СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

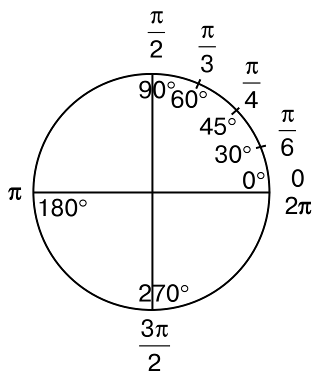
Данное пособие является помощником в изучении, систематизации и обобщении знаний по алгебре за курс средней школы. Материал представлен в наглядной и удобной для восприятия форме — в виде таблиц, что существенно упрощает его запоминание.

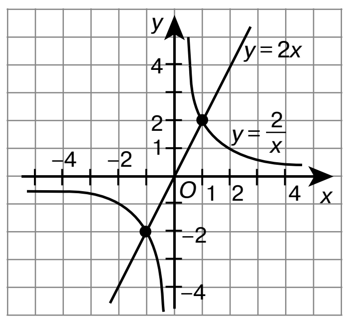
Обобщающий курс изложен последовательно — от простого к сложному. Книга содержит практически все изучаемые в школьной программе определения, правила, формулы, теоремы, изложенные в разделах «Числовые множества», «Вычисление и преобразование выражений», «Уравнения», «Неравенства», «Функции», «Начала математического анализа», «Элементы теории множеств, математической логики, комбинаторики, теории вероятностей и статистики».

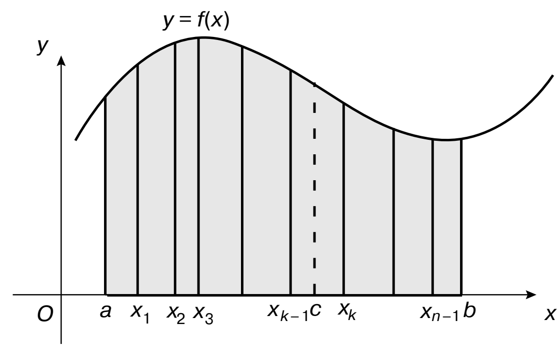
Теоретический материал проиллюстрирован примерами, которые позволяют детально разобраться в темах школьного курса и отработать навыки выполнения различных заданий.

Пособие предназначено для учащихся средней школы при самоподготовке к различным видам контроля, основному и единому государственным экзаменам, а также для учителей математики.

Желаем успехов!







ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА

НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Натуральными называются числа, которые используются при счёте предметов.

Натуральный ряд	Особенности записи	Особенности чтения
Обозначение: *N*. $N = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10...\}$ 0 не является натуральным числом. 1 — наименьшее натуральное число. Наибольшего натурального числа не существует. Последовательность всех натуральных чисел называется **натуральным рядом**. В натуральном ряду каждое следующее число на единицу больше предыдущего	Записываются в десятичной системе исчисления с помощью цифр: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. Если запись натурального числа состоит из одной цифры, его называют **однозначным** числом; из двух цифр — **двузначным** числом; из трёх цифр — **трёхзначным** числом. Самые употребляемые числа имеют не больше 12 цифр в записи. Числа, которые имеют больше 12 цифр, относятся к группе больших чисел	Для чтения натуральных чисел их разбивают, начиная справа, на группы по три цифры в каждой. Первые три цифры справа — это класс единиц, 3 следующие — это класс тысяч, далее идут классы миллионов, миллиардов и т. д. Каждая из цифр класса называется его **разрядом**

Числа 1, 10, 100, 1000 и т. д. называются **разрядными единицами**. Так, 1 — это единица разряда единиц; 10 — единица разряда десятков; 100 — единица разряда сотен и т. д.

Таблица классов и разрядов

Классы	Разряды
1-й класс: единицы	1-й разряд: единицы; 2-й разряд: десятки; 3-й разряд: сотни
2-й класс: тысячи	1-й разряд: единицы тысяч; 2-й разряд: десятки тысяч; 3-й разряд: сотни тысяч
3-й класс: миллионы	1-й разряд: единицы миллионов; 2-й разряд: десятки миллионов; 3-й разряд: сотни миллионов
4-й класс: миллиарды	1-й разряд: единицы миллиардов; 2-й разряд: десятки миллиардов; 3-й разряд: сотни миллиардов

Любое натуральное многозначное число можно представить в виде суммы разрядных слагаемых.

Представление числа в виде $385\,042 = 300\,000 + 80\,000 + 5000 + 40 + 2 =$ $= 3 \cdot 100\,000 + 8 \cdot 10\,000 + 5 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 2$ называется разложением числа на разрядные слагаемые или суммой разрядных слагаемых.

ВАЖНО! Сумма разрядных слагаемых натурального числа равна этому числу.

Действия с натуральными числами

Арифметические действия	**Свойства**
Сложение	
$a+b=c$ слагаемые сумма	$a+b=b+a$ $a+(b+c)=(a+b)+c$ $a+0=a$
Вычитание (действие, обратное сложению)	
$a-b=c$ уменьшаемое разность вычитаемое	$a-(b+c)=(a-b)-c=(a-c)-b$ $(a+b)-c=(a-c)+b=a+(b-c)$ $a-(b-c)=(a-b)+c$ $a-0=a$ $a-a=0$
Умножение	
$a\cdot b=\underbrace{a+a+\ldots+a}_{b\text{ слагаемых}}$ $a\cdot b=c$ множители произведение Вариант обозначения: $a\times b$	$a\cdot b=b\cdot a$ $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$ $(a-b)\cdot c=a\cdot c-b\cdot c$ $a\cdot 1=a$ $a\cdot 0=0$

Деление (действие, обратное умножению)

$$a : b = c$$

делимое — делитель — частное

Варианты обозначений: $\dfrac{a}{b}$ или a / b.

Если частное c является натуральным числом, то говорят, что a делится (без остатка) на b.
Если частное c не является натуральным числом, то говорят, что a не делится (без остатка) на b.
Разделить с остатком число a на число b — значит найти два таких числа q и r, что $a = b \cdot q + r$ и $r < b$.
ВАЖНО! Остаток должен быть меньше делителя.

делимое — неполное частное

$$a : b = q \text{ (ост. } r\text{)}$$

делитель — остаток

$(a : b) : c = a : (b \cdot c)$

$a : (b : c) = (a : b) \cdot c$

$(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b$

$(a \cdot b) : c = a \cdot (b : c)$

$a : a = 1$

$a : 1 = a$

$0 : a = 0 \ (a \neq 0)$

На нуль делить нельзя!

✓ Деление с остатком:

$$\begin{array}{r|l} 70 & 3 \\ \cline{2-2} -6 & 23 \\ \hline 10 & \\ -9 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

делимое — 70; делитель — 3; неполное частное — 23; остаток — 1

Проверка: $70 = 3 \cdot 23 + 1$

Действия	Свойства
Возведение в степень с натуральным показателем	
Выражение a^n называется **степенью числа *a***. Вторая степень числа называется **квадратом** числа, третья степень — **кубом** числа. показатель степени $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}}$ основание степени	$a^1 = a$ $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$ $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ $a^x \cdot b^x = (ab)^x$ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, где $a \neq 0$ $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$, где $b \neq 0$

Действия сложения, вычитания, умножения и деления называют **арифметическими действиями**. Только в результате сложения и умножения натуральных чисел также получаются натуральные числа.
Свойства сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень представляют собой равенства, которые можно использовать не только слева направо, но и справа налево.

Порядок действий

Действия 1-й ступени: сложение и вычитание.
Действия 2-й ступени: умножение и деление.
Действия 3-й ступени: возведение в степень.

Алгоритм действий	Пример
В **выражении без скобок** сначала выполняют действия большей ступени. Если выражение содержит действия одной ступени, то их выполняют в порядке, в котором они записаны, — слева направо. Возведение в степень ⇨ умножение/деление ⇨ сложение/вычитание	Запись решения в строчку: 4 1 2 5 6 3 $\boxed{17-5\cdot6:3-2+4:2}=17-30:3-2+2=17-10-$ $-2+2=7-2+2=7$
В **выражении со скобками** сначала выполняют все действия в скобках, затем действия большей ступени. Скобками пользуются, чтобы изменить порядок действий. Действия в скобках ⇨ возведение в степень ⇨ умножение/деление ⇨ сложение/вычитание	Запись решения по действиям: 1 3 5 2 4 6 $\boxed{(3+1)\cdot2+6^2:3-7}=13$ 1) $3+1=4$; 2) $6^2=36$; 3) $4\cdot2=8$; 4) $36:3=12$; 5) $8+12=20$; 6) $20-7=13$

Делители и кратные

Определение	Примеры
Делителем натурального числа n называется такое натуральное число k, на которое число n делится без остатка. Обозначение: $n \vdots k$ (читается «n делится на k»)	Делители числа 15: 1, 3, 5 и 15. Делители числа 31: 1 и 31
Натуральное число k называется **кратным** натуральному числу n, если число n делится на число k без остатка. Любое натуральное число имеет бесконечно много кратных. ПРИМЕЧАНИЕ. Слово «кратно» можно заменить словами «делится на...»	Кратные числа 15: 15, 30, 45 и т. д. Кратные числа 31: 31, 62, 93 и т. д.

Простые и составные числа

Определение	Пример
Простым называется натуральное число, которое делится на 1 и на само себя	Число 31 является простым, т. к. делится только на 1 и 31
Натуральное число, имеющее более двух делителей, называется **составным**. Любое составное число можно разложить на два множителя, каждый из которых больше 1	Число 15 является составным, т. к. имеет четыре делителя. $15 = 3 \cdot 5$ — число 15 разложено на множители 3 и 5

Число 1 не является ни простым, ни составным.

Признаки делимости

Признак делимости — правило, позволяющее без выполнения деления определить, является ли число кратным заранее заданному числу.

Краткая формулировка признака делимости		Примеры
На 2	Последняя цифра в записи числа — 0, 2, 4, 6 или 8	850; 26; 15 794
На 3	Сумма цифр числа делится на 3	321 $(3+2+1=6 \vdots 3)$
На 4	Число оканчивается двумя нулями или число, образованное двумя последними цифрами, делится на 4	2500; 1324; 508
На 5	Последняя цифра в записи числа — 0 или 5	1760; 3085
На 8	Число оканчивается тремя нулями или число, образованное тремя последними цифрами, делится на 8	71 000; 29 032; 5160
На 9	Сумма цифр числа делится на 9	846 $(8+4+6=18 \vdots 9)$
На 10	Последняя цифра в записи числа — 0	930
На 11	Сумма цифр на нечётных местах равна сумме цифр на чётных местах	2695 $(2+9=6+5)$. 32 065 $(3+0+5=2+6)$
На 25	Число оканчивается на 00, 25, 50 или 75	3600; 90 825; 375

Наибольший общий делитель

Наибольшее натуральное число, на которое делятся без остатка числа a и b, называется **наибольшим общим делителем** этих чисел. Аналогично определяется наибольший общий делитель для трёх и более натуральных чисел.

КРАТКАЯ ЗАПИСЬ

Наибольший общий делитель	**НОД(*a*; *b*)**

Алгоритм нахождения НОД	Пример
1) Разложить эти числа на простые множители	Найдём наибольший общий делитель чисел 60, 80 и 48.
2) Из множителей подчеркнуть те, которые входят в разложение всех чисел	$60 = \underline{2}\cdot\underline{2}\cdot 3\cdot 5$; $80 = \underline{2}\cdot\underline{2}\cdot 2\cdot 2\cdot 5$; $48 = \underline{2}\cdot\underline{2}\cdot 2\cdot 2\cdot 3$
3) Найти произведение подчёркнутых множителей	$\text{НОД}(60; 80; 48) = 2\cdot 2 = 4$

Если все данные числа делятся на одно из них, то это число и является наибольшим общим делителем данных чисел.

✓ $\text{НОД}(15; 30) = 15$, т. к. $30 \vdots 15$.

Натуральные числа называются взаимно простыми, если их наибольший общий делитель равен 1.

✓ Числа 15 и 17 — взаимно простые, т. к. $\text{НОД}(15; 17) = 1$.

Наименьшее общее кратное

Наименьшим общим кратным чисел *a* и *b* называется наименьшее натуральное число, которое кратно и *a*, и *b*. Аналогично определяется наименьшее общее кратное для трёх и более натуральных чисел.

КРАТКАЯ ЗАПИСЬ

Наименьшее общее кратное	**НОК(*a*; *b*)**

<table>
<tr><th>Алгоритм нахождения НОК</th><th>Пример</th></tr>
<tr><td>1) Разложить эти числа на простые множители</td><td rowspan="2">Найдём наименьшее общее кратное чисел 60, 80 и 48.
$60 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot \underline{5}$; $80 = 2 \cdot 2 \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot 5$; $48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$</td></tr>
<tr><td>2) Выписать множители, входящие в разложение одного из чисел</td></tr>
<tr><td>3) Дописать к ним недостающие множители из разложения других чисел</td><td rowspan="2">$\text{НОК}(60; 80; 48) = (2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5) \cdot 2 \cdot 2 = 240$</td></tr>
<tr><td>4) Найти произведение получившихся множителей</td></tr>
</table>

Если одно из данных чисел делится на все остальные числа, то это число и является наименьшим общим кратным данных чисел.

✓ $\text{НОК}(15; 30) = 30$, т. к. 30 15:

В некоторых случаях возможно найти НОК, перебирая кратные большего числа.

✓ Для нахождения НОК(12; 20) из кратных числа 20 выберем то, которое делится и на 12. Кратные 20: 20, 40, 60. Подходит число 60.

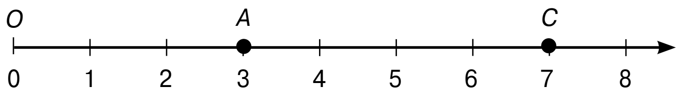
Сравнение

Натуральный ряд является **упорядоченным множеством**, то есть для любых двух натуральных чисел m и n справедливо одно из соотношений:

$m = n$ (m равно n), $m > n$ (m больше n), $m < n$ (m меньше n).

Из двух натуральных чисел меньшим является то, которое в натуральном ряду стоит левее, а бо́льшим — то, которое в натуральном ряду стоит правее.

✓ Точка $A(3)$ левее точки $C(7)$, поэтому $3 < 7$.



Натуральные числа можно сравнивать, не обращаясь к натуральному ряду, а используя правила сравнения.

Правила сравнения натуральных чисел	Пример
С разным количеством цифр	
Из двух натуральных чисел с разным количеством цифр больше то число, у которого цифр больше	621 — 3 цифры, 75 — 2 цифры; $621 > 75$
С одинаковым количеством цифр	
Из двух натуральных чисел с одинаковым количеством цифр больше то, у которого больше единиц в наивысшем одноимённом разряде (сравнение проводится поразрядно, начиная со старшего разряда)	$18\,75\underline{6}\,028 > 18\,75\underline{4}\,994$, т. к. $6 > 4$

Округление

Округление — замена числа на его приближённое значение (с определённой точностью), записанное с меньшим количеством значащих цифр.

Правила округления	Примеры
1) Найдите разряд, до которого необходимо округлить. 2) Сравните цифру, стоящую справа от этого разряда, с 5: • если эта цифра меньше 5 (0, 1, 2, 3, 4), то цифра разряда, до которого идёт округление, не меняется, а остальные числа заменяются нулями; • если эта цифра больше или равна 5 (5, 6, 7, 8, 9), то цифра разряда, до которого идёт округление, увеличивается на 1, а остальные числа заменяются нулями	Округлить до десятков: $208\|\underline{4} \approx 2080$. Округлить до сотен: $64\|\underline{5}1 \approx 6500$. Округлить до тысяч: $139\|\underline{8}02 \approx 140000$. Округлить до десятков тысяч: $28\|\underline{3}927 \approx 280000$

В случаях, когда не требуется точное значение числового выражения, округляют его компоненты и выполняют действия с приближёнными значениями. Такую операцию называют прикидкой результата действия.
Прикидку используют также при выполнении самопроверки.

✓ Выполним прикидку разности: $1981 - 97 \approx 2000 - 100 = 1900$.

✓ Выполним прикидку произведения: $598 \cdot 23 \approx 600 \cdot 20 = 12\,000$.

ДРОБИ

Дробь — форма представления числа в математике. Существует два вида дробей: обыкновенные и десятичные.

Обыкновенные дроби

Число вида $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$, называют **обыкновенной дробью**.

m ← числитель

n ← знаменатель

Виды обыкновенных дробей	Примеры
Правильная дробь — это обыкновенная дробь, числитель которой меньше знаменателя, то есть $m < n$. Любая правильная дробь меньше единицы: $\frac{m}{n} < 1$, если $m < n$	Правильные дроби: $\frac{3}{8}$ $(3 < 8)$; $\frac{1}{5}$ $(1 < 5)$
Неправильная дробь — это обыкновенная дробь, числитель которой больше знаменателя или равен ему, то есть $m \geq n$. Любая неправильная дробь больше единицы или равна ей: $\frac{m}{n} \geq 1$, если $m \geq n$. ПРИМЕЧАНИЕ. Любое натуральное число можно представить в виде неправильной дроби	Неправильные дроби: $\frac{8}{3}$ $(8 > 3)$; $\frac{5}{5}$ $(5 = 5)$. Представление натурального числа в виде неправильной дроби: $4 = \frac{4}{1}$ или $4 = \frac{8}{2}$

Основное свойство дроби

Формулировка	Применение
$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot c}{b\cdot c}; \frac{a}{b}=\frac{a:c}{b:c}, c\neq 0$ Если числитель и знаменатель дроби умножить (разделить) на одно и то же число, отличное от нуля, то получится дробь, равная данной. ВАЖНО! При использовании основного свойства изменяется только внешний вид дроби, её значение при этом остаётся неизменным	**Сокращение дроби** — действие перехода к новой дроби, равной заданной, но с меньшими числителем и знаменателем. ✓ $\frac{18}{26}=\frac{9}{13}$ (числитель и знаменатель дроби разделили на 2). Сократить дробь — значит разделить числитель и знаменатель на их общий делитель, больший 1. **Несократимой** называется дробь, числитель и знаменатель которой — взаимно простые числа. Сокращать дробь можно сразу на наибольший общий делитель числителя и знаменателя либо несколько раз на общий делитель. Сократим дробь $\frac{140}{175}$. ✓ $140=2\cdot 2\cdot 5\cdot 7$; $175=5\cdot 5\cdot 7$; НОД$(140; 175)=5\cdot 7=35$. Тогда $\frac{140}{175}=\frac{140:35}{175:35}=\frac{4}{5}$. ✓ $\frac{140}{175}=\frac{140:5}{175:5}=\frac{28:7}{35:7}=\frac{4}{5}$
	Приведение дроби к новому знаменателю — действие замены заданной дроби равной ей дробью, но с бóльшими числителем и знаменателем. ✓ $\frac{1}{4}=\frac{25}{100}$ (числитель и знаменатель дроби умножили на 25). Используется при сложении, вычитании, сравнении обыкновенных дробей, а также при представлении обыкновенной дроби в виде десятичной

Смешанные числа

Число, содержащее целую и дробную части, называется **смешанным**.

Правило	Пример
Представление неправильной дроби в виде смешанного числа	
1) Разделить числитель на знаменатель с остатком. 2) Неполное частное — это целая часть, остаток от деления — числитель, знаменатель остаётся прежним	$\frac{17}{7}=2\frac{3}{7}$, т. к. $17:7=2$ (ост. 3)
Представление смешанного числа в виде неправильной дроби	
1) Умножить целую часть на знаменатель, прибавить числитель — получим числитель неправильной дроби. 2) Знаменатель остаётся прежним	$3\frac{5}{11}=\frac{3\cdot 11+5}{11}=\frac{38}{11}$

Смешанное число — это сумма натурального числа и обыкновенной дроби, записанная без знака «+».

✓ $8\frac{1}{3}=8+\frac{1}{3}$.

Приведение обыкновенных дробей к наименьшему общему знаменателю

Наименьший общий знаменатель дробей равен наименьшему общему кратному знаменателей данных дробей.

Последовательность действий	Пример
1) Найти наименьшее общее кратное дробей	Приведём дроби $\frac{11}{60}$ и $\frac{29}{168}$ к наименьшему общему знаменателю. $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$; $168 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$. $\text{НОК}(60; 168) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 840$
2) Для каждой дроби найти дополнительный множитель: разделить НОК на исходный знаменатель	Дополнительный множитель к первой дроби: $840 : 60 = 2 \cdot 7 = 14$ (произведение тех множителей, которые нужно добавить к разложению числа 840, чтобы получить 168). Дополнительный множитель ко второй дроби: $840 : 168 = 5$
3) Умножить числитель и знаменатель каждой дроби на её дополнительный множитель	$\frac{11}{60} = \frac{11 \cdot 14}{60 \cdot 14} = \frac{154}{840}$; $\frac{29}{168} = \frac{29 \cdot 5}{168 \cdot 5} = \frac{145}{840}$

Сравнение обыкновенных дробей и смешанных чисел

Правило	Пример
Сравнение обыкновенных дробей	
1) Из двух дробей с одинаковыми знаменателями больше та дробь, у которой числитель больше	$\frac{5}{12} > \frac{3}{12}$, т. к. $5 > 3$
2) Из двух дробей с одинаковыми числителями больше та дробь, у которой знаменатель меньше	$\frac{5}{9} > \frac{5}{11}$, т. к. $9 < 11$
Сравнение смешанных чисел	
1) Из двух смешанных чисел с разными целыми частями больше та, у которой целая часть больше	$7\frac{3}{8} > 6\frac{9}{13}$, т. к. $7 > 6$
2) Если целые части смешанных чисел равны, надо сравнить их дробные части по правилам сравнения обыкновенных дробей	$2\frac{3}{20} > 2\frac{1}{20}$, т. к. $\frac{3}{20} > \frac{1}{20}$

Если у дробей разные знаменатели (числители), необходимо сначала с помощью основного свойства дроби привести их к одному знаменателю (числителю).

Арифметические действия с обыкновенными дробями и смешанными числами

Сложение	
Действия с обыкновенными дробями	**Примеры**
Чтобы **сложить дроби**, надо: 1) привести дроби к общему знаменателю, если знаменатели разные; 2) сложить числители полученных дробей, знаменатель оставить прежним: $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$. Если получилась сократимая дробь, её надо сократить; если дробь неправильная, нужно представить её в виде смешанного числа	$\frac{3}{10}+\frac{7}{15}=\frac{9}{30}+\frac{14}{30}=\frac{23}{30}$. $\frac{2}{7}+\frac{3}{14}=\frac{4}{14}+\frac{3}{14}=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}$. $\frac{11}{15}+\frac{3}{10}=\frac{22}{30}+\frac{9}{30}=\frac{31}{30}=1\frac{1}{30}$
Действия со смешанными числами	**Примеры**
Чтобы **сложить смешанные числа**, надо: 1) привести дробные части этих чисел к наименьшему общему знаменателю; 2) отдельно выполнить сложение целых частей и отдельно — дробных. Если при сложении дробных частей получилась неправильная дробь, нужно выделить целую часть из этой дроби и прибавить её к полученной целой части	$2\frac{3}{8}+5\frac{5}{12}=2\frac{9}{24}+5\frac{10}{24}=7\frac{19}{24}$. $2\frac{7^{\backslash 2}}{9}+3\frac{5^{\backslash 3}}{6}=2\frac{14}{18}+3\frac{15}{18}=5\frac{29}{18}=6\frac{11}{18}$

Вычитание

Действия с обыкновенными дробями	Примеры
Чтобы **вычесть дроби**, надо: 1) привести дроби к общему знаменателю, если знаменатели разные; 2) вычесть числители полученных дробей, знаменатель оставить прежним: $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$. Если получилась сократимая дробь, её надо сократить	$\frac{2}{3}-\frac{3}{5}=\frac{10}{15}-\frac{9}{15}=\frac{1}{15}$. $\frac{5}{7}-\frac{3}{14}=\frac{10}{14}-\frac{3}{14}=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}$
Действия со смешанными числами	**Примеры**
Чтобы **вычесть смешанные числа**, надо: 1) привести дробные части этих чисел к наименьшему общему знаменателю; 2) отдельно выполнить вычитание целых частей и отдельно — дробных. Если дробная часть уменьшаемого меньше дробной части вычитаемого, нужно превратить её в неправильную дробь, уменьшив на единицу целую часть	$3\frac{11}{12}-2\frac{5}{6}=3\frac{11}{12}-2\frac{10}{12}=1\frac{1}{12}$. $9\frac{2}{7}-3\frac{5}{7}=8\frac{7+2}{7}-3\frac{5}{7}=8\frac{9}{7}-3\frac{5}{7}=5\frac{4}{7}$. $9\frac{7^{\backslash 2}}{15}-2\frac{5^{\backslash 5}}{6}=9\frac{14}{30}-2\frac{25}{30}=8\frac{44}{30}-2\frac{25}{30}=6\frac{19}{30}$

Умножение	
Действия с обыкновенными дробями	**Примеры**
Чтобы **умножить дроби**, надо: 1) найти произведение числителей и произведение знаменателей этих дробей (произвести сокращение, если возможно): $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$; 2) первое произведение записать числителем, второе — знаменателем. Если получилась неправильная дробь, нужно представить её в виде смешанного числа	$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}=\frac{8}{15}$. $\frac{4}{15}\cdot\frac{5}{8}=\frac{4\cdot 5}{15\cdot 8}=\frac{1\cdot 1}{3\cdot 2}=\frac{1}{6}$. $\frac{4}{5}\cdot\frac{35}{6}=\frac{4\cdot 35}{5\cdot 6}=\frac{2\cdot 7}{1\cdot 3}=\frac{14}{3}=4\frac{2}{3}$
Действия со смешанными числами	**Примеры**
Чтобы выполнить **умножение смешанных чисел**, надо: 1) записать смешанные части в виде неправильных дробей; 2) найти произведение числителей и произведение знаменателей этих дробей; 3) первое произведение записать числителем, а второе — знаменателем	$1\frac{2}{5}\cdot 4\frac{4}{7}=\frac{7\cdot 32}{5\cdot 7}=\frac{32}{5}=6\frac{2}{5}$. $2\frac{1}{3}\cdot 4\frac{2}{7}=\frac{7}{3}\cdot\frac{30}{7}=\frac{7\cdot 30}{3\cdot 7}=10$. $5\frac{1}{3}\cdot 4\frac{1}{20}=\frac{16\cdot 81}{3\cdot 20}=\frac{4\cdot 27}{1\cdot 5}=\frac{108}{5}=21\frac{3}{5}$

Деление

Действия с обыкновенными дробями	Примеры
Чтобы **разделить одну дробь на другую**, надо делимое умножить на число, обратное делителю: $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$	$\frac{8}{35}:\frac{4}{5}=\frac{8}{35}\cdot\frac{5}{4}=\frac{2}{7}.$ $\frac{4}{7}:\frac{8}{21}=\frac{4\cdot21}{7\cdot8}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$
Действия со смешанными числами	**Примеры**
Чтобы выполнить **деление смешанных чисел**, надо: 1) записать смешанные части в виде неправильных дробей; 2) делимое умножить на число, обратное делителю	$7\frac{1}{2}:2\frac{1}{2}=\frac{15}{2}:\frac{5}{2}=\frac{15\cdot2}{2\cdot5}=3.$ $2\frac{3}{5}:1\frac{6}{7}=\frac{13}{5}:\frac{13}{7}=\frac{13}{5}\cdot\frac{7}{13}=\frac{7}{5}=1\frac{2}{5}$

Чтобы выполнить умножение (деление) на натуральное число, его можно представить в виде неправильной дроби со знаменателем 1: $n=\frac{n}{1}$.

✓ $\frac{3}{7}\cdot14=\frac{3}{7}\cdot\frac{14}{1}=\frac{3\cdot14}{7\cdot1}=\frac{3\cdot2}{1}=6.$

✓ $2:1\frac{3}{5}=2:\frac{8}{5}=\frac{2}{1}\cdot\frac{5}{8}=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}=1{,}25.$

Действия с обыкновенными дробями и смешанными числами обладают теми же свойствами, что и действия с натуральными числами.

Десятичные дроби

Любое число, знаменатель дробной части которого выражается единицей с одним или несколькими нулями, можно представить в виде **десятичной дроби**.

$$a{,}bcde\ldots = a + \frac{b}{10} + \frac{c}{100} + \frac{d}{1000} + \frac{e}{10\,000} + \ldots$$

целая часть

дробная часть

Определение	Примеры
Конечные десятичные дроби	
Десятичные дроби, в записях которых содержится конечное число знаков	5,6; 2,84; 0,1087
Бесконечные десятичные дроби	
1) **Периодические десятичные дроби** (или просто периодические дроби) — это бесконечные десятичные дроби, в записи которых, начиная с некоторого знака после запятой, бесконечно повторяется какая-нибудь цифра или группа цифр, которую называют периодом дроби	$1{,}666\ldots = 1{,}(6)$; $0{,}5313131\ldots = 0{,}5(31)$
2) **Непериодические десятичные дроби** (или просто непериодические дроби) — это бесконечные десятичные дроби, не имеющие периода	$0{,}101001000100001\ldots$; $45{,}1234567891011\ldots$

Разряды в десятичных дробях

Дробь	Десятичная дробь										
	Разряды целой части числа					Разряды дробной части числа					
	тысячи	сотни	десятки	единицы		десятые	сотые	тысячные	десятитысячные	стотысячные	миллионные
$\frac{21\,803}{1\,000\,000}$				0	,	0	2	1	8	0	3
$5\frac{47}{1000}$				5	,	0	4	7			
$27\frac{125}{100\,000}$			2	7	,	0	0	1	2	5	
$3252\frac{1231}{10\,000}$	3	2	5	2	,	1	2	3	1		
$121\frac{87}{100\,000}$		1	2	1	,	0	0	0	8	7	

Представление обыкновенной дроби в виде десятичной и десятичной — в виде обыкновенной

Приведение десятичной дроби к обыкновенной	Приведение обыкновенной дроби к десятичной
В числителе записать число, стоящее после запятой. В знаменателе записать разрядную единицу (10, 100, 1000 и т. д.), которая содержит столько же нулей, сколько знаков после запятой в десятичной дроби. ✓ $0{,}3=\frac{3}{10}$; $0{,}019=\frac{19}{1000}$	**Способ 1** Домножить числитель и знаменатель дроби так, чтобы в знаменателе получилась разрядная единица. В случае смешанного числа домножают только дробную часть, а целая часть не меняется. ✓ $\frac{1}{5}=\frac{1\cdot 2}{5\cdot 2}=\frac{2}{10}=0{,}2$; $\frac{3}{4}=\frac{3\cdot 25}{4\cdot 25}=\frac{75}{100}=0{,}75$; $9\frac{2}{125}=9\frac{2\cdot 8}{125\cdot 8}=9\frac{16}{1000}=9{,}016$
Если десятичная дробь содержит целую часть, то дробь переводят в смешанное число, в котором целую часть записывают перед дробной. При необходимости получившуюся обыкновенную дробь надо сократить. ✓ $17{,}11=17\frac{11}{100}$; $8{,}2=8\frac{2}{10}=8\frac{1}{5}$	**Способ 2** Разделить числитель на знаменатель «уголком». ✓ $\begin{array}{r\|l} -1{,}0 & 5 \\ \underline{0} & 0{,}2 \\ -10 & \\ \underline{10} & \\ 0 & \end{array}$

Не каждую обыкновенную дробь можно представить в виде конечной десятичной дроби. **Несократимую обыкновенную дробь** можно перевести в конечную десятичную дробь, если в разложении её знаменателя на простые множители есть только 2 и (или) 5.

Сравнение десятичных дробей

- Если дробная часть десятичной дроби оканчивается нулями, то их можно не писать — значение дроби не изменится.
- Если к дробной части приписать любое число нулей, то значение десятичной дроби не изменится.

Сравнение десятичных дробей	Примеры
Способ 1 Чтобы сравнить две десятичные дроби, надо сначала уравнять в них число десятичных знаков, приписав к одной из них справа нули, а потом, отбросив запятую, сравнить получившиеся натуральные числа	Сравним 12,16 и 12,051. $12{,}16 = 12{,}160$; $12\,160 > 12\,051$. Тогда $12{,}16 > 12{,}051$
Способ 2 Десятичные дроби сравнивают поразрядно, начиная слева направо. Целая часть сравнивается с целой, десятые — с десятыми, сотые — с сотыми и т. д.	$1{,}78 < 4{,}1$ $(1 < 4)$. $36{,}74 > 36{,}29$ $(7 > 2)$. $0{,}416 < 0{,}4163$ $(0{,}416 = 0{,}4160$ и $0 < 3)$

Чтобы сравнить десятичную дробь с обыкновенной, надо обыкновенную дробь представить в виде десятичной, а затем выполнить сравнение. Можно также преобразовать десятичную дробь в обыкновенную и далее уже сравнивать две обыкновенные дроби.

Арифметические действия с десятичными дробями

Правила выполнения арифметических действий	Примеры
Чтобы **сложить (вычесть) десятичные дроби**, надо: 1) уравнять в этих дробях количество знаков после запятой; 2) записать их друг под другом так, чтобы запятая была записана под запятой; 3) выполнить сложение (вычитание), не обращая внимания на запятую; 4) поставить в ответе запятую под запятой	$2{,}35+11{,}7=14{,}05$ $\quad \begin{array}{r} 11{,}70 \\ +\ 2{,}35 \\ \hline 14{,}05 \end{array}$ $12-10{,}346=1{,}654$ $\quad \begin{array}{r} 12{,}000 \\ -\ 10{,}346 \\ \hline 1{,}654 \end{array}$
Чтобы **перемножить две десятичные дроби**, надо: 1) выполнить умножение, не обращая внимания на запятые; 2) отделить запятой столько цифр справа, сколько их стоит после запятой в обоих множителях вместе	$3{,}25\cdot 2{,}8=9{,}100=9{,}1$ $\quad \begin{array}{r} 3{,}25 \\ \times\ 2{,}8 \\ \hline 2600 \\ +\ 650 \\ \hline 9{,}100 \end{array}$
Чтобы **разделить десятичную дробь на натуральное число**, надо: 1) разделить дробь на это число, не обращая внимания на запятую; 2) поставить в частном запятую, когда кончится деление целой части	$70{,}15:23=3{,}05$ $\quad \begin{array}{r\|l} -70{,}15 & 23 \\ \cline{2-2} 69 & 3{,}05 \\ \cline{1-1} -115 & \\ 115 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$
Чтобы **разделить число на десятичную дробь**, надо: 1) в делимом и делителе перенести запятую вправо на столько цифр, сколько их после запятой в делителе; 2) выполнить деление на натуральное число	$25{,}6:0{,}08=2560:8=320.$ $12{,}35:2{,}5=123{,}5:25=4{,}94.$ $36:0{,}125=36\,000:125=288$

Округление десятичных дробей

Правила округления	**Примеры**
1) Найти цифру округляемого разряда. 2) Отделить вертикальной чертой все цифры, стоящие справа от округляемого разряда. 3) Если первая отбрасываемая цифра — 0, 1, 2, 3 или 4, то последняя оставшаяся цифра записывается без изменений, а все цифры после вертикальной черты отбрасываются. Если первая отбрасываемая цифра — 5, 6, 7, 8 или 9, то к последней оставшейся цифре надо добавить 1, а все цифры после вертикальной черты отбросить	Округлить до десятых: $37{,}4\vert\underline{4}9 \approx 37{,}4$. Округлить до сотых: $0{,}64\vert\underline{5}1 \approx 0{,}65$. Округлить до единиц (до целых): $957,\vert\underline{8}02 \approx 958$
Если при округлении десятичной дроби последняя из оставшихся цифр в дробной части — 0, то отбрасывать этот нуль нельзя. В таком случае нуль в дробной части показывает, до какого разряда округлено число	Округлить до тысячных: $2{,}849\vert\underline{6}13 \approx 2{,}850$
Если десятичную дробь нужно округлить до разряда выше единиц (десятков, сотен и т. д.), то дробная часть отбрасывается, а целая часть округляется по правилам округления натуральных чисел	Округлить до десятков: $96\vert\underline{3}{,}806 \approx 960$. Округлить до сотен: $54\vert\underline{7}1{,}83 \approx 5500$

Десятичную дробь можно округлить:
- до определённого разряда дробной части: десятых, сотых, тысячных, десятитысячных и т. д.;
- до целого числа с точностью до единиц, десятков, сотен и т. д.