Предисловие

Математический анализ является одной из тех математических дисциплин, которые составляют фундамент математического образования. В основу данного сборника легли практические занятия по дисциплине «Математический анализ», которые авторы сборника проводят для студентов I курса механико-математического факультета Белорусского государственного университета. Мы также включили в сборник необходимые теоретические сведения, которые представляют из себя выдержки из курса лекций по «Математическому анализу» одного из авторов [8].

Предлагаемый читателю сборник состоит из пяти глав. Каждая глава объединяет несколько разделов, которые приблизительно соответствуют одному практическому занятию.

Каждое занятие мы постарались снабдить всеми необходимыми для решения задач теоретическими понятиями, теоремами и формулами. При этом мы стремились к тому, чтобы пособие не было перегружено теоретическими сведениями и содержало только минимально необходимый теоретический материал. Отчасти поэтому раздел «Действительные числа» из гл. 1 мы оставили без предварительных теоретических сведений. Также теория отсутствует в разделе 5 гл. 2. В данном разделе мы попытались привлечь внимание читателя к таким результатам теории предела числовой последовательности, как связь между пределом числовой последовательности и пределами от среднего арифметического и среднего геометрического членов данной последовательности, теореме Штольца и приложениям этих результатов к вычислению пределов. Поскольку указанные теоремы не входят в программу читаемого нами лекционного курса «Математический анализ», то мы приводим эти результаты в виде упражнений с подробными доказательствами. Любознательного читателя, желающего более подробно изучить теоретические основы математического анализа, мы отсылаем к замечательным пособиям [1], [2], [4]–[8], [10]–[13].

Помимо теоретического минимума каждое занятие содержит подробно разобранные примеры решения типовых задач. Мы старались, приводя решения типовых задач, продемонстрировать все основные методы и приемы, применяемые при решении задач данной темы. Надеемся, что даже студенты, упустившие на занятиях тему или отдельные ее части, смогут, используя разобранные нами примеры, успешно усвоить материал.

В каждом разделе пособия вы найдете задания для аудиторной и самостоятельной работы. Также почти все разделы пособия содержат подраздел «Задания повышенной сложности». Не все задачи, находящиеся в этих подразделах, действительно являются сложными. Некоторые из задач, помещенные в данные разделы, просто выбиваются из типовых задач, решаемых в рассматриваемой теме, а некоторые приводятся, чтобы заставить читателя внимательнее изучить тему, более тщательно посмотреть на теоремы и определения, обратить внимание на тонкости и нюансы, которые упускаются при беглом знакомстве с темой. Мы не стали добавлять задания повышенной сложности в разделе «Комбинаторика. Бином Ньютона», так как данные понятия хоть и относятся к важным инструментам любого математика, не являются объектом изучения непосредственно математического анализа, а нам не хотелось уводить читателя далеко в сторону от изучаемого предмета. Также вы не найдете заданий повышенной сложности в разделе «Теоремы о дифференцируемых функциях», так как многие задачи этого раздела решаются не по готовому алгоритму, а требуют смекалки и самостоятельного придумывания доказательств, используя теоремы из лекционного курса. Задачи такого типа, как правило, нелегко даются студентам, поэтому мы посчитали нецелесообразным предлагать еще более сложные задачи.

Пособие предназначено прежде всего преподавателям математического анализа и студентам, изучающим этот предмет. Несмотря на то что мы постарались разбить материал на разделы, приблизительно соответствующие практическим занятиям, пособие является несколько избыточным. Далеко не в каждой группе можно прорешать все задания, предложенные для аудиторной работы, за одно занятие. Задания для самостоятельной работы также требуют от среднего студента значительного времени, чтобы целиком справиться со всеми предложенными заданиями. Мы надеемся, что это будет преимуществом, а не препятствием в работе с данным пособием.

В список литературы мы включили два пособия ([3] и [9]), наиболее часто используемые преподавателями механико-математического факультета Белорусского государственного университета при преподавании данной дисциплины.

Авторы благодарят профессоров Е.А. Ровбу и А.П. Старовойтова, а также доцента В.Р. Мисюка, за внимательное рецензирование данного пособия. Мы также хотим высказать свою благодарность профессору А.А. Пекарскому за многолетнее сотрудничество и полезные замечания, сделанные при подготовке данной рукописи.

Будем благодарны всем, кто укажет на возможные неточности в тексте и внесет предложения по его улучшению.

Пожелания, предложения и замечания просим направлять по электронному адресу: mardvilko@gmail.com

Глава 1

Введение в анализ

Некоторые обозначения

Используем ряд следующих стандартных математических символов:

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ обозначают соответственно множества натуральных, целых, рациональных и действительных чисел;

сумма и **произведение** n чисел $a_1, \ldots, a_n$ обозначаются соответственно

$$\sum_{k=1}^{n} a_k := a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \quad \prod_{k=1}^{n} a_k := a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n;$$

факториал числа $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ вводится как

$$0! = 1, \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k \quad \text{при} \quad n \geqslant 1.$$

1.1. Индукция, тождества и неравенства

Задачи из этого раздела используют в своем решении **метод математической индукции**: *пусть некоторое утверждение $P(n)$ удовлетворяет условиям*:

1) *верно $P(1)$ (база индукции)*;

2) *для любого $n \in \mathbb{N}$ из того, что верно $P(n)$ (предположение индукции), вытекает справедливость $P(n+1)$.*

Тогда $P(n)$ справедливо для любого натурального n.

Решение типовых задач

1. Пусть $\{a_n\}$ — арифметическая прогрессия. Доказать, что

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.1}$$

Доказательство. База индукции — случай $n = 1$ равенства (1.1) — очевидна.

Пусть d — разность нашей прогрессии, $n \in \mathbb{N}$. Предположим, что (1.1) верно для этого n, и выведем отсюда, что это равенство верно для $n + 1$.

Учитывая равенство $a_n = a_1 + d(n - 1)$, $n \in \mathbb{N}$, получим

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n + (a_1 + dn) =$$

$$= \frac{a_1 + (a_1 + dn)}{2}(n+1) = \frac{a_1 + a_{n+1}}{2}(n+1).$$

В силу принципа математической индукции отсюда заключаем, что (1.1) верно для всех $n \in \mathbb{N}$.

2. Доказать тождество

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

Доказательство. Для удобства введем обозначения

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2.$$

При $n = 1$ равенство верно, т. е. база индукции выполнена. Возьмем $n \in \mathbb{N}$, и пусть для этого n справедливо (1.2). Тогда для $n + 1$ получим

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$$

$$= \frac{(n+1)}{6}(2n^2+7n+6) = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}.$$

Мы доказали справедливость равенства (1.2) для $n+1$. Согласно принципу математической индукции (1.2) справедливо для всех $n \in \mathbb{N}$.

3. Доказать тождество

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}. \tag{1.3}$$

Доказательство. База индукции — случай $n = 1$: (1.3) имеет вид

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Возьмем $n \in \mathbb{N}$ и предположим, что (1.3) верно для этого n. Тогда для $n+1$ имеем

$$\sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} =$$

$$= \sum_{k=n+2}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k}.$$

Из метода математической индукции следует справедливость (1.3) для всех $n \in \mathbb{N}$.

4. Доказать, что при $x > -1$ справедливо неравенство Бернулли

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

Доказательство. При $n = 1$ неравенство Бернулли обращается в равенство. Возьмем $n \in \mathbb{N}$ и предположим, что неравенство Бернулли выполнено для такого n. Тогда для $n+1$ имеем

$$(1+x)^{n+1} \geqslant (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geqslant 1 + (n+1)x.$$

Оглавление