ГЛАВА I

КАЖДЫЙ МОЖЕТ НАЧИНАТЬ

Эта глава познакомит вас с занятиями, которые запустят мыслительный процесс, над каким бы вопросом вы ни работали. Так что не надо пугаться вопроса из области математики и не стоит с тоской на лице смотреть на чистый лист бумаги. Пускаться во все тяжкие по первому пути, который взбредет на ум, в надежде, что грубая сила победит, тоже неумно с точки зрения тактики. Однако есть и продуктивные ходы.

Экспериментирование[1]

Лучше всего начать с практики, например вот с такой задачки:

Склад

На складе вы получите 20%-ю скидку, но вам придется заплатить 15%-й налог с оборота. Как вы думаете, что лучше посчитать сначала — скидку или налог?

Как подступиться к такому вопросу? Для начала нужно точно понять, о чем вас спрашивают, но это может произойти не сразу, а только после некоторых усилий. Надеюсь, вам пришло в голову посчитать, что к чему для товара стоимостью, скажем, £100.

ПРИСТУПАЙТЕ, ЕСЛИ ЕЩЕ НЕ ПРИСТУПИЛИ

[1] Автор использует термин specializing, т.е. конкретизация, или специализация, но, по словам В.И. Арнольда, математика — наука экспериментальная, поэтому здесь термин «specializing» переведен как экспериментирование. — *Прим. ред.*

Удивлены результатом? Большинство людей удивляются, и именно это удивление питает математическое мышление. А теперь посмотрим, таков же результат для товара стоимостью, скажем, £120?

ПОПРОБУЙТЕ И УВИДИТЕ!

Запишите ваши подсчеты и ваши соображения. Это единственный способ развивать мыслительные способности.

ПОПРОБУЙТЕ И УВИДИТЕ!

А теперь, можно с помощью калькулятора, решите оба примера. Вы преследуете сразу две цели: получить представление, какой может быть ответ, и в то же самое время получить ощущение, почему ваш ответ может быть правильным. Другими словами, решив примеры, вы наполните вопрос смыслом для себя и, может быть, начнете видеть скрытую модель для всех частных случаев, что и послужит ключом к окончательному решению вопроса.

Какую же модель, или схему, может скрывать под собой этот вопрос? Может, у вас есть опыт решения подобных задач и вы знаете, что делать. Если так, то подумайте, как вы могли бы побудить кого-либо менее искушенного взяться за эту задачу, затем прочитайте мои предложения. Важно проработать все мои доводы, потому что именно там вводятся и иллюстрируются важные моменты математического мышления.

Как окончательная цена зависит от порядка вычисления скидки и налога? В примерах, которые вы решили, должна прослеживаться схема. Если ее нет, то проверьте свои расчеты! А будет ли такой же результат для других цен? Если вы не уверены, попробуйте другие примеры. Когда будете уверены, ищите объяснение (или читайте ниже).

ПРОБУЙТЕ НА ДРУГИХ ПРИМЕРАХ, ПОКА НЕ БУДЕТЕ УВЕРЕНЫ

Многое зависит от формы, в которой вы делаете расчеты. Обычная форма для скидки и последующего налога следующая:

подсчитайте скидку:	для £100 скидка составляет £20,
вычтите ее из цены:	$\pounds 100 - \pounds 20 = \pounds 80$,

подсчитайте налог: 15% от £80 — это £12,
добавьте налог и получите окончательную цену: $\pounds 80 + \pounds 12 = \pounds 92$.

Попробуйте найти другие способы подсчета, пока не найдете тот, что показывает, почему ваш результат всегда правильный. Например, вы хотите найти форму подсчета, которая не зависит от начальной цены. Чтобы сделать это, попробуйте посчитать, какой процент от исходной цены вы платите, когда налог уже вычтен и какой процент от исходной цены вы платите, когда добавлен налог.

СДЕЛАЙТЕ ЭТО ПРЯМО СЕЙЧАС

В любом случае вы узнаете, что:

(а) вычесть 20% из цены — все равно что заплатить 80%, т.е. вы платите 0,80 от цены;
(б) добавить 15% к цене — все равно что заплатить 115%, т.е. вы платите 1,15 от цены.

Затем для любой исходной цены, скажем, £100, посчитав

сначала скидку: вы платите $1{,}5 \times (0{,}80 \times \pounds 100)$,
сначала налог: вы платите $0{,}8 \times (1{,}15 \times \pounds 100)$.

Записав подсчет в такой форме, вы убедитесь, что порядок вычисления не имеет значения, потому что в итоге мы умножаем исходную цену на два числа в любом порядке. Если исходная цена £P, то, посчитав

сначала скидку: вы платите $1{,}5 \times 0{,}80 \times \pounds P$,
сначала налог: вы платите $0{,}8 \times 1{,}15 \times \pounds P$,

и они всегда равны.

Обратите внимание, сколь важно отстраниться от деталей подсчета и посмотреть на его форму или вид. Подобная мыслительная деятельность является основой для развития вашего математического мышления.

«*Склад*» иллюстрирует несколько важных аспектов математического мышления, на два из которых я хочу обратить ваше внимание. Во-первых, есть особые процессы, которые помогают

математическому мышлению. В данном случае процесс, на который делается упор, — это ЭКСПЕРИМЕНТИРОВАНИЕ, что подразумевает обращение к примерам, чтобы выяснить все про вопрос. Выбранные вами примеры особенные — в том смысле, что они представляют собой частные случаи более общей ситуации в самом вопросе. Во-вторых, если вы ЗАСТРЯЛИ, ничего сверхъестественного в этом нет и, как правило, можно найти тот или иной выход. В данном случае это ЭКСПЕРИМЕНТИРОВАНИЕ. Это простой способ, использовать который может каждый, и, когда вопрос ставит людей в тупик, предложения типа

А вы не пробовали на конкретном примере?

и

Что произойдет в этом отдельном случае?

сталкивают их с мертвой точки.

Следующий пример, взятый нами из сборника Banwell, Saunders and Tahta (1986), иллюстрирует другие формы экспериментирования.

Полоска бумаги

Представьте себе длинную узкую полоску бумаги, вытянутую перед вами слева направо. Представьте, что взялись за ее концы и положили тот конец полоски, что у вас в правой руке, поверх левого. А теперь плотно прижмите полоску и сложите пополам, чтобы получилась складка. Повторите всю операцию полностью на получившейся полоске еще два раза. Сколько всего получится складок? А сколько будет складок, если операцию повторить 10 раз?

ПОПРОБУЙТЕ ПРЯМО СЕЙЧАС

ЗАСТРЯЛИ?

– Экспериментируйте в уме, сосчитав складки после двух сложений.

– Может, рисунок поможет укрепить мысленный образ.
– Экспериментируйте, попробовав сложить полоску бумаги.
– Попробуйте сделать три сложения, а потом четыре сложения. Ищите схему.
– Что вы хотите найти? Будьте внятны и точны.
– Есть ли нечто, имеющее отношение к складкам, что можно подсчитать более простым способом?
– Проверьте все предположения на новых примерах!

Я не собираюсь давать полного решения этого вопроса. Если вы ЗАСТРЯЛИ, не огорчайтесь. Оказаться в положении «ЗАСТРЯЛИ» — это здорово, если рассматривать эту ситуацию как возможность чему-либо научиться. Может, вы вернетесь к этому вопросу с новой энергией, когда одолеете следующую главу! Прежде чем покончить с этим вопросом, попробуйте мысленно до пяти сложений с помощью рисунков или с настоящей бумажной полоской. Сосчитайте складки и начертите таблицу с результатами. Если в «*Складе*» конкретизация означает обращение к числовым примерам, то в «*Полоске бумаги*» надо использовать рисунки или настоящие бумажные полоски и экспериментировать.

Важно использовать то, чем вы можете уверенно манипулировать. Это могут быть физические предметы или математические, например диаграммы, числа или алгебраические символы.

Экспериментирование само по себе вряд ли решит для вас любой вопрос, но оно наверняка подтолкнет вас к действиям и настроит на нужный лад. Вопрос теряет свой пугающий внешний вид и становится уже не таким неприступным. Более того, частные случаи должны помочь вам почувствовать, в чем именно состоит вопрос, и это натолкнет на верную догадку. Дальнейшая тщательная конкретизация с упором не на «что», а на «почему» может привести к осознанию того, что на самом деле происходит.

Следующий вопрос относится к более знакомой области.

Палиндромы

Палиндромом называется число, например 12321, если оно читается одинаково — как слева направо, так и справа налево. Один мой друг уверяет, что все четырехзначные палиндромы делятся на 11. Так ли это?

ПОПРОБУЙТЕ ПРЯМО СЕЙЧАС

ЗАСТРЯЛИ?

– Найдите несколько четырехзначных палиндромов.
– Вы верите моему другу?
– Что вы хотите показать?

Вариант решения

Помните, что это всего лишь вариант и в полировке он не нуждается, — это всего лишь один из способов размышления над вопросом. Единственно разумный путь — начать с экспериментирования. Я хочу прочувствовать, о каких числах идет речь. Что же такое палиндромы?

747 — это палиндром,

88 и 6 — тоже палиндромы.

В вопросе речь идет лишь о палиндромах с четырьмя разрядами, т. е. таких числах, как 1221, 3003, 6996 и 7557. Что же мне нужно узнать? Мне нужно узнать, все ли такие числа делятся на 11.

ПРОВЕРЬТЕ ПРЯМО СЕЙЧАС

Попробовав на отдельных числовых примерах, я убедился в том, что такой результат вполне возможен. Однако заметьте: я не могу быть уверен в том, что мой результат *всегда* верен на основании исключительно экспериментирования, разумеется, если я не собираюсь проверить *все* четырехзначные палиндромы. Поскольку их всего около 90, целесообразнее поискать скрытую модель.

СДЕЛАЙТЕ ЭТО ПРЯМО СЕЙЧАС

Я взял для примера четыре конкретных случая:

$$1221/11 = 111,$$

$$3003/11 = 273,$$

$$6996/11 = 636,$$

$$7557/11 = 687,$$

но не нашел в них никакой очевидной модели. Это наводит на мысль об исключительно важном моменте относительно экспериментирования. Выбирать примеры наугад — неплохой способ прояснить вопрос и понять, может ли утверждение или догадка быть верной, но если мы ищем модели, успех более вероятен, если экспериментирование осуществлять систематически. Как я могу действовать систематически в данном случае?

ПОПРОБУЙТЕ ПРЯМО СЕЙЧАС

ЗАСТРЯЛИ?

– Какой самый маленький четырехзначный палиндром?
– Какой следующий за ним самый маленький?
– Каким образом из одного палиндрома сделать другой?

Один способ состоит в следующем: начать с самого маленького четырехзначного палиндрома (то есть с 1001) и продолжать по нарастающей в числовом порядке:

$$1001, 1111, 1221, 1331, \ldots .$$

Проверим утверждение моего друга:

$$\begin{aligned} 1001/11 &= 91, \\ 1111/11 &= 101, \\ 1221/11 &= 111, \\ 1331/11 &= 121. \end{aligned}$$

Это не только подтверждает утверждение моего друга, но и предполагает нечто большее. Обратите внимание: каждый из приведенных палиндромов больше предыдущего на 110, а каждое частное больше предыдущего на 10.

АГА! Теперь я понимаю, почему утверждение моего друга верно. Разница между последовательными палиндромами всегда 110. Самый маленький четырехзначный палиндром (1001) точно делится на 11, равно как и 110. Поскольку все последующие палиндромы получаются из 1001 прибавлением 110, все четырехзначные палиндромы должны делиться на 11.

Таким образом, вопрос решен, осталось только «причесать» решение и красиво сформулировать.

Или не решен? Покрывает ли решение все конкретные случаи, которые я использовал? Присмотритесь внимательнее! Если все палиндромы можно получить, последовательно прибавляя 110 к 1001, то у всех палиндромов в разряде единиц будет один. Но ведь это не так! 7557 — тоже палиндром, а в разряде единиц стоит 7. Где же ошибка? Экспериментирование привело к модели (что последующие палиндромы отличаются на 110), на основании которой я выстроил свое решение. Но эта модель не работает для всех палиндромов, поскольку предсказывает нечто ложное (все палиндромы не оканчиваются на один). Ошибка заключается в том, что мы на основании всего лишь трех разностей скоропалительно сделали общий вывод. К счастью, конкретизация снова нам поможет: на этот раз выявить недостаток модели. Посмотрите на нижеследующий перечень палиндромов:

Палиндромы	1881	1991	2002	2112	2222	2332
Разности		110	11	110	110	110

На этот раз я приступлю с большей осторожностью и, скорее, с недоверием, нежели с доверием. Судя по модели, последующие палиндромы отличаются от предыдущих на 110, за исключением тех случаев, когда меняется тысячный разряд (и тогда разность 11). Дальнейшая конкретизация дает результаты, согласующиеся с этим, и умножает уверенность в том, что это и есть искомая модель. Таким образом, конкретизация снова подтвердила нам то, что модель может быть верной. А теперь пришло время искать общую причину, почему новая модель работает, в результате чего должно получиться нечто вроде следующего.

> Последующие палиндромы с одинаковыми тысячными разрядами, чтобы быть палиндромами, должны иметь такие же разряды единиц. Таким образом, числа отличаются только вторым и третьим разрядом, каждый из которых больше единицы. Следовательно, разность составляет 110.
>
> Последующие палиндромы, которые отличаются тысячными разрядами, получаются в результате прибавления 1001 (чтобы увеличить разряд тысяч и единиц) и вычитания 990 (чтобы уменьшить второй и третий разряды с девяти до нуля). Но, как видно из примеров, $1001 - 990 = 11$.
>
> В обоих случаях разность делится на 11; таким образом, поскольку самый маленький четырехзначный палиндром (1001) делится на 11 (это так), то и все остальные тоже делятся.

А теперь вернемся назад и посмотрим, каким образом я использовал частные случаи:

– Они помогли мне осознать вопрос, заставив уяснить, что такое палиндром.
– Они также привели меня к обнаружению формы четырехзначного палиндрома.
– Я сумел убедиться на примерах в том, что утверждение моего друга верно.
– Позднее в результате экспериментирования выявилась модель рассуждений, и я получил представление о том, почему этот результат верен.
– Проверяя верность модели (а она не была верна), я воспользовался другими частными случаями.

Именно потому что конкретные примеры можно использовать так эффективно, так легко и столь разнообразно, она и является основой математического мышления.

Аргументация, приведенная в моем решении, никоим образом не является образчиком элегантности. Первая попытка редко похожа на варианты решений, которые вы найдете в учебниках. Если вы достаточно продвинуты в математике и уверенно обращаетесь с буквами, заменяющими произвольные числа, то намного быстрее получите решение.

Может, вы обратили внимание на то, что все четырехзначные палиндромы имеют вид $ABBA$, где A и B — цифры. Такое число имеет следующее значение:

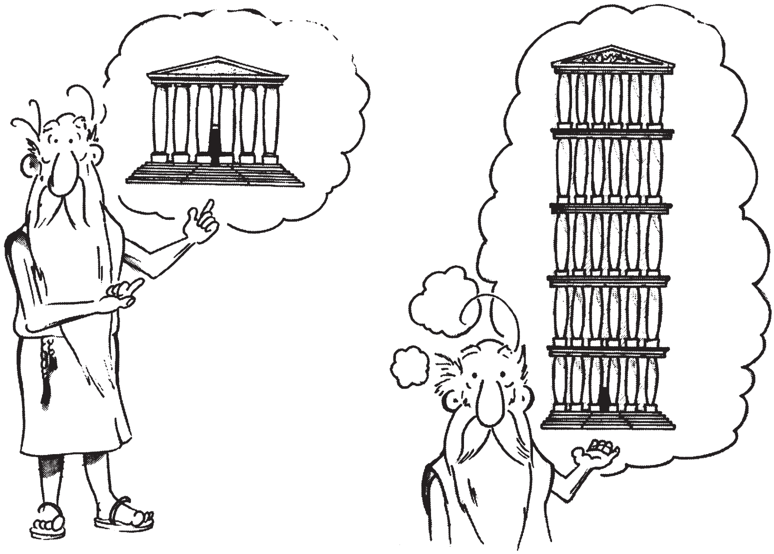
$$\begin{aligned}1000A + 100B + 10B + A &= (1000+1)A + (100+1)B = \\ &= 1001A + 110B = \\ &= 11 \times 91A + 11 \times 10B = \\ &= 11(91A + 10B).\end{aligned}$$

(Если вам подобное рассуждение с символами представляется слишком сложным, проследите его на частном примере, положив $A = 3$ и $B = 4$. Затем повторяйте вычисления с другими конкретными значениями для A и B, пока не прочувствуете схему, выраженную алгебраическими символами.)

Элегантные решения, подобные этому, явно не имеют отношения к частным случаям, поскольку с помощью символов дают общую аргументацию, подходящую для всех четырехзначных палиндромов сразу. Однако, чтобы придумать это решение, я должен быть достаточно близко знаком с математическими объектами задачи (а именно четырехзначными палиндромами, переменными A и B и десятичной записью чисел), чтобы общая форма $ABBA$ стала частной и внушала доверие. Я должен с легкостью манипулировать как палиндромами, так и заменяющими их символами. В этом суть экспериментирования. Обращение к знакомым, внушающим доверие объектам и использование их для исследования существа вопроса, создают ощущение уверенности и легкости в незнакомых ситуациях.

Обобщаем

Говоря о частных случаях, немыслимо избежать обратной стороны медали, т. е. процесса обобщения: исходя из отдельных примеров строить предположения об обширном классе предметов.



Обобщение — *источник жизненной силы* математики. Если конкретные результаты могут сами по себе быть полезными, то общий случай представляет собой истинно математический результат. Например, в задаче «*Склад*» мы знаем, что будет с товаром стоимостью £100, но эта информация менее важна, чем то, что окончательная цена абсолютно не зависит от порядка вычисления скидки и налога.

Обобщение начинается, когда вы чувствуете скрытую схему, даже если не можете ее сформулировать. Посчитав скидку и налог для нескольких цен, я заметил, что порядок подсчета не влияет на конечный результат. Это и есть скрытая схема, или обобщение. Я предположил, что порядок вычисления никогда не повлияет на результат. Когда подсчеты были записаны в удобной форме, было несложно ввести символ P (price — цена) для начальной цены и показать, что обобщение верно.

Обобщение на этом не должно заканчиваться. А что если скидка и цена изменятся? Может, иногда порядок вычисления все-таки имеет значение?

ЕСЛИ ВЫ ЕЩЕ ЭТОГО НЕ СДЕЛАЛИ,
ПОПРОБУЙТЕ ПРЯМО СЕЙЧАС

Я надеюсь, что по форме вычисления, полученной ранее, вы поняли, что конкретные проценты не имеют отношения к рассуждениям. Часть силы символов в математике состоит в том, чтобы выражать подобную модель. В данном случае обозначим скидку как дробь D, обозначим налоговую ставку как дробь V, а исходную цену обозначим через P. Итак, если

сначала считаем скидку:	вы платите $P(1-D)(1+V)$,
сначала считаем налог:	вы платите $P(1+V)(1-D)$.

Они всегда равны, поскольку порядок, в котором мы перемножаем числа (а значит, и символы, которые их заменяют), не меняет конечного результата. Привлечение символов позволяет представить рассуждение в кратком виде, и можно одновременно иметь дело с целыми классами примеров (в данном случае любыми ценами, налоговыми ставками и скидками). Однако использовать символы не так просто, как может показаться, — символы должны стать такими же знакомыми и значимыми, как числа, которые они заменяют.

«*Склад*» в простой форме иллюстрирует постоянное взаимодействие частностей и обобщения, что составляет значительную часть математического мышления. Частные случаи привлекаются для получения данных, на основании которых можно сделать обобщение. Сформулировав схему, которую вы почувствовали, мы делаем предположение (догадались или кто-то подсказал), которое дальнейшие частные случаи могут подтвердить или опровергнуть. Процесс подтверждения предположения требует дальнейшего обобщения, причем акцент смещается с догадки, которая может оказаться верной, к пониманию того, почему она может быть верна. Решая «*Склад*», я сначала обобщил результат, предположив, что изменение порядка вычисления не влияет на окончательный результат («что»). Для подтверждения своего предположения мне пришлось заняться методом вычисления («почему»).

«*Палиндромы*» иллюстрируют два других важных аспекта обобщения. Частные случаи должны быть систематическими, тогда они способствуют обобщению, поскольку модель более очевидна не на выбранных наугад, а на связанных между собой примерах. Однако тут есть скрытая угроза. Иногда модель кажется очевидной, и так заманчиво убедить себя в ее верности, но в действительности она верна лишь отчасти. В «*Палиндромах*» была упущена разница в 11 между некоторыми последовательными палиндромами, поскольку не проверили примеры, где менялись тысячные разряды. Надо быть осторожным и не хвататься за кажущуюся очевидной модель или обобщение, не проверив их на большом количестве примеров. Это основа математического мышления. В равной мере опасно бросаться с головой в предположение и отмахиваться от догадки. В главах 5 и 6 речь и пойдет об этой тонкой грани между готовностью поверить в обобщение и нежеланием шагнуть в неизведанное.

Делаем заметки

Прежде чем мы перейдем к другим примерам экспериментирования и обобщения, я хочу показать вам способ записи математического опыта. Метод этот вводится сейчас, потому что вы должны начать записывать свои наблюдения, чтобы они не потерялись и потом можно было их проанализировать и изучить. Запись наблюдений поможет вам подмечать их, а это способствует развитию математического мышления. Старайтесь записывать три вещи:

– все важные мысли, которые приходят вам в голову, когда вы ищете ответ на вопрос;
– что вы пытаетесь делать;
– ваши ощущения по этому поводу.

Само собой разумеется, это не так просто, но попробовать стоит. В частности, это здорово помогает, когда вы попадаете в тупик; так и пишите — ЗАСТРЯЛИ! Признать это равнозначно первому шагу, чтобы выбраться из этого состояния.

Записывая свои ощущения и математические идеи, которые приходят вам на ум, вы заполняете пустоту белого листа, который лежит перед вами, когда вы приступаете к задаче.

Как только начало положено, мыслям становится свободнее. Потом очень важно записывать, что вы пытаетесь сделать, поскольку можно сбиться с выбранного пути и забыть, почему вы начали выполнять то или иное сложное вычисление. Нет ничего хуже, чем отвлечься на миг от какого-нибудь занятия и осознать, что вы понятия не имеете, что делаете и почему!

Возьмите себе за правило: делайте записи в процессе работы над любой из предложенных в книге задач. *Пусть вас не пугает* большой объем вещей, которые надо записывать. Из главы в главу я буду подсказывать вам, что именно нужно записывать. Самый подходящий момент — начать прямо сейчас, так что попытайтесь делать записи, когда приступите к работе над следующей задачей. *Избегайте подробно описывать* то, что вы делаете. Вам нужны краткие записи, которые помогут вспомнить конкретный момент. Не забывайте про частные случаи и обобщение и сравните свой отчет с моим лишь тогда, когда сделаете все, что можете. Мой отчет наверняка окажется более формальным, чем ваш, и для удобства некоторые фразы я даю прописными буквами.

Лоскутное одеяло

Нарисуйте квадрат и проведите прямую линию прямо через него. Начертите еще несколько прямых линий в любом расположении таким образом, чтобы квадрат разделился на несколько частей. Задача состоит в раскрашивании всех участков так, чтобы смежные были раскрашены в разные цвета. (Участки, имеющие лишь одну общую точку, смежными не считаются.) Сколько различных цветов понадобится, чтобы раскрасить такой разделенный на куски квадрат?

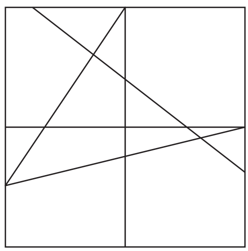
ПОПРОБУЙТЕ ПРЯМО СЕЙЧАС.
ЗАПИШИТЕ МЫСЛИ И ОЩУЩЕНИЯ,
ОБРАЩАЯСЬ К МОИМ КОММЕНТАРИЯМ,
ТОЛЬКО ЕСЛИ ВЫ ЗАСТРЯЛИ

ЗАСТРЯЛИ?

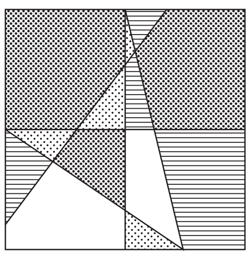
– Проясните вопрос с помощью конкретных примеров — постарайтесь раскрашивать в определенном порядке.
– Что вы ЗНАЕТЕ? Как получилось такое расположение?
– Что вам НУЖНО узнать?
– Следуйте системе!

Вариант решения

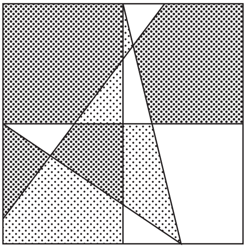
О чем спрашивается в задаче? Попробуйте на отдельном примере, т. е. экспериментируйте, чтобы понять, что происходит.



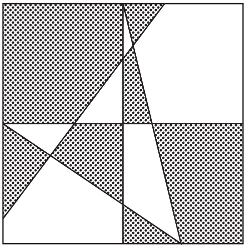
Эти пять прямых образовали 13 участков. Я ЗНАЮ, что мне надо раскрасить их таким образом, чтобы смежные имели разные цвета. Вот один из способов, если использовать четыре цвета:



Мне НУЖНО найти минимальное число цветов, которые необходимы при любом расположении линий. Четыре — это действительно минимальное число цветов, необходимых для этого? ПОПРОБУЙТЕ использовать только три цвета:

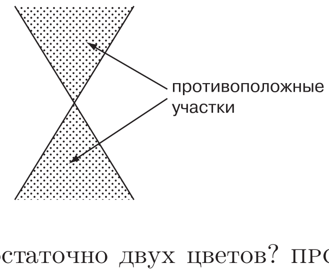


Получилось! Попробуйте еще, используя только два цвета.

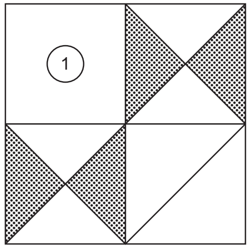


Опять получилось! Очевидно, что одного цвета недостаточно, поэтому для данного конкретного расположения достаточно двух цветов.

Раскрашивая области, я обратил внимание на то, что «противоположные» участки все время раскрашивал одним и тем же цветом (обобщение!).

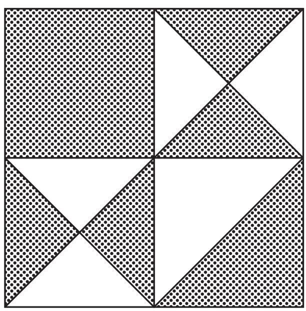


А всегда ли достаточно двух цветов? ПРОВЕРЬТЕ на другом примере — старайтесь использовать два цвета и не забывайте о «противоположном» правиле (опять конкретизация!).



АГА! «Противоположное» правило не работает. Когда темные участки раскрашены, используя «противоположное» правило, участок (1) не может быть ни темным, ни белым. И с другими участками та же проблема. Либо мне нужно больше двух цветов, либо я должен отказаться от «противоположного» правила. Так какой же путь мне выбрать?

ПОПРОБУЙТЕ раскрасить снова двумя цветами и откажитесь от «противоположного» правила.



В процессе этой успешной попытки я заметил, что как только один участок раскрашен, работать с остальными легко. Участки, смежные с раскрашенным, должны непременно быть другого цвета — «смежное» правило. «Противоположное» правило не работает, но теперь я делаю предположение, что любое расположение участков можно раскрасить только двумя цветами (обобщаю, чтобы найти, ЧТО может быть верно).

В настоящий момент у меня не так много оснований полагать, что мое предположение верно. ЗАСТРЯЛИ! Как мне убедить себя, что оно верно всегда? АГА! экспериментируем, следуя системе.