Содержание

ГЛАВА I

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

1.0. Введение

Понятие множества используется во всех математических дисциплинах. Сама идея о существовании соотношения между величинами различной природы возникла, по-видимому, во времена античности, однако потребовалось много столетий, чтобы это первоначальное представление привело к современному теоретико-множественному понятию отображения, которое каждому элементу одного множества ставит в соответствие элемент другого множества. Античные математики использовали различные таблицы, например, астрономические таблицы Птолемея, но эти таблицы понимались как соотношения между конечными дискретными множествами постоянных величин и предназначались только для вычисления числовых значений. В многочисленных трудах греческих математиков, включая и Архимеда, не используется идея функциональной зависимости. Эта идея сформировалась лишь в начале 17-го века, когда научились представлять функциональные зависимости с помощью формул. В работах Декарта, Ньютона, Лейбница, Эйлера для записи различных зависимостей стали использовать не громоздкие таблицы, а компактные алгебраические выражения. Эти работы привели к значительным успехам в математике и благодаря им в 18-м веке главным объектом становится не число, а функция.

Понятия, связанные с множествами, введены немецким математиком Дедекиндом в 1871 году в работе по теории алгебраических чисел и теории полей. Общие принципы множеств, или совокупностей, сформулированы Георгом Кантором в эти же годы, однако его основные работы посвящены свойствам бесконечных множеств. Кантор показал, что свойства бесконечных и конечных множеств значительно различаются.

1.1. Множество и его элементы

Понятие множества не имеет строгого определения. Оно выведено из понятия совокупности, образованной из конечного числа предметов, которые необходимо рассмотреть, как единое целое. Например, можно говорить о множестве различных студентов, которых объединяет то, что они учатся в одной учебной группе, или о множестве граждан одной страны, или о множестве всех точек, лежащих на одной прямой. При этом чтобы выделить эти предметы, необходимо указать свойства, которыми они обладают, а также указать признаки, по которым можно будет отличить предметы одной совокупности от другой. В 1872 году Кантор определил множество как «объединение в одно целое объектов, хорошо различимых нашей интуицией». В книге Бурбаки «Теория множеств», изданной в 1939 году, имеется такое определение: «множество образуется из элементов, обладающих некоторыми свойствами и находящихся в некоторых отношениях между собой или с элементами других множеств».

Объекты, из которых образованы множества, называют **элементами** множеств. По так называемой наивной точке зрения, элементами множеств могут быть объекты любой природы. Множество образовано из различных элементов, но это единый, самостоятельный объект, его можно представить в виде оболочки, в которую заключены его элементы и в которой нет ничего, кроме них.

Множество однозначно задано, если определены его элементы.

Для обозначения множеств обычно используются большие латинские буквы A, B, C, X, Y, ..., а элементы обозначаются строчными буквами a, b, c, x, y, ... Утверждение «x является элементом A», или « x принадлежит A» записывается как

$$x \in A.$$

Если x не является элементом A, тогда пишут

$$x \notin A.$$

Определение. Два множества A и B **равны**, если они состоят из одних и тех же элементов.

Запись $A = B$ означает, что множество A равно множеству B, а запись $A \neq B$ означает, что они не равны. Каждый элемент в одном множестве является элементом только один раз, даже если он и повторяется в записи множества многократно. Элементы одного множества принято заключать в фигурные скобки. Например, множество букв {ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ} и множество букв {ВИНЕР МОНЖ СМИТ ЯН} равны, поскольку они задают одно и то же множество букв {В Е Ж И М Н О Р С Т Я}, однако если рассматривать в качестве элементов не буквы, а слова, тогда это будет два различных множества.

Перестановка элементов списка не меняет самого множества, так, множество {a, b, c, d} и множество {d, c, b, a} равны. Очень часто в приложениях используются числовые множества, для обозначения которых выделены специальные символы

N = {1, 2, 3,}, множество натуральных чисел.

Z = {..., –2, –1, 0, 1, 2, ...}, множество целых чисел.

Q = {множество рациональных чисел}.

R = {множество вещественных чисел}.

C = {множество комплексных чисел}.

Чтобы задать множество, можно просто перечислить все его элементы, однако на практике составить такой список обычно довольно сложно. Например, если мы хотим составить список всех, живущих в данном городе, рост которых превышает 2 метра, то теоретически это вполне возможно, но в реальности получение списка для такого множества вызовет непреодолимые проблемы. Список можно применять, когда число элементов сравнительно небольшое. Еще один способ задания множества основан на так называемом **принципе абстракции**, который формулируется следующим образом:

для любого множества X и любого свойства P имеется множество A, такое, что элементы A являются элементами X и обладают свойством P.

В этом случае множество можно задать, указав некоторое свойство, позволяющее выделить элементы множества из элементов основного множества.

Пример 1.1

(a) $M = \{x: x$ – нечетное целое число и $x > 1\}$.

Здесь M является множеством, состоящим из положительных целых чисел, которые больше 1 и нечетные.

(b) $A = \{x: x$ – гласная буква английского алфавита$\}$.

Здесь, $a \in A$, $e \in A$, но $b \notin A$. Нетрудно заметить, что это множество можно задать и перечислением его элементов, т.е. $A = \{a, e, i, o, u, y\}$.

(c) Пусть $B = \{x: x^2 + x - 2 = 0\}$,

$C = \{-2, 1\}$, $D = \{-2, -2, 1, 1\}$.

В этом случае все три множества равны, т.е. $B = C = D$, поскольку множество не зависит ни от того, в каком порядке показаны его элементы, ни от того, сколько раз они повторяются, ни от того, как они получены.

(d) Пусть $A = \{2, 3, 4, 5\}$ $B = \{5, 7, 8\}$ $C = \{A, B\}$

Множества A и B являются числовыми, а элементами множества C являются уже не числа, а множества, т.е. C является **множеством множеств** и состоит из двух элементов. Элемент $2 \notin C$, несмотря на то, что $2 \in A$ и $A \in C$.

Кроме этого, множество можно задать, определяя каждый его элемент по некоторому уже известному множеству. Например, $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ – множество натуральных чисел. Определим новое множество, как множество степеней числа 3 $\{3^1, 3^2, 3^3, ...\}$.

Множество может быть также задано при помощи операций над множествами.

1.2. Универсальное множество и пустое множество

При задании множества в любом приложении теории множеств обычно приходится сталкиваться с вопросом, к какому основному или **универсальному** множеству принадлежит рассматриваемое множество. Например, когда мы говорим о множестве студентов какой-либо группы, то универсальным множеством может быть как множество всех студентов университета, в котором учатся студенты этой группы, так и множество всех людей на планете. Это определяется целями конкретной задачи. Если надо найти некоторое множество точек на плоскости, то универсальным множеством будет множество всех точек плоскости. Универсальное множество обычно обозначается символом

$$U.$$

Множество, в котором нет ни одного элемента, называется **пустым** или **несуществующим** множеством и обозначается

$$\varnothing.$$

Для любого элемента x можно сказать, что пустое множество обладает свойством $x \notin \varnothing$. Пустое множество может возникнуть при задании множества U и некоторого свойства A, такого, что в U нет ни одного элемента со свойством A, например, множество

$$M = \{x\text{: x натуральное число, для которого } e^x < 2^x\}$$

не имеет ни одного элемента, т.е. является пустым. Имеется только одно пустое множество, и если M и S пустые множества, то M = S, поскольку они состоят из одних и тех же элементов, а именно – из никаких элементов.

1.3. Подмножества

Выбирая из множества M какие-либо элементы, можно получить новое множество S, которое будет частью множества M или, как еще говорят, **подмножеством** множества M. Иначе говоря, множество S является подмножеством множества M, если каждый элемент S является также и элементом M. Это отношение записывается так

$$S \subseteq M \text{ или } M \supseteq S,$$

что иногда читают, как S **содержится в** M или M **содержит** S.

Обычно принято считать, что часть «меньше» целого, однако в теории множеств это не так, поскольку каждое множество является подмножеством самого себя, т.е.$M \subseteq M$, это свойство называют **рефлексивностью**.

Пример 1.2

(a) Рассмотрим множества

$$X = \{1, 2, 3, 4, 7, 8\} \quad Y = \{2, 3, 8, 9\} \quad Z = \{2, 8\}.$$

Здесь $Z \subseteq X$ и $Z \subseteq Y$, но Y не является подмножеством X, поскольку имеет элемент 9, которого нет в множестве X. Кроме того, поскольку эти множества определяют одну и ту же задачу, то все они должны принадлежать к универсальному множеству U и это множество U должно содержать, по крайней мере, следующие элементы {1, 2, 3, 4, 7, 8, 9}.

(b) Пусть N, Z, Q, R множества, о которых упоминалось в параграфе 1.1. Тогда

$$N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R.$$

(c) Каждое множество X является подмножеством универсального множества U, поэтому, по определению, все элементы X принадлежат U. Пустое множество $\varnothing$ также является подмножеством X.

(d) Если каждый элемент A принадлежит множеству B, а каждый элемент B принадлежит множеству C, тогда каждый элемент A принадлежит C, т.е. если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, тогда $A \subseteq C$.

(e) Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, тогда A и B имеют те же самые элементы и A = B. Обратно, если A = B, тогда $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, т.к. каждое множество является подмножеством самого себя.

Формально последние три случая определяют следующие условия:

1. Для любого множества A всегда $\varnothing \subseteq A \subseteq U$.
2. Для любого множества A выполняется $A \subseteq A$.
3. Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, тогда $A \subseteq C$.
4. $A = B$, только если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Если $A \subseteq B$ и $A = B$, то A называют **несобственным подмножеством** B. Когда $A \subseteq B$ и $A \neq B$, т.е. в B содержится по крайней мере один элемент, которого нет в A, то A называют **собственным подмножеством** B и пишут $A \subset B$. Пусть, например,

$$A = \{1, 2\} \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad C = \{5, 4, 3, 2, 1\}.$$

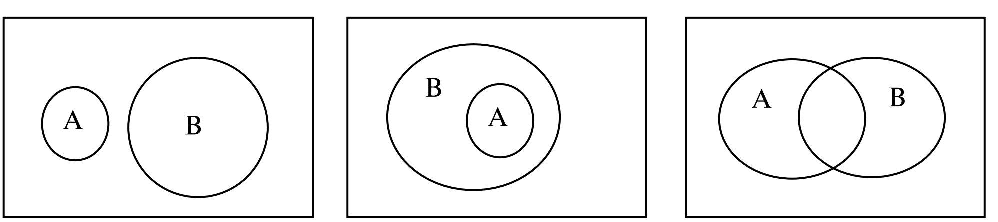
Здесь A и B являются подмножествами C, но A – собственное подмножество, а B – несобственное подмножество C.

1.4. Диаграммы Венна

Диаграмма Венна позволяет получить визуальное представление множеств в виде замкнутых областей на плоскости. Универсальное множество представляется внутренними точками прямоугольника, а другие множества представляются точками кругов (или каких-либо других областей, ограниченных замкнутыми кривыми), лежащих внутри этого прямоугольника. Фактически эти множества являются подмножествами универсального множества и поэтому между ними может существовать взаимосвязь в том смысле, что они имеют общие элементы. Например, для двух множеств A и B возможны три случая взаимосвязи по отношению включения. Если эти множества не имеют общих элементов, т.е множества не пересекаются, тогда диск, представляющий A, будет отделен от диска, представляющего B, как на рис. 1.1*a*. Если $A \subset B$, т.е. все элементы A являются также и элементами B, тогда диск, представляющий A, будет полностью лежать внутри диска для B как на рис. 1.1*b*.(В случае, когда $A \subseteq B$ и $A = B$, диск, представляющий A, будет совпадать с диском для B.)

Третий случай взаимосвязи множеств A и B показан на рис. 1.1*c*, при этом:

– некоторые элементы имеются в A, но их нет в B,
– есть элементы B, которых нет в A,
– есть элементы, которые принадлежат и A и B одновременно,
– есть элементы, которых нет ни в A, ни в B.



A и B не пересекаются　　$A \subset B$

a)　　b)　　c)

Рис. 1.1

Вывод и диаграммы Венна

Аргументация в логике представляет собой полное или частичное обоснование какого-либо утверждения (заключения) с помощью других утверждений (посылок). Под **выводом** понимается утверждение того, что заключение следует из посылок. Вывод называется **правильным** тогда и только тогда, когда из конъюнкции посылок следует заключение, т.е. во всех случаях, когда посылки истинны, заключение тоже является истинным. Поскольку словесные утверждения по существу являются утверждениями о множествах, то поэтому их можно описывать диаграммами Венна.

Следовательно, диаграммы Венна можно использовать для проверки правильности выводов.

<u>Пример 1.3</u>

Показать, что следующий аргумент правильный:

A: Компьютеры, которые установлены на кафедре программирования, имеют LCD-дисплеи.

B: Компьютеры университета, которые используются в учебном процессе, соединены с интернетом.

C: Ни один компьютер кафедры программирования не соединен с интернетом.

D: Все компьютеры, которые используются в учебном процессе, не имеют LCD-дисплеев.

Здесь утверждения A, B и C означают посылки, а утверждение D ниже линии означает заключение. Вывод правильный, если заключение D логически следует из утверждений A, B и C.

Из утверждения A компьютеры с LCD-дисплеями входят в множество компьютеров университета, а из утверждения C следует, что множество компьютеров кафедры программирования и множество компьютеров, которые соединены с интернетом, не пересекаются.

Из утверждения B следует, что компьютеры, которые используются в учебном процессе, образуют подмножество компьютеров, которые соединены с интернетом, как это показано на рис. 1.2.

Вывод является правильным, что видно из диаграммы Венна, поскольку множество компьютеров, используемых в учебном процессе, не пересекается с множеством компьютеров с LCD-дисплеями.

Необходимо заметить, что поскольку речь идет о проверке правильности вывода, истинность заключения при этом не рассматривается. Истинность заключения не является ни необходимым, ни достаточным условием правильности вывода. Если все посылки истинны, то заключение истинно. Но если хотя бы одна из посылок ложна, то заключение может быть как истинным, так и ложным, т.е. правильность вывода зависит от того, что представляют собой его посылки, и, фактически, определяется только его формой.

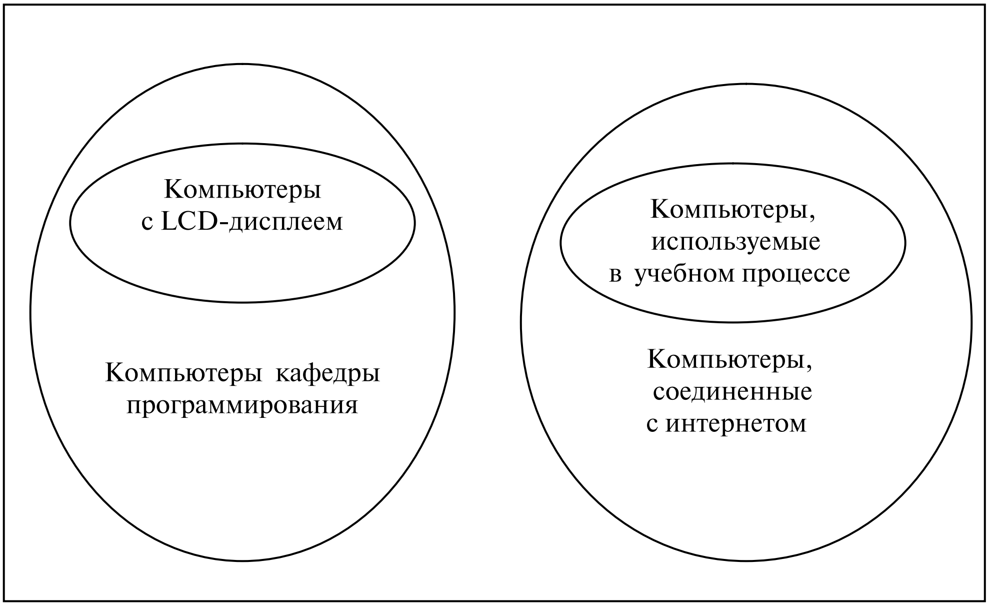


Рис. 1.2

1.5. Операции над множествами

Операции над множествами позволяют получать из исходных множеств новые множества. При этом предполагается, что и сами исходные множества, и вновь полученное множество являются подмножествами одного и того же универсального множества.

Операция объединения множеств

Объединением двух множеств A и B, обозначается $A \cup B$, называется множество всех элементов, которые принадлежат к A или к B, т.е.

$$A \cup B = \{x: x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Здесь союз «или» используется в смысле и / или. На рис. 1.3 объединение $A \cup B$ представлено на диаграммах Венна заштрихованной областью. Если A и B непустые множества и A не совпадает с B, то возможны три различные диаграммы для объединения, рис. 1.3.

Пример 1.4

Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 3, 7, 8\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$.

Этот случай показан на рис. 1.3*a*, множества имеют общие элементы $\{1, 3\}$.

Если $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{7, 8, 9\}$, то здесь множества A и B не имеют общих элементов, как показано на рис. 1.3*b*, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$.

Если $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6,\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, то в этом случае $B \subset A$, т.е. $A \cup B = A$, как на рис. 1.3*c*.

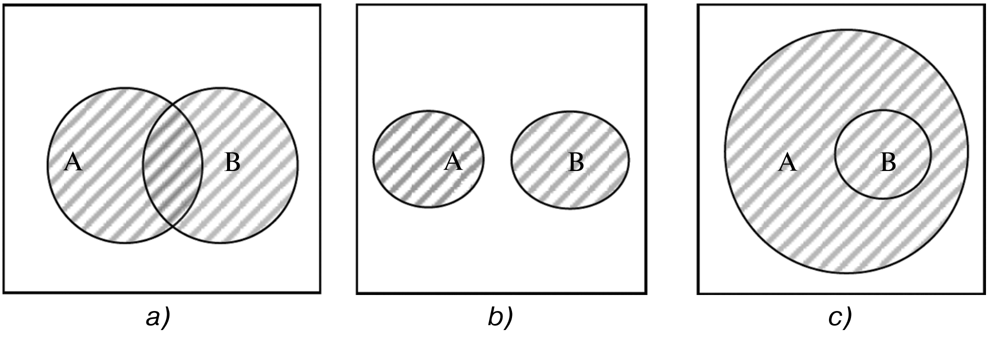


Рис. 1.3

Операция пересечения множеств

Пересечением двух множеств A и B, обозначается $A \cap B$, называется множество элементов, которые принадлежат и A и B, т.е.

$$A \cap B = \{x: x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Пересечение представлено на диаграммах Венна заштрихованной областью, рис. 1.4. Здесь, как и в случае с операцией объединения, также имеется три случая.

Если $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 6, 7, 8\}$, $A \cap B = \{2, 3\}$, рис. 1.4*a*.

Если $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{6, 7, 8, 9\}$, $A \cap B = \varnothing$, т.е. множества A и B не пересекаются, рис. 1.4*b*.

Если $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 5,6\}$, $A \cap B = B = \{4, 5,6\}$, рис. 1.4*c*.

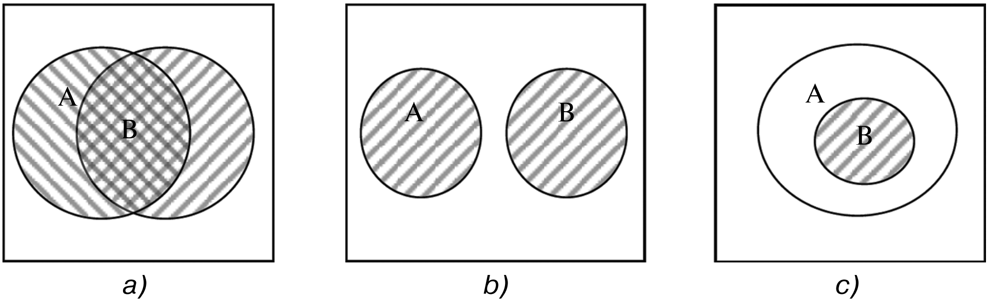


Рис. 1.4

Теорема 1.1. Следующие соотношения эквивалентны:

$$A \subset B,\ A \cap B = A, \text{ и } A \cup B = B.$$

Следует заметить, что вопрос о том, является ли A собственным или несобственным подмножеством B, в общем, не существенен и поэтому можно записать теорему следующим образом:

$$A \subseteq B,\ A \cap B = A \text{ и } A \cup B = B.$$

Операция дополнения множеств

Если все множества рассматривается в некоторое определенное время и являются подмножествами фиксированного универсального множества U, тогда можно определить **универсальное дополнение,** или просто **дополнение** множества A, обозначается A^c, как множество элементов, которые принадлежат U, но не принадлежат A, т.е.

$$A^c = \{x: x \in U, x \notin A\}.$$

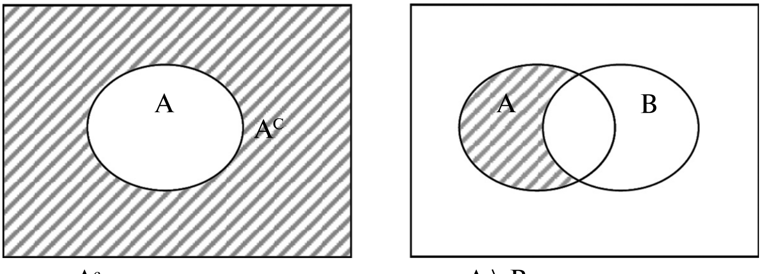
В некоторых текстах дополнение A обозначается как A' или $\bar{A}$. На рис. 1.5*a* дополнение A^c показано заштрихованной областью.

Операция разности множеств

Если подобным же образом рассматривать дополнение множества B до другого множества A, то можно получить операцию **разности множеств** A и B, обозначаемую как A \ B, которая задает множество элементов, принадлежащих A, но не принадлежащих B, т.е.

$$A \setminus B = \{x: x \in A, x \notin B\}.$$

Иногда множество A \ B читается как «A минус B» и обозначается A – B. На рис. 1.5*b* разность A \ B заштрихована.



A^c заштриховано *a)*   A \ B заштриховано *b)*

Рис. 1.5

Нетрудно заметить, что для любых двух множеств A и B выполняется тождество

$$A \setminus B = A \cap B^C.$$

<u>Пример 1.5</u>

Пусть универсальное множество U = **N** ={1, 2, 3, 4,...} является множеством натуральных чисел и пусть

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ B = \{4, 5, 6, 7, 8\},\ C = \{7, 8, 9\}$$

и пусть D={1, 3, 5, 7, 9,...} множество нечетных чисел. Тогда дополнения

$$A^c = \{6, 7, 8, 9, ...\},\ B^c = \{1, 2, 3, 9, 10, 11, ...\},\ C^c = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 11, ...\},$$

и разности множеств

$$A \setminus B = \{1, 2, 3\}, A \setminus C = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B \setminus C = \{4, 5, 6\}, C \setminus B = \{9\},$$

$B \setminus A=\{6, 7, 8\}$, $A \setminus D =\{2, 4\}$, $D^c = \{2, 4, 6, 8, 10,...\}$, множество четных чисел.

Симметрическая разность множеств

Симметрической разностью множеств A и B, обозначается $A \oplus B$, называется множество, которое состоит из элементов либо A, либо B, но не входящих в оба эти множества одновременно. Иначе говоря, это объединение этих множеств, из которого удалено их пересечение

$$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

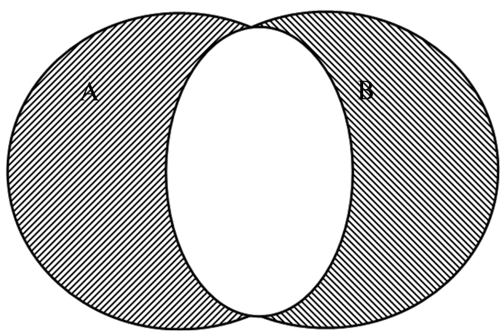
Можно также показать, что

$$A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Например, пусть $A = (1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$. Тогда

$A \setminus B =\{1, 2, 3\}$, $B \setminus A=\{7, 8\}$ и тогда $A \oplus B = \{1, 2, 3, 7, 8\}$.

На рис. 1.6 на диаграмме Венна множество $A \oplus B$ заштриховано.



$A \oplus B$ заштриховано

Рис. 1.6

1.6. Фундаментальное произведение множеств

Операции над множествами позволяют образовывать из исходных множеств новые множества. При этом операция пересечения множеств применяется для различных практических задач, таких как классификация каких-либо объектов, анализ различного рода социологических опросов или исследований, анализ данных, из которых необходимо выбрать данные, характеризуемые заданными свойствами. Рассмотрим следующий пример. Пусть имеется список студентов группы, успешно решивших первую задачу контрольной работы (обозначим множество их фамилий как A). Пусть также имеется список всех тех, кто успешно решил вторую задачу (множество B), и всех тех, кто решил третью (множество C). Если теперь потребуются сведения о тех, кто успешно решил и первую и вторую задачи одновременно, то необходимо будет выбрать тех, кто входит одновременно и в первый, и во второй списки. Для этого надо найти новое множество, являющееся пересечением исходных множеств A и B, т.е. найти множество $A \cap B$. Однако это множество не содержит информации о том, решили или нет данные студенты третью задачу. Ясно, что для этого потребуется найти еще одно множество, являющееся пересечением всех трех множеств, т.е. множество $A \cap B \cap C$.

Предположим теперь, что необходимо составить такой список, в котором присутствуют фамилии студентов, которые решили первую и вторую задачи, но не решили третьей. В этом случае надо найти множество $A \cap B \cap C^c$.

Рассмотрение подобных случаев приводит к понятию фундаментального произведения множеств.

Пусть имеется n различных множеств $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$. **Фундаментальным произведением множеств** называется множество вида

$$A_1^* \cap A_2^* \cap A_3^* \cap \ldots \cap A_n^*,$$

где A_i^* это либо A_i, либо A_i^c. Заметим также, что

(1) Имеется точно 2^n таких фундаментальных произведений.

(2) Любые два таких фундаментальных произведения не пересекаются.

(3) Универсальное множество является объединением всех таких фундаментальных произведений.

Рассмотрим пример из трех множеств A, B и C и дадим геометрическую интерпретацию их фундаментальных произведений, рис. 1.7.

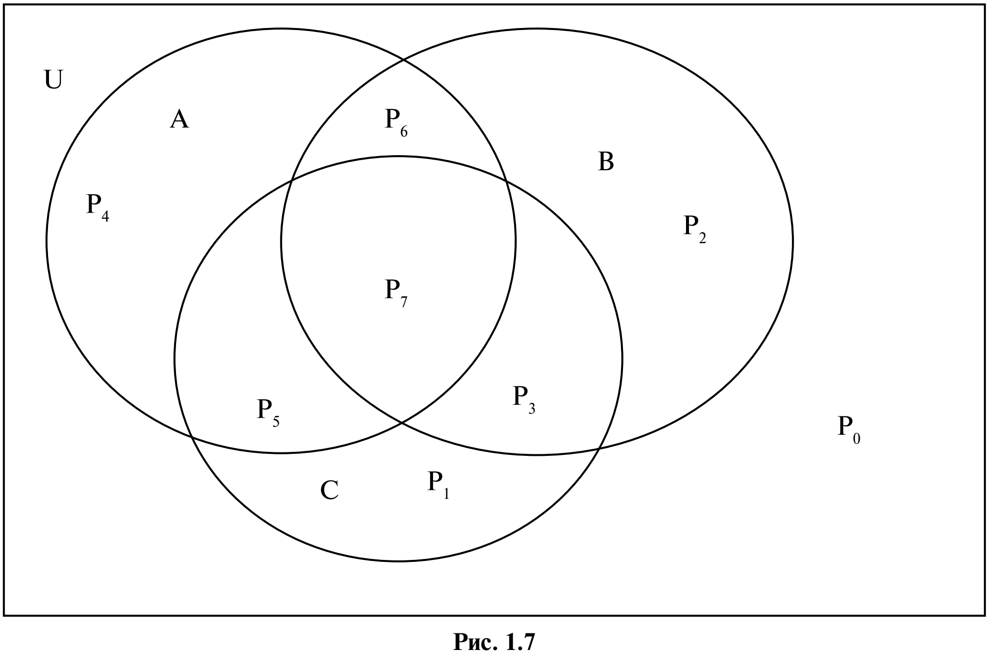


Рис. 1.7

$A = \{1, 2, 3, 6, 7\}$

$B = \{3, 4, 5, 6\}$

$C = \{5, 6, 7, 8\}$

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Имеется ровно восемь фундаментальных произведений из трех множеств:

$P_0 = A^c \cap B^c \cap C^c = \{9\}$ $P_1 = A^c \cap B^c \cap C = \{8\}$ $P_2 = A^c \cap B \cap C^c = \{4\}$
$P_3 = A^c \cap B \cap C = \{5\}$ $P_4 = A \cap B^c \cap C^c = \{1, 2\}$ $P_5 = A \cap B^c \cap C = \{7\}$
$P_6 = A \cap B \cap C^c = \{3\}$ $P_7 = A \cap B \cap C = \{6\}$.

1.7. Классы множеств, степенные множества и разбиения

Для данного множества S можно рассматривать множество всех его подмножеств. При этом придется рассматривать множество, элементами которого будут также множества, т.е. множество множеств. Чтобы избегать путаницы, часто бывает более удобно говорить о **классе множеств** или о **семействе множеств.** Если необходимо рассмотреть множества из данного класса, то можно говорить о **подклассе** или **подсемействе**. Например, рассмотрим множество $S = \{a, b, c, d\}$. Пусть A класс подмножеств S из трех элементов. Тогда

$$A = [\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{d, c, d\}].$$

Элементами класса A являются множества $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$ и $\{b, c, d\}$.

Пусть теперь B класс подмножеств S, который содержит элемент a и два других элемента из S. Тогда

$$B = \{\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}].$$

Элементами B являются множества$\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$ и $\{a, c, d\}]$. Поэтому B является подклассом класса A.

Для данного множества S можно говорить о классе всех подмножеств S. Этот класс называют **степенным множеством** S и обозначают 2^S. Если $n(S)$ – число элементов множества S, то число элементов степенного множества $n(2^S)$ представляет собой степень 2 и равно $n(2^S) = 2^{n(S)}$. Например, если $S = \{a, b, c\}$, то степенное множество

$$2^S = [\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, S].$$

Заметим, что пустое множество $\varnothing$ принадлежит к 2^S, т.к. пустое множество является подмножеством S и само S принадлежит 2^S, поэтому число элементов $n(2^S) = 2^3 = 8$.

Рассмотрим теперь еще одно важное понятие, которое называется разбиением множества S. **Разбиением** множества S называется семейство $\{A_i\}$ непустых подмножеств S, для которых:

1. Каждый элемент x из S принадлежит к одному из подмножеств A_i.
2. Подмножества из $\{A_i\}$ взаимно не пересекаются, т.е., если $A_i \neq A_j$ тогда $A_i \cap A_j = \varnothing$.

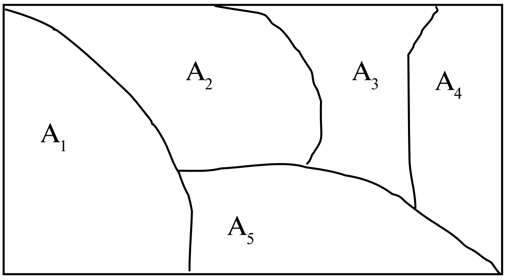


Рис. 1.8

Подмножества в разбиении иногда называют **клетками** или **блоками.** На рис. 1.8 представлена диаграмма Венна, изображающая разбиение прямоугольного множества точек S, на пять клеток A_1, A_2, A_3, A_4, A_5.

Фундаментальные произведения также представляют собой разбиение универсального множества.

Операции объединения и пересечения могут быть распространены на любое количество множеств. Объединение состоит из таких элементов, которые принадлежат по крайней мере к одному из множеств, а пересечение – из таких элементов, которые принадлежат ко всем множествам.

1.8. Алгебра множеств и двойственность

Абстрактная алгебра занимается изучением операций, производимых над некоторыми элементами. К настоящему времени идеи абстрактной алгебры используются не только для математических методов, но и позволяют получать практические результаты. Операции объединения, пересечения и дополнения, производимые над множествами, удовлетворяют определенным законам (или тождествам) и образуют алгебру множеств. Поскольку числовая алгебра появилась раньше, то возникает вопрос, какая из операций (пересечение или объединение) «похожа» на операцию сложения чисел и какая – на операцию умножения. Ответить на этот вопрос едва ли возможно. Для чисел, например, выполняется только дистрибутивность умножения относительно сложения, а в алгебре множеств рассматривают два закона дистрибутивности: пересечения относительно объединения и объединения относительно пересечения.

Важным при выполнении операций является их **приоритет**. Сначала выполняется операция дополнения, затем пересечения и затем объединения.

Множества удовлетворяют следующим законам (или тождествам):

1	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$	**Коммутативность** – означает, что любые два элемента можно менять местами
2	$(A \cap B) \cap C =$ $= A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C =$ $= A \cup (B \cup C)$	**Ассоциативность** – результат операции не зависит от порядка ее выполнения

3	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$	**Идемпотентность** – формулы алгебры множеств не имеют ни степеней, ни коэффициентов
4	$A \cap (B \cap C) =$ $= (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) =$ $= (A \cup B) \cap (A \cup C)$	**Дистрибутивность** – раскрытие скобок и вынесение общего элемента
5	$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$	**Законы поглощения** – большее по числу переменных пересечение (или объединение) поглощается меньшим
6	$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$	$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$	**Законы де Моргана** – дополнение пересечения (объединения) нескольких множеств заменяется на объединение (пересечение) дополнений каждого из этих множеств
7	$(A^C)^C = A$		**Инволюция** – дополнение дополнения множества дает исходное множество
8	$A \cap A^C = \varnothing$ $\varnothing^C = U$	$A \cup A^C = U$ $U^C = \varnothing$	Законы дополнения
9	$A \cap U = A$ $A \cap \varnothing = \varnothing$	$A \cup \varnothing = A$ $A \cup U = U$	Законы тождества

Принцип двойственности алгебры множеств

Нетрудно заметить, что тождества в таблице располагаются парами, например, первое тождество $A \cap B = B \cap A$ имеет парное $A \cup B = B \cup A$, и это выполняется для всех остальных законов алгебры множеств.

Принцип двойственности состоит в том, что если верно какое либо тождество, то тождество, полученное из него путем замены каждой из операций $\cup$, $\cap$, а также U и $\varnothing$ на операции $\cup$, $\cap$, $\varnothing$ и U соответственно, будет также верно. Поэтому у любого тождества есть его «двойник», отличающийся тем, что у него каждая операция заменена на парную ей (объединение – на пересечение, а пересечение – на объединение) и при этом пустое множество заменяется на универсальное, а универсальное на пустое. Принцип двойственности очень важен, поскольку если доказана истинность какого-либо выражения, то истинность двойственного ему можно не доказывать – оно будет истинно вследствие данного принципа. Например, для верного тождества

$$A = (A \cap B^C \cap C^C) \cup (A \cap (B \cup C)),$$

двойственное ему будет также верным тождеством

$$A = (A \cup B^C \cup C^C) \cap (A \cup (B \cap C)).$$

Или для верного тождества

$$A = (A \cap U) \cup (A \cap B \cap C),$$

двойственное ему тождество $A = (A \cup \varnothing) \cup (A \cup B \cup C)$.

1.9. Доказательство тождеств с множествами

Для доказательства равенства тождеств обычно используются четыре метода:

1. Элементный метод.
2. Диаграммы Венна.
3. Табличный метод.
4. Алгебраический метод.

Элементный метод основан на том, что для произвольно выбранного элемента x из множества, заданного в левой части тождества, доказывается, что этот элемент принадлежит и множеству правой части этого тождества. Затем выбирается произвольный элемент из правой части и показывается, что он входит и в левую часть. Вместе это доказывает, что оба множества состоят из одних и тех же элементов.

Докажем далее законы алгебры множеств.

Доказательство **коммутативности** (или переместительного свойства) операций объединения и пересечения самоочевидно, поскольку ни в определении пересечения, ни в определении объединения ничего не говорится о порядке подмножеств.

Ассоциативность (или сочетательный закон) также просто доказывается. Покажем, что $(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C)$. Если $x \in (A \cap B) \cap C$, то $x \in (A \cap B)$ и $x \in C$, из $x \in (A \cap B)$ следует, что $x \in A$ и $x \in B$, т.е. x принадлежит всем трем множествам A, B и C. Следовательно, $x \in (B \cap C)$ и $x \in A \cap (B \cap C)$. Обратное включение показывается аналогично, поскольку множество в правой части тождества также образовано из элементов (и только из таких), которые входят в каждое из множеств A, B и C. Ассоциативность для операции объединения следует из того, что элементы в множестве левой части тождества и элементы в множестве правой части, состоят из таких и только таких элементов, которые принадлежат, по крайней мере, одному из подмножеств A, B и C.

Идемпотентность означает, что если $x \in A \cap A$, то значит x принадлежит пересечению множества A с самим собой, т.е. x принадлежит самому множеству A. Если элемент $x \in A \cup A$, то x принадлежит объединению множества A с самим собой, т.е. и в этом случае он принадлежит только множеству A.

Докажем **дистрибутивность пересечения относительно объединения**.

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Необходимо убедиться, что множества, стоящие в левой и правой частях этого тождества, состоят из одних и тех же элементов. Сначала покажем, что множество левой части включается в множество правой части.

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Пусть $x \in A \cap (B \cup C)$. Тогда по определению операции пересечения $x \in A$ и $x \in (B \cup C)$. Если $x \in B$, то тогда x принадлежит и A и B и поэтому он принадлежит и их пересечению $x \in (A \cap B)$. Но поскольку x принадлежит объединению B и C, то он может принадлежать не только B, но и C и даже обоим этим множествам. Если $x \in C$, тогда он принадлежит и пересечению A и C, т.е. $x \in (A \cap C)$. Но отсюда можно видеть, что в любом из этих случаев x принадлежит к какому-то из множеств – либо

$(A \cap B)$, либо $(A \cap C)$, и тогда, в соответствии с определением операции объединения, x принадлежит и объединению этих множеств $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ и поэтому $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Теперь покажем, что множество из правой части включается в множество левой.

Пусть $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Если $x \in (A \cap B)$, то отсюда $x \in A$ и $x \in B$. Но поскольку $x \in B$, то он принадлежит и объединению множества B с любым другим множеством, в частности и с множеством C, т.е. $x \in (B \cup C)$. В связи с тем, что x входит в множество A и в множество $(B \cup C)$, то он входит и в их пресечение. Если же $x \in (A \cap C)$, то тогда $x \in A$ и $x \in C$. Но поскольку $x \in C$, то он принадлежит и объединению B с любым другим множеством, т.е. $x \cup (B \cup C)$. Поскольку и в этом случае x входит в оба множества и в A и в $(B \cup C)$, то он входит и в их пресечение $x \in A \cap (B \cup C)$, поэтому$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$.

Докажем теперь двойственное тождество, т.е. **дистрибутивность объединения относительно пересечения** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Для этого надо показать, что всякий элемент x множества $A \cup (B \cap C)$ принадлежит и множеству $(A \cup B) \cap (A \cup C)$. Если элемент x принадлежит множеству A, то он принадлежит и множеству $A \cup (B \cap C)$, потому что оно содержит множество A. В то же время, если $x \in A$, то он входит и в пересечение $(A \cup B) \cap (A \cup C)$. Допустим x не является элементом множества A. Тогда он должен принадлежать пересечению $(B \cap C)$, а также каждому из множеств B и C в отдельности. Тогда по определению операции объединения $x \in (A \cup B)$ и $x \in (A \cup C)$. Из этого следует, что x принадлежит и пересечению этих множеств $(A \cup B) \cup (A \cup C)$. И в том и в другом случае x из левого множества входит и в правое. Пусть x принадлежит правому множеству. Тогда, если он принадлежит множеству A, то он принадлежит и множеству $A \cup (B \cap C)$ по определению объединения. Если он не принадлежит A, то тогда он принадлежит и B и C в отдельности, а значит, он принадлежит и пересечению $(B \cup C)$ и поэтому в каждом из этих случаев любой элемент из правого множества входит в левое множество, что и требовалось доказать.

Докажем **законы поглощения**.

$$A \cap (A \cup B) = A,$$

$$A \cup (A \cap B) = A.$$

Доказательство обоих законов очевидно. Пусть, например, $x \in A \cap (A \cup B)$. Тогда $x \in A$ и $x \in (A \cup B)$. Если допустить, что поскольку x принадлежит объединению A и B, то он принадлежит множеству B, но не принадлежит множеству A, но это приводит к противоречию, поскольку по определению пересечения $x \in A$. Другими словами, любой элемент левого множества может быть только из множества A.

Для доказательства **закона де Моргана** $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ покажем сначала, что левое множество включается в правое $(A \cap B)^C \subseteq A^C \cup B^C$. Пусть $x \in (A \cap B)^C$. Тогда $x \notin A \cap B$. Из этого следует, что x не входит в оба множества одновременно, т.е. он не входит либо в A, либо в B. Если он не входит в A, то тогда он входит в A^C, а если он не входит в B, то тогда он входит в B^C. Отсюда следует, что $x \in A^C \cup B^C$ и поэтому $(A \cap B)^C \subseteq A^C \cup B^C$.

Докажем теперь, что всякий элемент x из множества $A^C \cup B^C$ принадлежит и множеству $(A \cap B)^C$. Если $x \in A^C$, то тогда $x \notin A$, и поэтому x не может принадлежать пересечению $x \notin A \cap B$. Если $x \in B^C$, то тогда $x \notin B$, и поэтому x также не может принадлежать пересечению $x \notin A \cap B$. В любом из этих случаев $x \notin A \cap B$ и потому $x \in (A \cap B)^C$.

Докажем двойственный закон де Моргана $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$. Поскольку элемент x принадлежит множеству $(A \cup B)^C$ тогда и только тогда, когда он не принадлежит ни множеству A, ни множеству B, то из этого следует, что он должен входить и в множество A^C, и в множество B^C, т.е. в их пересечение $A^C \cap B^C$. С другой стороны, если x входит в пересечение $A^C \cap B^C$, то он не может входить ни в A, ни в B, потому что в пересечении дополнений множеств ни могут находиться элементы самих этих множеств. Но тогда x входит в дополнение к их объединению, т.е. $x \in (A \cup B)^C$, что и требовалось доказать.

Доказательство **закона инволюции** $(A^C)^C = A$ следует из того факта, что любой элемент из U принадлежит либо A, либо A^C. Поэтому когда берется дополнение к множеству A, то получается множество A^C, а когда берется дополнение к A^C, то снова получается множество A.

Законы дополнения и тождества очевидны и не требуют доказательства.

Второй метод доказательства равенства тождеств состоит в использовании **диаграмм Венна.** Однако здесь иногда приходится рассматривать всевозможные случаи, при которых множества не имеют общих элементов, пересекаются или вкладываются друг в друга.

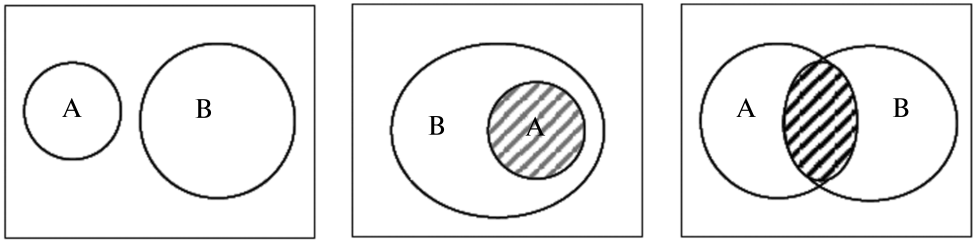
Докажем, например, закон де Моргана $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$. На рис. 1.9 представлены три случая (*a*) – когда A и B не пересекаются, (*b*) – когда A включается в B, и (*c*) – когда в пересечение входят элементы и из A и из B (имеется и случай, когда B включается в A, но он аналогичен случаю (*b*)). На рис 1.9*d*, *e* и *f* показаны их дополнения. Далее на (a_1), (b_1) и (c_1) показаны множества $A^C \cup B^C$ для каждого из этих случаев. Можно видеть, что на каждом рисунке области для множества $(A \cap B)^C$ и множества $A^C \cup B^C$ одинаковые во всех трех случаях и поэтому эти множества равны.

Рассмотрим **табличный метод** доказательства равенства множеств. Докажем ассоциативность пересечения $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. Пусть имеется диаграмма Венна для трех множеств A, B и C из универсального множества U на рис. 1.10. Три овальные области представляют собой множества A, B и C. Прямоугольная область определяет множество U, и она разбита на восемь областей, которые помечены цифрами от 0 до 7. Можно видеть, что область разбиения 7 определяет множество $A \cap B \cap C$, область 6 – множество $A \cap B \cap C^C$ и т.д. Чтобы по диаграмме Венна проверить ассоциативность пересечения, можно использовать следующую идею. Заменим множества A, B и C и их пересечения на соответствующие им множества из областей разбиения на этой диаграмме. Множество A заменяется на {4, 5, 6, 7}, B – на {2, 3, 6, 7}, и C – на {1, 3, 5, 7}, $A \cap B$ – на {6, 7}, $B \cap C$ – на {3, 7}

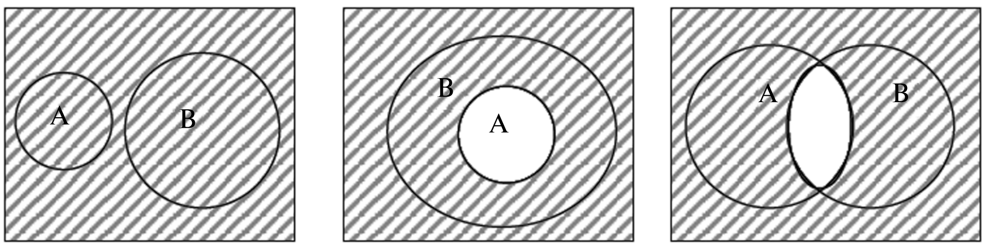
Несмотря на то что множества A, B и C могут быть какими угодно, доказать любое тождество для этих множеств можно, сведя доказательство к проверке этого тождества на уменьшенных множествах разбиения.

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

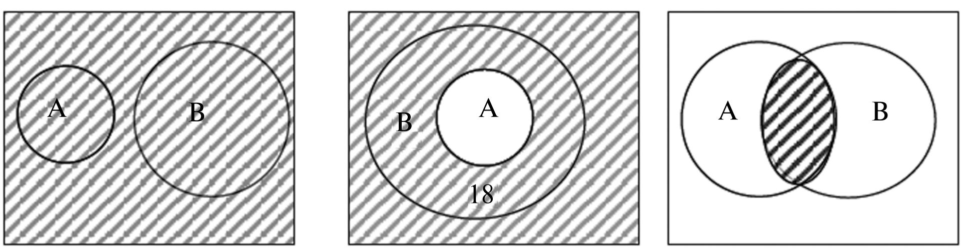
$$\{6, 7\} \cap \{1, 3, 5, 7\} = \{4, 5, 6, 7\} \cap \{3, 7\}.$$



$A \cap B = \varnothing$ *a)* $A \cap B = A$ *b)* $A \cap B$ заштриховано *c)*



$(A \cap B)^C = U$ *d)* $(A \cap B)^C = A^C$ *e)* $(A \cap B)^C$ заштриховано *f)*



$(A^C \cup B^C) = U$ *a_1)* $A^C \cup B^C = A^C$ *b_1)* $A^C \cup B^C$ заштриховано *c_1)*

Рис. 1.9

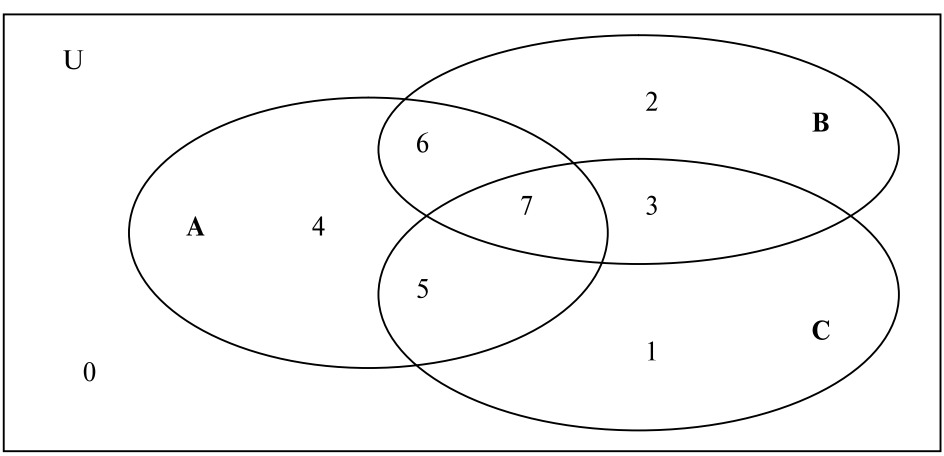


Рис. 1.10

Не трудно видеть, что и левое, и правое множества этого тождества состоят из одного единственного элемента 7, что и доказывает ассоциативность пересечения множеств.

Докажем то же самое, используя **<u>табличный метод</u>**. Для этого построим таблицу, столбцы которой соответствуют различным множествам тождества, а каждая строка соответствует одному из множеств разбиения (строк 8, поскольку разбиение состоит из 8 множеств в соответствии с рис 1.10). Строки содержат ответы на вопрос: входит ли соответствующее данной строке множество разбиения во множество доказываемого тождества или нет. Три первые столбца таблицы дают ответы, входит ли соответствующее множество разбиения во множество A, во множество B и во множество C. Столбец «Левая часть» соответствует левой части доказываемого тождества $(A \cap B) \cap C$, столбец «Правая часть» – правой части $A \cap (B \cap C)$.

A	B	C	Множество разбиения	$A \cap B$	Левая часть	$B \cap C$	Правая часть
нет	нет	нет	0	нет	нет	нет	нет
нет	нет	да	1	нет	нет	нет	нет
нет	да	нет	2	нет	нет	нет	нет
нет	да	да	3	нет	нет	да	нет
да	нет	нет	4	нет	нет	нет	нет
да	нет	да	5	нет	нет	нет	нет
да	да	нет	6	да	нет	нет	нет
да	да	да	7	да	да	да	да

Поскольку ответы для всех строк «Левой части» те же самые, что и для «Правой части», тождество является доказанным. Табличный метод особенно удобен при построении доказательств с использованием компьютера.

<u>Алгебраический метод</u> основывается на идее разбиения доказательства на шаги, при этом переход от одного шага к следующему осуществляется за счет применения какого-либо закона алгебры множеств (например, закона ассоциативности, дистрибутивности, поглощения и т.д.). Доказательство требует хорошего знания базисных законов алгебры множеств, а также определенного опыта их применения. Рассмотрим метод на следующем примере. Пусть требуется доказать, что

$$(A \cap C) \setminus (A \cap B \cap C) = A \cap B^C \cap C.$$

При переходе от одного шага к другому будем указывать (в правой части соответствующей строки) причины, позволяющие делать такие переходы

$(A \cap C) \setminus (A \cap B \cap C) = (A \cap C) \cap (A \cap B \cap C)^C =$ поскольку $A \setminus B = A \cap B^C$

$= (A \cap C) \cap (A^C \cup B^C \cup C^C) =$ по закону Де Моргана

$= (A \cap C) \cap A^C) \cup (A \cap C) \cap B^C) \cup (A \cap C) \cap C^C) =$ по закону дистрибутивности

$= ((A \cap A^C) \cap C) \cup (A \cap B^C \cap C)) \cup (A \cap (C \cap C^C)) =$ по закону ассоциативности

$= (\varnothing \cap C) \cup (A \cap B^C \cap C)) \cup (A \cap \varnothing) =$ поскольку $(A \cap A^C) = \varnothing$

$= \varnothing \cup (A \cap B^C \cap C) \cup \varnothing =$ поскольку $(A \cap \varnothing) = \varnothing$

$= A \cap B^C \cap C.$ поскольку $A \cup \varnothing = A$

В этом примере левое выражение преобразовано в правое. Это преобразование облегчается тем обстоятельством, что известно, какое выражение должно быть получено. В то же время можно и правое выражение привести к левому. Чтобы понять, как это сделать, достаточно просмотреть первое преобразование от конца к началу. Какой путь легче, не всегда бывает сразу ясно, поэтому иногда необходимо попробовать оба способа, чтобы добиться правильного результата.

1.10. Математическая индукция

Имеется следующее существенное свойство множества натуральных чисел $N = \{1, 2, 3, ...\}$, которое используется при построении различных доказательств.

Принцип математической индукции

Пусть P – некоторое утверждение, определенное на положительных целых N, т.е. утверждение P(n) либо истинно, либо ложно для каждого n из N. Если для P выполняются два следующих свойства:

1. P(1) истинно.
2. P(n + 1) истинно, если истинно P(n).

Тогда P истинно для каждого положительного целого.

Обычно этот принцип используется как аксиома для доказательства других результатов. Используем его для доказательства следующего результата:

Путь P будет утверждением, что сумма первых n натуральных чисел, возведенных в куб, равна $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$, т.е.

$$P(n):\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Легко видеть, что P(n) истинно при n = 1, т.е. $P(1):\ 1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{2^2}{4} = 1.$

Допустим теперь, что P(n) истинно и докажем, что P(n + 1) также будет истинно. Для этого прибавим к обеим частям выражения для P(n) следующее слагаемое $(n + 1)^3$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3.$$

Преобразуем далее правую часть

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4} =$$

$$= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.\ \text{Отсюда}$$

$$P(n+1):\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

Таким образом, P(n + 1) истинно, когда истинно P(n). Теперь по принципу математической индукции утверждение P истинно для всех n. Иногда принцип математической индукции записывают в более удобном для использования виде

1. P(1) истинно.
2. P(n + 1) истинно, если истинно P k) для всех $1 \leq k < n$.

Тогда P истинно для каждого положительного целого.

1.11. Представление множеств формулами

При построении дискретной модели часто необходимо разбивать множества на некоторые его части, чтобы исследовать те или иные свойства исходной модели. Подобные задачи возникают как при разработке телекоммуникационных технологий, так и в различных бизнес-приложениях. Рассмотрим такой пример. Пусть элементами множества являются зоны торгового зала большого супермаркета и необходимо разбить это множество на подмножества так, чтобы каждое подмножество представляло собой совокупность зон, просматриваемых одной видеокамерой, при условии, что видеокамер должно быть как можно меньше. Если зоны выбраны так, что они покрывают все помещение зала, то при этом выбранные подмножества не должны накладываться друг на друга, поскольку это приведет к неоптимальному использованию видеокамер. Кроме того, возможно, что требуется просматривать не всю площадь зала, а только некоторые ее части. Во всех таких случаях приходится рассматривать некоторое множество, представляющее собой определенную совокупность подмножеств заданного множества.

Для универсального множества U всегда можно построить его разбиение, из множеств которого легко получать требуемые совокупности. Наиболее конструктивным разбиением для этих целей является система множеств, порождаемая фундаментальными произведениями. Из 1.7 следует, что для любых n множеств можно построить разбиение S универсального множества U на 2^n подмножеств, называемых фундаментальными произведениям.

Определение

Любое множество или совокупность множеств разбиения S можно представит как объединение пересечений, каждое из которых является фундаментальным произведением. Обратно, каждое непустое выражение из объединения фундаментальных произведений задает некоторое множество или совокупность множеств разбиения и такое задание однозначно определяет это множество.

Если рассматривать операцию объединения как сложение, а операцию пересечения как умножение, то подобные выражения часто называют многочленами. Эти многочлены можно преобразовывать, используя алгебраические методы. Многочлен, образованный из фундаментальных произведений, единственным образом задает любое подмножество разбиения. Будем называть такой многочлен **каноническим.** Осуществляя эквивалентные преобразования выражения для многочлена в каноническом виде, при котором сохраняется множество, которое он определяет, можно получать более простые выражения для аналитического задания данного множества. Если многочлен для заданного множества не допускает дальнейшего упрощения, то такой многочлен называется **минимальным**.

Рассмотрим пример использования многочленов.

Пример 1.6

Предположим, что в некотором университете проведена выборочная проверка посещаемости занятий девяти студентов по трем предметам: математике, информатике и английскому языку. Обозначим через A множество тех студентов, которые имеют, по крайней мере, один пропуск по математике. Тогда A^C будет представлять собой множество студентов, которые не имеют ни одного пропуска по математике. Пусть B – множество студентов, которые имеют, по крайней мере, один пропуск по информатике, и C – по крайней мере, один пропуск по английскому языку.

В деканат поступили следующие сведения:

– список студентов, которые не имеют пропусков занятий ни по одному из предметов, $A^C \cap B^C \cap C^C = \varnothing$;
– список студентов, которые не имеют пропусков ни по математике, ни по информатике, но имеют по английскому языку (В списке вместо фамилий будем для простоты указывать номера студентов), $A^C \cap B^C \cap C = \{9\}$;
– список студентов, которые не имеют пропусков по математике и английскому языку, но имеют – по информатике, $A^C \cap B \cap C^C = \{8\}$;
– список студентов, которые не имеют пропусков по математике, но имеют по информатике и английскому языку, $A^C \cap B \cap C = \varnothing$;
– список студентов, которые имеют пропуски по математике, но не имеют по информатике и английскому языку, $(A \cap B^C \cap C^C) = \{1, 6\}$;
– список студентов, которые имеют пропуски по математике и английскому языку, но не имеют по информатике, $A \cap B^C \cap C = \{2, 7\}$;
– список студентов, которые не имеют пропусков ни по математике, ни по информатике, но имеют по английскому языку, $A \cap B \cap C^C = \{3\}$;
– список студентов, которые имеют пропуски по всем трем предметам, $A \cap B \cap C = \{4, 5\}$.

Получив эти данные, деканат хотел бы составить списки тех студентов, которые:

1. Имеют пропуски по математике, но не имеют по информатике.
2. Имеют пропуски по математике и информатике.
3. Имеют, по крайней мере, один пропуск по математике.

Для того чтобы ответить на вопрос первого пункта, т.е найти множество тех студентов, которые имеют пропуски по математике, но не имеют по информатике, надо составить многочлен из тех фундаментальных произведений, которые включают в себя множество $A \cap B^C$. Таких фундаментальных произведений два. Их объединение и дает искомый многочлен $(A \cap B^C \cap C^C) \cup (A \cap B^C \cap C) = \{1, 6\} \cup \{2, 7\} = \{1, 2, 6, 7\}$. Это легко доказать, если выполнить упрощение данной формулы:

$(A \cap B^C \cap C^C) \cup (A \cap B^C \cap C) = (A \cap B^C) \cap (C \cup C^C) =$	по закону дистрибутивности
$= (A \cap B^C) \cap U =$	поскольку $(C \cup C^C) = U$
$= A \cap B^C$	по закону тождества $A \cap U = A$.

Аналогичное рассуждение можно применить и для второго пункта

$(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C^C) = \{4, 5\} \cup \{3\} = \{3, 4, 5\}$, т.к.

$(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C^C) = (A \cap B) \cap (C \cup C^C) =$	по закону дистрибутивности
$= (A \cap B) \cap U =$	поскольку $(C \cup C^C) = U$
$= A \cap B$	по закону тождества $A \cap U = A$.

Для ответа на третий пункт, т.е. для определения множества А, надо составить многочлен из четырех фундаментальных произведений, содержащих множество А. Этот многочлен имеет вид

$$(A \cap B^C \cap C^C) \cup (A \cap B^C \cap C) \cup (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C^C) =$$
$$= \{1, 6\} \cup \{2, 7\} \cup \{3\} \cup \{4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

Многочлен можно упростить

$(A \cap B^C) \cap (C \cup C^C) \cup (A \cap B) \cap (C \cap C^C) =$	по закону дистрибутивности
$(A \cap B^C) \cap U \cup (A \cap B) \cap U =$	поскольку $(C \cup C^C) = U$
$(A \cap B^C) \cup (A \cap B) =$	по закону тождества
$A \cap (B^C \cup B) =$	по закону дистрибутивности
$A \cap U = A$	по закону тождества.

Решение задачи можно получить и при помощи диаграммы Венна, показанной на рис. 1.11.

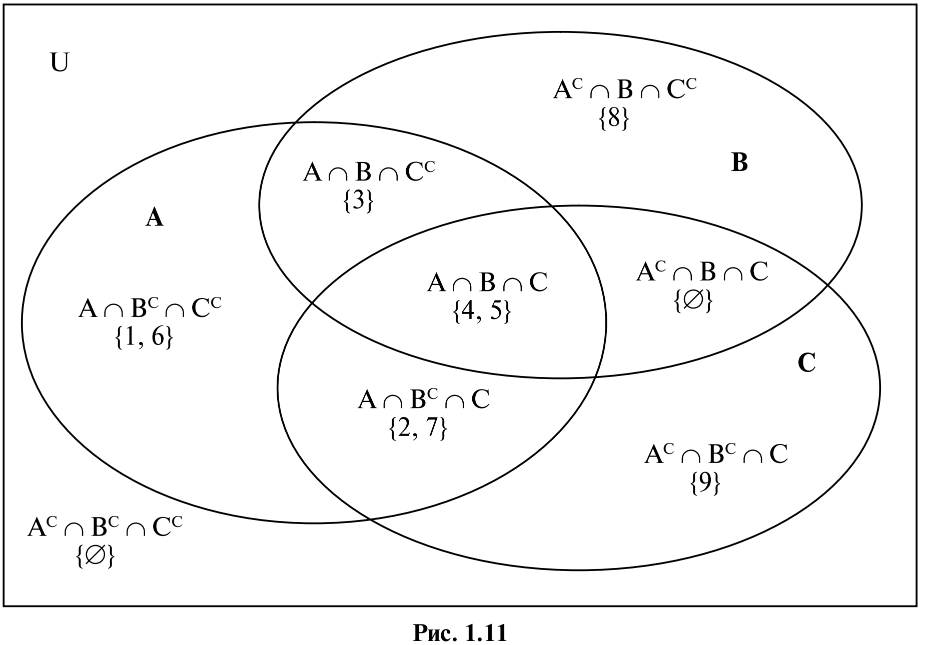


Рис. 1.11

Поскольку мы имеем все 8 комбинаций из трех исходных множеств и их дополнений, т.е. имеем все 8 фундаментальных произведений для трех множеств, то к решению данной задачи можно подойти и иначе. Допустим, нам надо выполнить первый пункт задачи, т.е. найти множество тех студентов, которые имеют пропуски по математике, но не имеют их по информатике. Фактически нам надо найти пересечение двух множеств: множества A (имеющих пропуски по математике) и множества B^C (не имеющих пропусков по информатике), т.е. множество $A \cap B^C$. Для того чтобы найти элементы этого множества, нам нужно выразить множества $A \cap B^C$ через фундаментальные произведения. Сделать это можно с помощью искусственного приема, который позволяет вводить в любое пересечение множеств те множества, которые в нем отсутствуют, приводя его, тем самым, к объединению фундаментальных произведений.

$A \cap B^C = (A \cap B^C) \cap (C \cup C^C) =$ поскольку $C \cup C^C = U$, а $(A \cap B^C) \cap U = (A \cap B^C)$

$= (A \cap B^C \cap C) \cup (A \cap B^C \cap C^C)$ по закону дистрибутивности.

Это решение по сути дела представляет собой действия, произведенные при решении задачи в первом случае, но выполненные в обратном порядке. Этот же способ позволяет выразить любое множество через фундаментальные произведения.

1.12. Многочлены алгебры множеств

Множества с операциями пересечения, объединения и дополнения, удовлетворяющие абстрактным законам, введенным в 1.8, образуют алгебраическую систему, называемую **алгеброй множеств**. Эта алгебра является булевой алгеброй и поэтому часто использует идеи и терминологию булевой алгебры, однако следует отметить, что эта терминология не вполне стандартизирована, что иногда приводит к различным названиям одних и тех же понятий. Рассмотрим некоторые понятия более подробно.

Пусть имеется n переменных, каждая из которых определяет некоторое множество. **Выражением** алгебры множеств E (или формулой) называется выражение, составленное из этих переменных, соединенных при помощи операций объединения, пересечения и дополнения, например

$$E_1 = A \cap (B^C \cap C)^C \cup (A \cap B^C \cap C^C)^C,$$
$$E_2 = A \cap (B^C \cap C) \cup (A \cap B^C \cap C^C),$$
$$E_3 = (A \cap B^C \cap C) \cup (A \cap B^C \cap C^C),$$
$$E_4 = (A^C \cup B^C) \cap (A^C \cup B^C \cup C) \cap (B^C \cup C),$$
$$E_5 = (A^C \cup B \cup C) \cap (A \cup B^C \cup C) \cap (A^C \cup B^C \cup C)$$

являются выражениями из трех переменных A, B и C.

Литералом называется переменная или дополнение переменной, например A, A^C, B^C и т.д. **Произведением** называется литерал или пересечение двух или более литералов, таких, что ни одна пара из них не содержит одной и той же переменной. Например, $B^C \cap C$, $A \cap B^C \cap C^C$, A, C^C – являются произведениями, а выражения

$A \cap B^C \cap A^C$ и $A \cap B^C \cap B^C$ – нет. Заметим, что любое пересечение литералов всегда приводится либо к $\varnothing$, либо к произведению. Так, например, $A \cap B^C \cap A^C = \varnothing$, потому что $A \cap A^C = \varnothing$ (по закону дополнения), а пересечение $A \cap B^C \cap B^C = A \cap B^C$, потому что $B^C \cap B^C = B^C$ (по закону идемпотентности).

Если при n переменных произведение состоит из n литералов, то его называют **фундаментальным произведением** (некоторые авторы называют любое произведение фундаментальным произведением).

Выражение, представляющее собой объединение различных произведений, если в нем нет ни одного произведения, которое включается в другое произведение, называют **суммой произведений**, или **нормальной формой объединения пересечений**, или многочленом **в нормальной форме**. Из предыдущего примера E_1 является просто выражением, E_2 и E_3 – являются выражениями в нормальной форме объединения пересечений.

Если выражение состоит из объединения фундаментальных произведений, то такое выражение называют **полной нормальной формой объединения пересечений** или **многочленом в канонической форме.** Многочлен E_3, кроме того, что он имеет нормальную форму объединения пересечений, является еще и многочленом, имеющим полную нормальную форму объединения пересечений.

Аналогично, если при n переменных объединение состоит из n литералов, то его называют **фундаментальным объединением** и, если заменить операции объединения на операции пересечения, а операции пересечения на операции объединения, то можно получить **нормальную форму пересечения объединений** и **полную нормальную форму пересечения объединений**. Выражение E_4 имеет нормальную форму пересечения объединений, а E_5 – полную нормальную форму пересечения объединений.

Любое выражение может быть преобразовано к эквивалентному выражению, имеющему нормальную форму. Одно из отличий нормальной формы в том, что в таком выражении операция дополнения применяется только к переменным. Чтобы избавиться от дополнений, применяемых к выражениям, надо применять закон Де Моргана.

<u>**Алгоритм 1.1** для преобразования выражения к нормальной форме объединения пересечений.</u>

Пусть имеется исходное выражение алгебры множеств E.

Шаг 1. Используя законы Де Моргана и инволюции, приведем каждую скобку, к которой применяется операция дополнения, к виду, в котором операция дополнения применяется только к переменным.

Шаг 2. Используя закон дистрибутивности объединения относительно пересечения, раскроем скобки, содержащие объединения литералов, относительно операций пересечения.

Шаг 3. Используя законы ассоциативности, дополнения и идемпотентности, преобразуем каждое пересечение литералов либо в $\varnothing$, либо в произведение.

Шаг 4. Используя законы поглощения и тождества, упростим выражение E, и если оно состоит из объединения пересечений, то нормальная форма получена, если же нет, то переходим к шагу 2.

Пример 1.7

Применим данный алгоритм для преобразования к нормальной форме следующего выражения

$$E = ((A \cap B^C) \cup (B \cap C^C)^C) \cap (((B \cap C) \cup (A^C \cap C))^C \cup (A \cap B)).$$

Шаг 1. Используя законы Де Моргана и инволюции, получим

$$E = ((A \cap B^C) \cup B^C \cup C) \cap ((B^C \cup C^C) \cap (A \cup C^C) \cup (A \cap B)).$$

Шаг 2. Используя закон дистрибутивности, раскроем скобки в правой части выражения

$$E = ((A \cap B^C) \cup B^C \cup C) \cap ((A \cap B^C) \cup (B^C \cap C^C) \cup (A \cap C^C) \cup (C^C \cap C^C) \cup (A \cap B)).$$

Шаг 3. Преобразуем пересечение литералов в произведение

$$E = ((A \cap B^C) \cup B^C \cup C) \cap ((A \cap B^C) \cup (B^C \cap C^C) \cup (A \cap C^C) \cup C^C \cup (A \cap B)).$$

Шаг 4. Поскольку B^C включается в $A \cap B^C$, то $A \cap B^C$ поглощается, также C^C включается в $B^C \cap C^C$ и $A \cap C^C$, поэтому оба эти пересечения поглощаются и выражение E принимает следующий вид

$$E = (B^C \cup C) \cap ((A \cap B^C) \cup C^C \cup (A \cap B)).$$

Здесь снова надо раскрывать скобки, поэтому переходим к Шагу 2.

Шаг 2. Раскроем скобки и получим

$$E = (A \cap B^C \cap B^C) \cup (B^C \cap C^C) \cup (A \cap B \cap B^C) \cup (A \cap B^C \cap C) \cup$$
$$\cup (C \cap C^C) \cup (A \cap B \cap C).$$

Шаг 3. Преобразуем пересечение литералов в произведение

$$E = (A \cap B^C) \cup (B^C \cap C^C) \cup \varnothing \cup (A \cap B^C \cap C) \cup \varnothing \cup (A \cap B \cap C).$$

Шаг 4. Пересечение $A \cap B^C$ включается в $A \cap B^C \cap C$, поэтому последнее поглощается и нормальная форма для E имеет вид

$$E = (A \cap B^C) \cup (B^C \cap C^C) \cup (A \cap B \cap C).$$

1.13. Полные нормальные формы

Следует отметить, что терминология этого раздела не стандартизирована, так, по аналогии с булевой алгеброй полные нормальные формы иногда называют совершенными нормальными формами. Рассмотрим выражение $E = E(x_1, x_2, ...x_n)$, состоящее из объединения произведений, т.е. представленное в нормальной форме. Если каждое произведение состоит точно из n литералов, то такое выражение называется **полной** нормальной формой объединения пересечений.

Теорема 1.2. Любое выражение алгебры множеств может быть преобразовано к эквивалентному ему выражению в полной нормальной форме, и такое представление является единственным.

В предыдущем разделе было показано, как преобразовать любое выражение алгебры множеств к эквивалентному выражению в нормальной форме. Далее рассмотрим алгоритм, позволяющий трансформировать это выражение в эквивалентное ему выражение в полной нормальной форме. Идея этого алгоритма состоит в том, что если какое-то произведение P в выражении E не содержит i-й переменной, то ее можно вести в E, образуя произведение $P \cap (x_i \cup x_i^c)$ при $i \leq n$.

Алгоритм 1.2 для преобразования выражения к полной нормальной форме объединения пересечений.

Шаг 1. Пусть имеется выражение $E = E(x_1, x_2, \dots x_n)$, представленное в нормальной форме. Найдем произведение P в выражении E, которое не содержит i-й переменной, и образуем произведение $P \cap (x_i \cup x_i^c)$. Это не нарушает эквивалентности выражения, поскольку $(x_i \cup x_i^c) = U$, а $P \cap U = P$. Удалим повторяющиеся произведения (это возможно, поскольку $P \cup P = P$).

Шаг 2. Повторяем Шаг 1 до тех пор, пока каждое произведение в E не станет фундаментальным произведением, т.е. каждое произведение не будет включать в себя все n переменных.

Пример 1.8

Применим данный алгоритм для выражения E в нормальной форме, полученного в Примере 1.7, чтобы преобразовать его к полной нормальной форме.

$$E = (A \cap B^C) \cup (B^C \cap C^C) \cup (A \cap B \cap C).$$

Шаг 1. Находим произведение $A \cap B^C$, которое не содержит переменной C, и образуем произведение $(A \cap B^C) \cap (C \cup C^C)$, получим

$$E = (A \cap B^C) \cap (C \cup C^C) \cup (B^C \cap C^C) \cup (A \cap B \cap C) =$$
$$= (A \cap B^C \cap C) \cup (A \cap B^C \cap C^C) \cup (B^C \cap C^C) \cup (A \cap B \cap C).$$

Шаг 2. Поскольку в E имеется произведение $B^C \cap C^C$, которое не содержит переменной A, то снова переходим к Шагу 1 и образуем произведение $(B^C \cap C^C) \cap (A \cup A^C)$,

$$E = (A \cap B^C \cap C) \cup (A \cap B^C \cap C^C) \cup (B^C \cap C^C) \cap (A \cup A^C) \cup (A \cap B \cap C).$$

После раскрытия скобок в E образуется два одинаковых фундаментальных произведения $A \cap B^C \cap C^C$. Одно из них необходимо удалить. Теперь E представлено в полной нормальной форме:

$$E = (A \cap B^C \cap C) \cup (A \cap B^C \cap C^C) \cup (A^C \cap B^C \cap C^C) \cup (A \cap B \cap C).$$

Таким образом, если имеется выражение, представленное в нормальной форме, то данный алгоритм позволяет алгебраическими преобразованиями привести его к полной нормальной форме. Однако этот способ не единственный. Для этой же цели можно также использовать и диаграммы Венна.

Рассмотрим пример. Пусть имеется разбиение множества U, показанное на рис. 1.10. Выделим множество, которое задается формулой (нормальной формой объединения пересечений) $A \cup (B^C \cap C)$. Она задает объединение двух множеств: $A = \{4, 5, 6, 7\}$ и множества, представляющего собой пересечение множеств B^C и C, т.е. множества $B^C \cap C = \{1, 5\}$. Поэтому множество $A \cup (B^C \cap C) = \{1, 4, 5, 6, 7\}$. На рис. 1.12 это множество заштриховано. Из диаграммы видно, что множество $A \cup (B^C \cap C)$ задается объединением пяти фундаментальных произведений: множеству {4} соответствует фундаментальное произведение $A \cap B^C \cap C^C$, множеству {6} – $A \cap B \cap C^C$, множеству {7} – $A \cap B \cap C$, множеству {5} – $A \cap B^C \cap C$, и множеству {1} – $A^C \cap B^C \cap C$. Объединение этих фундаментальных произведений и дает полную нормальную форму

$$(A \cap B^C \cap C^C) \cup (A \cap B \cap C^C) \cup (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B^C \cap C) \cup (A^C \cap B^C \cap C).$$

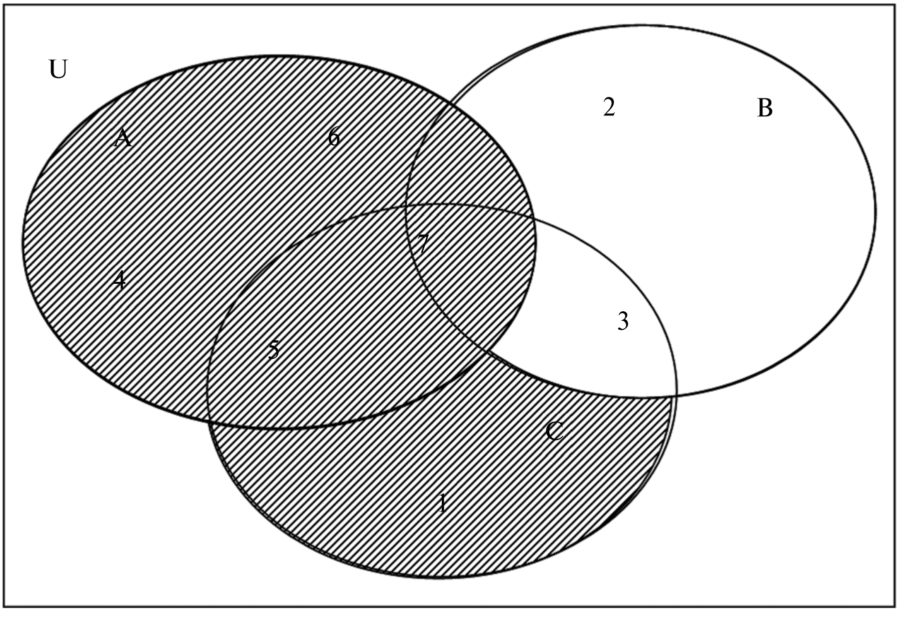


Рис. 1.12

Заметим, что для любого множества существует не только единственная полная нормальная форма объединения пересечений, но и единственная полная нормальная форма пресечения объединений. Эту форму также можно найти двумя способами. Так, для множества из предыдущего примера $A \cup (B^C \cap C)$ раскроем скобки и получим выражение в нормальной форме пересечения объединений $(A \cup B^C) \cap (A \cup C)$. В первой скобке нет переменной C, а во второй – переменной B. Поскольку выражение $(C \cap C^C) = \varnothing$, то следующее выражение эквивалентно исходному

$$\begin{aligned} &((A \cup B^C) \cup (C \cap C^C)) \cap ((A \cup C) \cup (B \cap B^C)) = \\ &= (A \cup B^C \cup C) \cap (A \cup B^C \cup C^C) \cap (A \cup B \cup C) \cap (A \cup B^C \cup C) \\ &= (A \cup B^C \cup C) \cap (A \cup B^C \cup C^C) \cap (A \cup B \cup C)\ . \end{aligned}$$

Последнее выражение и будет полной нормальной формой пересечения объединений для исходной формулы.

Найти данное выражение можно также и при помощи диаграммы Венна. Поскольку в исходное множество {1, 4, 5, 6, 7} не вошли элементы {0, 2, 3}, то необходимо образовать пересечение таких объединений, которые не содержат эти три множества. Объединение $A \cup B \cup C$ не содержит элемента {0}, объединение $A \cup B^C \cup C$ не содержит элемента {2}, и объединение $A \cup B^C \cup C^C$ не содержит элемента {3}. Отсюда, образовав из них пересечение, можно получить полную нормальную форму пересечения объединений

$$(A \cup B \cup C) \cap (A \cup B^C \cup C) \cap (A \cup B^C \cup C^C).$$

Более подробно эти формы будут рассмотрены в упражнениях.

1.14. Определение минимальных форм

Множество можно задавать различными формулами. Хотя эти формулы выглядят по-разному, но все они эквивалентны в том смысле, что они определяют одни и те же элементы данного множества. Например, пусть имеется два выражения в нормальной форме

$$E_1 = (B \cap C) \cup (A^C \cap C^C),$$
$$E_2 = (B \cap C) \cup (A^C \cap B) \cup (A^C \cap B^C \cap C^C).$$

Эти формулы эквивалентны, что нетрудно проверить, если преобразовать каждую из них к полной нормальной форме, которая и для E_1, и для E_2 одна и та же:

$$(A \cap B \cap C) \cup (A^C \cap B \cap C) \cup (A^C \cap B \cap C^C) \cup (A^C \cap B^C \cap C^C).$$

Для того чтобы определить, какая из эквивалентных формул «проще», введем следующие обозначения. Пусть E – выражение в нормальной форме, и пусть L(E) – количество литералов в этом выражении (считаются все вхождения), и F(E) – количество произведений, из которых образовано E. Так, для E_1 значение $L(E_1) = 2 + 2 = 4$ и $F(E_1) = 2$, а $L(E_2) = 2 + 2 + 3 = 7$ и $F(E_2) = 3$.

Пусть E_1 и E_2 эквивалентные выражения в нормальной форме. Тогда E_1 **проще** E_2, если

$$L(E_1) < L(E_2) \text{ и } F(E_1) \leq L(E_2) \text{ или}$$
$$L(E_1) \leq L(E_2) \text{ и } F(E_1) < L(E_2).$$

Выражение E, представленное в нормальной форме, называется **минимальным,** если не существует никакого другого эквивалентного ему выражения, которое проще, чем E. Следует заметить, что может существовать более одного эквивалентного минимального выражения.

Произведение P называется **простым импликантом**, для выражения E, если

$$P \cup E = E$$

и нет никакого другого произведения, содержащегося в P, которое обладает этим свойством. Например, пусть

$$E = (A \cap C) \cup (B^C \cap C) \cup (A^C \cap B \cap C).$$

Можно показать, что выражение

$$(A^C \cap B) \cup E = E, \text{ но } A^C \cup E \neq E \text{ и } B \cup E \neq E.$$

Поэтому $A^C \cap B$ является простым импликантом E.

Теорема 1.3. Любое выражение E, представленное в минимальной форме, является объединением простых импликантов E.

Методы определения минимальных форм обычно базируются на алгоритмах, которые позволяют находить простых импликантов и выбирать из них те, которые и дают выражения в минимальной форме. Для определения простых импликантов имеется метод **соседства** (его также называют методом консенсуса), который состоит в следующем. Пусть P_i и P_j два произведения такие, что одно из них содержит литерал X, а другое X^C (т.е. какая-то переменная в одно произведение входит без дополнения, а в другое – с дополнением, и других переменных с этим свойством в данных произведениях нет). Тогда соседством P_i и P_j будет называться произведение (без повторений), составленное из литералов P_i и P_j, из которых удалены X и X^C, а сами P_i и P_j называются соседними. Соседство не определено, если $P_i = X$ и $P_j = X^C$.

Из определения соседства следует следующее **утверждение**:

Если S является соседством P_i и P_j, то тогда

$$P_i \cup P_j \cup S = P_i \cup P_j.$$

<u>Пример 1.9.</u> Найти соседство S для P_1 и P_2.

1. $P_1 = (A \cap B)$ и $P_2 = (B^C \cap C^C)$, удалим B и B^C и образуем пересечение P_1 и P_2 получим $S = A \cap C^C$.
2. $P_1 = A^C \cap B^C \cap C$ и $P_2 = B^C \cap C^C$, удалим C и C^C, получим без повторений $S = A^C \cap B^C$.
3. $P_1 = B$ и $P_2 = B^C \cap C^C$, удаление B и B^C дает $S = C^C$.
4. $P_1 = A^C \cap B^C \cap C$ и $P_2 = B \cap C \cap D$, удаление B^C и B дает $S = A^C \cap C \cap D$.
5. $P_1 = A^C \cap B^C \cap C$ и $P_2 = B \cap C^C$, здесь две переменные B и C имеют дополнения и поэтому P_1 и P_2 не имеют соседства.
6. $P_1 = A^C \cap B^C \cap C$ и $P_2 = B^C \cap C$ здесь нет переменой без дополнения и с дополнением и поэтому P_1 и P_2 также не имеют соседства.

Метод соседства позволяет находить все простые импликанты для любой формулы в нормальной форме.

<u>**Алгоритм 1.3** для нахождения простых импликантов **(метод соседства)**</u>.

Пусть имеется исходное выражение алгебры множеств E, представленное в нормальной форме.

Шаг 1. Используя закон поглощения, удалим произведение P_i, которое включает в себя произведение P_j.

Шаг 2. Если имеются два соседних произведения P_i и P_j, то добавим к E соседство S, которое они определяют.

Шаг 3. Повторяем Шаг 1 и Шаг 2, пока они могут быть применены.

Теорема 1.4. Когда метод соседства прекращает работу, тогда выражение E представляет собой объединение простых импликантов.

Пример 1.10

Найти все простые импликанты для выражения E

$E = (A \cap B^C \cap C^C) \cup (A^C \cap B^C \cap C^C) \cup (A^C \cap C) \cup (A^C \cap B^C \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$
(удалено $A^C \cap B^C \cap C$ поглощаемое $A^C \cap C$)

$= (A \cap B^C \cap C^C) \cup (A^C \cap B^C \cap C^C) \cup (A^C \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$
(для соседних произведений $(A \cap B^C \cap C^C)$ и $(A^C \cap B^C \cap C^C)$ добавлено $(B^C \cap C^C)$)

$= (B^C \cap C^C) \cup (A \cap B^C \cap C^C) \cup (A^C \cap B^C \cap C^C) \cup (A^C \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$
(удалены $(A \cap B^C \cap C^C)$ и $(A^C \cap B^C \cap C^C)$ поглощаемые $(B^C \cap C^C)$)

$= (B^C \cap C^C) \cup (A^C \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$
(для соседних произведений $(B^C \cap C^C)$ и $(A^C \cap C)$ добавлено $(A^C \cap B^C)$)

$= (A^C \cap B^C) \cup (B^C \cap C^C) \cup (A^C \cap C)$
(для соседних произведений $(A^C \cap C)$ и $(A \cap B \cap C)$ добавлено $(B \cap C)$)

$= (A^C \cap B^C) \cup (B^C \cap C^C) \cup (A^C \cap C) \cup (A \cap B \cap C) \cup (B \cap C)$
(удалено $(A \cap B \cap C)$ поглощаемое $(B \cap C)$)

$= (A^C \cap B^C) \cup (B^C \cap C^C) \cup (A^C \cap C) \cup (B \cap C)$.

Поскольку ни одного нового импликанта образовать нельзя, алгоритм прекращает свою работу и E представлено в виде объединения четырех простых импликантов

$$= (A^C \cap B^C),\ (B^C \cap C^C),\ (A^C \cap C) \text{ и } (B \cap C).$$

Хотя метод соседства и дает все простые импликанты, он не отвечает на вопрос – как для данного выражения выглядит эквивалентная ему минимальная форма, и тем более, сколько для него имеется эквивалентных минимальных форм. Чтобы найти минимальную форму, применим следующий алгоритм

Алгоритм 1.4 для нахождения минимальной формы в выражении, представляющем собой объединение простых импликантов.

Пусть имеется исходное выражение алгебры множеств E, представленное в нормальной форме в виде объединения всех простых импликантов E.

Шаг 1. Представим каждый простой импликант в виде объединения фундаментальных произведений (используя алгоритм преобразования выражения к полной нормальной форме объединения пересечений).

Шаг 2. Последовательно удалим из E каждый такой имликант, все фундаментальные произведения которого имеются среди фундаментальных произведений остающегося выражения.

Пример 1.11. Применим этот алгоритм для выражения, полученного в Примере 1.10.

$$E = (A^C \cap B^C) \cup (B^C \cap C^C) \cup (A^C \cap C) \cup (B \cap C).$$

Выразим каждый простой импликант в виде объединения фундаментальных произведений

$$A^C \cap B^C = (A^C \cap B^C \cap C) \cup (A^C \cap B^C \cap C^C)$$
$$B^C \cap C^C = (A^C \cap B^C \cap C^C) \cup (A \cap B^C \cap C^C)$$
$$A^C \cap C = (A^C \cap B \cap C) \cup (A^C \cap B^C \cap C)$$
$$B \cap C = (A \cap B \cap C) \cup (A^C \cap B \cap C).$$

Удалим импликант $A^C \cap B^C$, поскольку его фундаментальное произведение $(A^C \cap B^C \cap C)$ входит в выражение для третьего импликанта, а $(A^C \cap B^C \cap C^C)$ входит в выражение для второго импликанта. Из оставшихся трех импликантов ни один этим свойством не обладает, поэтому алгоритм прекращает свою работу и минимальная форма для E выглядит следующим образом

$$E = (B^C \cap C^C) \cup (A^C \cap C) \cup (B \cap C).$$

Заметим также, что метод соседних произведений можно использовать и при эквивалентных преобразованиях выражений, чтобы уменьшить число произведений, входящих в упрощаемый многочлен. Это можно сделать при помощи следующих правил, называемых **правилами соседства**

$$(A \cap B) \cup (A^C \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A^C \cap C)$$
$$(A \cup B) \cap (A^C \cup C) \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A^C \cup C).$$

Доказательство этих правил, использующее граф, рассмотрено далее.

1.15. Представление формул алгебры множеств графами

Многочлену в полной нормальной форме можно взаимно однозначно поставить в соответствие неориентированный двудольный граф. Как следует из параграфа 1.13, каждое множество имеет единственную полную нормальную форму объединения пересечений, а также единственную полную нормальную форму пресечения объединений. Отсюда следует, что каждому множеству можно поставить в соответствие единственный граф, задаваемый полной нормальной формой объединения пересечений, и единственный граф, задаваемый полной нормальной формой пересечения объединений. Заметим, что существуют множества, для которых эти графы могут быть изоморфны. Из сказанного также следует, что имеются задачи, связанные с множествами, которые можно решить методами теории графов.

Сначала необходимо определить понятие смежных произведений. Оно основано на той же идее, которая используется при введении понятия соседства в параграфе 1.14. Два фундаментальных произведения P_i и P_j называются **смежными**, если они состоят из тех же самых переменных и различаются точно в одном литерале. Другими словами, имеется какая-то переменная, которая в одно из этих фундаментальных произведений входит без дополнения, а в другое – с дополнением. В частности, объединение двух смежных фундаментальных произведений представляет собой произведение, в котором на один литерал меньше.