ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное издание «Математика в примерах и задачах» состоит из 13 разделов, каждый из которых структурирован на параграфы.

В начале каждого параграфа содержится необходимый теоретический материал, затем приводится решение нескольких типовых примеров и набор заданий трех уровней сложности. Учебное пособие позволяет реализовать дифференцированный подход в обучении: каждый учащийся может решать задания доступного ему уровня сложности. Кроме того, пособие может быть использовано в обучении на различных специальностях системы среднего специального образования с разными по содержанию и сложности планируемого материала учебными программами дисциплины «Математика» (профессиональный компонент).

Поскольку на практике широко реализуется непрерывное образование в системе учреждений среднего специального и высшего образования, усвоение обучающимися разработанного содержания данного учебного издания будет способствовать качественной реализации непрерывного обучения математике в университете.

Авторы выражают искреннюю благодарность рецензентам книги – заведующему кафедрой физических и математических основ информатики Белорусской государственной академии связи доктору педагогических наук, кандидату физико-математических наук, профессору Г.М. Булдыку и коллективу цикловой комиссии преподавателей естественно-математических учебных дисциплин Минского государственного колледжа электроники – за внимательное прочтение рукописи и предложения по ее усовершенствованию.

Авторы надеются, что предлагаемое издание будет способствовать активизации мыслительной деятельности учащихся и повышению эффективности процесса обучения математике.

Все отзывы и пожелания просьба направлять по адресу: издательство «Вышэйшая школа», пр. Победителей, 11, 220004, Минск, e-mail: info@vshph.com

Авторы

1. ВВЕДЕНИЕ В КУРС МАТЕМАТИКИ

1.1. Высказывания. Типы теорем

Под ***простым высказыванием*** понимают утверждение (повествовательное предложение), в отношении которого можно сказать, истинно оно или ложно (но не то и другое вместе).

Высказывания обозначают прописными буквами латинского алфавита: A, B, C, ..., а их значения *истина* и *ложь* – соответственно «И» и «Л». ***Сложные высказывания*** получают из простых с помощью логических операций, к которым относятся отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквивалентность (эквиваленция).

Если A – высказывание, то ***отрицание высказывания*** A определяется как такое высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда высказывание A ложно. Отрицание высказывания A обозначается $\bar{A}$ (или $\neg A$); читается: «не A».

Истинность или ложность операции отрицания выражает истинностная таблица (табл. 1.1).

Таблица 1.1

A	$\bar{A}$
И	Л
Л	И

Конъюнкцией двух высказываний A, B называется такое высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания A, B истинны. Конъюнкция обозначается $A \wedge B$ (или $A \,\&\, B$); читается: «A и B». Конъюнкции соответствует истинностная таблица (табл. 1.2).

Таблица 1.2

A	B	$A \wedge B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

Дизъюнкцией двух высказываний A, B называется такое высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда оба высказывания A, B ложны. Дизъюнкция обозначается $A \vee B$; читается: «A или B». Союз «или» здесь употребляется в соединительном, а не в разделительном смысле, т.е. истинность высказывания $A \vee B$ имеет место в трех случаях: 1) только A – истина; 2) только B – истина; 3) и A, и B – истина. Дизъюнкции соответствует истинностная таблица (табл. 1.3).

Таблица 1.3

A	B	$A \vee B$
И	И	И
Л	И	И
И	Л	И
Л	Л	Л

Импликация высказываний A, B определяется как такое высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда высказывание A истинно, а высказывание B ложно. Импликация двух высказываний A, B обозначается $A \Rightarrow B$; читается: «если A, то B». Высказывание A называется *посылкой импликации*, а B – *заключением*. Импликации соответствует истинностная таблица (табл. 1.4).

Таблица 1.4

A	B	$A \Rightarrow B$
И	И	И
Л	И	И
И	Л	Л
Л	Л	И

Эквивалентность двух высказываний A, B определяется как высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда высказывания A, B оба истинны или оба ложны. Обозначается $A \Leftrightarrow B$; читается: «A тогда и только тогда, когда B». Эквивалентности соответствует истинностная таблица (табл. 1.5).

Таблица 1.5

A	B	$A \Leftrightarrow B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

Если теорема сформулирована в виде $A \Rightarrow B$, то она называется ***признаком*** или ***достаточным условием*** для B (A – достаточное условие выполнимости B), где A, B – некоторые высказывания. Теоремы такого вида называются также ***необходимым условием*** для A (B – необходимое условие выполнимости A).

Теорема типа $B \Rightarrow A$ называется ***обратной*** для теоремы $A \Rightarrow B$ (прямой).

Если теорема имеет вид $A \Leftrightarrow B$, то она называется ***критерием*** или ***необходимым и достаточным условиями*** (и для B, и для A). Теорема такого типа объединяет прямую и обратную теоремы.

Теорема типа $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ называется ***противоположной к обратной теореме***.

Высказывание $A \Rightarrow B$ истинно тогда и только тогда, когда истинно высказывание $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$. На этом факте основан *метод доказательства теорем от противоположного* (*от противного*).

Пример 1. Заданы высказывания:

A: «Число 7 больше числа 6»;

B: «Число 7 равно числу 6»;

C: «Сумма углов треугольника равна 180°».

Рассмотреть следующие высказывания и установить их значения (И или Л): $\overline{A}$, $A \vee B$, $A \wedge B$, $A \Rightarrow C$, $B \Leftrightarrow C$, $(A \vee C) \Rightarrow \overline{B}$.

Решение. Рассмотрим высказывание $\overline{A}$: «Число 7 не больше числа 6». Оно есть Л, так как A – И.

$A \vee B$: «Число 7 больше или равно числу 6». Это высказывание является дизъюнкцией высказываний A, B, где A – И, B – Л. Согласно табл. 1.3 оно есть И.

$A \wedge B$: «Число 7 больше и равно числу 6». Это конъюнкция высказываний, где A – И, B – Л. По табл. 1.2 оно есть Л.

$A \Rightarrow C$: «Если число 7 больше числа 6, то сумма углов треугольника равна 180°». Это импликация двух истинных высказываний, а потому оно есть И.

$B \Leftrightarrow C$: «Число 7 равно числу 6 тогда и только тогда, когда сумма углов треугольника равна 180°». Поскольку B – Л, C – И, то, согласно табл. 1.5, получаем, что $B \Leftrightarrow C$ есть Л.

$(A \vee C) \Rightarrow \overline{B}$: «Если число 7 больше числа 6 или сумма углов треугольника равна 180°, то число 7 не равно числу 6. Высказывание $A \vee C$ является И (по табл. 1.3 как дизъюнкция двух истинных высказываний). Высказывание $\overline{B}$ также есть И. Тогда рассматриваемая импликация по своему значению есть И.

Пример 2. Доказать истинность эквивалентности

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{A} \vee B). \qquad (1.1)$$

Решение. Для доказательства рассмотрим четыре возможных случая.

1. Пусть оба высказывания A, B есть истина. Тогда, согласно табл. 1.4, $A \Rightarrow B$ есть И. Поскольку B есть И, то по табл. 1.3 $\overline{A} \vee B$ есть И. Значит, высказывания в левой и правой частях истинны, т.е. эквивалентность также есть И.

2. Пусть A является истинным высказыванием, а B – ложным. Тогда импликация $A \Rightarrow B$ есть Л. В правой части эквивалентности (1.1) также имеем ложное высказывание, поскольку это дизъюнкция двух ложных высказываний. Следовательно, эквивалентность (1.1) является истиной.

3. Пусть A есть ложь, B – истина. Тогда $A \Rightarrow B$ есть И, $\overline{A} \vee B$ – И, а потому эквивалентность (1.1) является истиной.

4. Пусть оба высказывания A, B есть Л. Тогда $A \Rightarrow B$ есть И, $\overline{A} \vee B$ – И.

Мы доказали, что во всех возможных случаях исходных значений высказываний A, B эквивалентность (1.1) есть И.

Задания

I уровень

1.1. Определите, является ли предложение высказыванием, и установите его значение (истина или ложь):

1) «Пусть всегда будет солнце!»;

2) «Минск – столица Болгарии»;

3) «Число 7 больше числа 5»;

4) «Ты идешь сегодня в школу?»;

5) «Выражение x^2 принимает значения больше нуля или равно нулю»;

6) «Беларусь – европейская страна».

1.2. Определите тип высказывания (простое или сложное):

1) «Если сумма углов четырехугольника равна 360°, то четырехугольник является квадратом»;

2) «Квадрат является ромбом»;

3) «Треугольник является равносторонним тогда и только тогда, когда сумма двух сторон треугольника больше третьей стороны»;

4) «Если высота треугольника проведена к основанию и она является медианой, то треугольник – равнобедренный».

1.3. Даны высказывания:

A: «Диагонали четырехугольника равны»;

B: «Четырехугольник является прямоугольником».

Сформулируйте высказывание и установите его значение (И или Л):

1) $A \Rightarrow B$; 2) $B \Rightarrow A$; 3) $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$.

1.4. Определите тип теоремы:

1) «Если x_1, x_2 – корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$»;

2) «Окружность вписана в четырехугольник тогда и только тогда, когда суммы противоположных сторон четырехугольника равны».

II уровень

2.1. Даны высказывания, сформулированные для натуральных чисел:

A: «Число является четным»;

B: «Сумма цифр числа делится на 3»;

C: «Число делится на 6».

Сформулируйте сложное высказывание и установите его значение (И или Л):

1) $(A \wedge B) \Rightarrow C$; 2) $C \Leftrightarrow (A \wedge B)$.

2.2. Для теоремы «Если треугольник прямоугольный, то сумма квадратов двух его сторон равна квадрату наибольшей стороны» сформулируйте:

1) обратную;

2) противоположную;

3) противоположную к обратной;

4) необходимые и достаточные условия.

Определите значение (И или Л) сформулированных утверждений.

2.3. Приведите пример конкретных математических высказываний *A*, *B*, *C*, которые бы содержательно соответствовали высказыванию $(A \vee B) \Rightarrow C$ со значением И.

III уровень

3.1. Докажите, что высказывания $A \Rightarrow B$, $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ имеют одинаковые значения при всех возможных значениях высказываний A, B.

3.2. На вопрос, кто из трех студентов сдал экзамен на «отлично», был получен ответ: «Правда, что если сдал первый, то сдал и третий, но неправда, что если сдал второй, то сдал и третий». Определите, какой студент сдал экзамен на «отлично».

1.2. Множества и операции над ними. Числовые множества

Множество – неопределяемое первичное понятие. Обозначают множества прописными буквами латинского алфавита A, B, C, X, ... Под множеством понимают совокупность (группу, набор и т.д.) элементов, которые характеризуются одинаковыми свойствами.

Множества изображают *диаграммами* (*кругами*) *Эйлера – Венна* (рис. 1.1).

Если элемент a принадлежит множеству A, то пишут: $a \in A$; если элемент a не принадлежит множеству A, то пишут: $a \notin A$.

Множество может задаваться с указанием его элементов (например, $A = \{1, 3, 8\}$) или с указанием *характеристического свойства* (например, если B состоит из элементов x, для которых выполняется свойство $P(x)$, то пишут: $B = \{x \mid P(x)\}$).

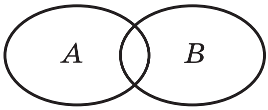
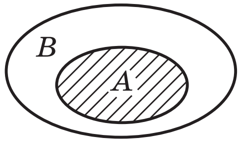


Рис. 1.1

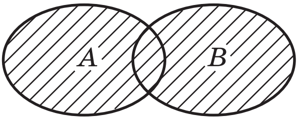


$A \subset B$

Рис. 1.2

Если каждый элемент множества A есть элемент множества B, то множество A называется *подмножеством множества B* (или говорят, что A включено в B). Пишут: $A \subset B$ (или $B \supset A$) (рис. 1.2). Два множества A, B называются *равными* ($A = B$), если они состоят из одних и тех же элементов: $A = B$ тогда и только тогда, когда $A \subset B$ и $B \subset A$. Если $A \subset B$ или $A = B$, то пишут: $A \subseteq B$. Множество, которое не имеет элементов, называется *пустым* и обозначается символом $\varnothing$.

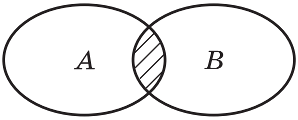
К основным операциям над множествами относят объединение, пересечение, разность, дополнение.



$A \cup B$

Рис. 1.3

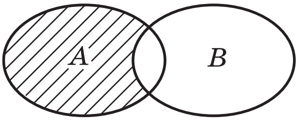
Объединением множеств A, B называется множество $A \cup B$, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат или множеству A, или множеству B (хотя бы одному из множеств A, B) (рис. 1.3).



$A \cap B$

Рис. 1.4

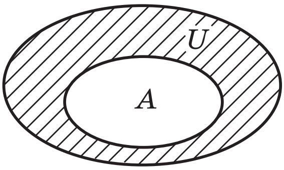
Пересечением множеств A, B называется множество $A \cap B$, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат и множеству A, и множеству B (рис. 1.4).



$A \setminus B$

Рис. 1.5

Разностью множеств $A \setminus B$ называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B (рис. 1.5).



$\overline{A}$

Рис. 1.6

Дополнением множества A до конкретного (универсального) множества U называется множество $\overline{A}$, которое определяется равенством $\overline{A} = U \setminus A$ (рис. 1.6).

Пусть $m(A)$, $m(B)$ – количество элементов множеств A и B соответственно, тогда справедлива формула

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B). \quad (1.2)$$

Числовые множества

$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ – ***множество натуральных чисел***.

$\mathbf{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ – ***множество целых чисел***.

$\mathbf{Q}$ – ***множество рациональных чисел***: это множество всех обыкновенных дробей, т.е. чисел вида $\dfrac{m}{n}$, где $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$.

Множество $\mathbf{Q}$ определяется также как множество всех бесконечных периодических десятичных дробей.

$\mathbf{I}$ – ***множество иррациональных чисел***: это множество всех бесконечных непериодических десятичных дробей.

$\mathbf{R}$ – ***множество действительных чисел***: $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}$.

Верны соотношения

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}, \quad \mathbf{I} \subset \mathbf{R}, \quad \mathbf{Q} \cap \mathbf{I} = \varnothing.$$

Произведение первых n натуральных чисел называется ***факториалом***, для него введен специальный символ:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n.$$

По определению принимают $0! = 1$.

Для всякого $x \in \mathbf{R}$ определены следующие понятия:

$[x]$ – ***целая часть*** (*антье*) ***числа*** x, определяется как целое число такое, что

$$[x] \leqslant x < [x] + 1;$$

$\{x\}$ – ***дробная часть*** (*мантисса*) ***числа*** x, определяется равенством

$$\{x\} = x - [x].$$

Модулем (*абсолютной величиной*) ***числа*** $x \in \mathbf{R}$ называется неотрицательное число:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Геометрическая интерпретация модуля: $|x - a|$ – это расстояние от точки a до точки x на координатной оси, в частности $|x|$ – это расстояние от точки 0 до точки x.

Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – некоторые действительные числа, то сумму этих величин обозначают с использованием ***знака суммы***:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

где k – *индекс суммирования*.

Свойства суммы

1. $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum\limits_{p=1}^{n} a_p$ – сумма не зависит от того, какой буквой обозначен индекс суммирования.

2. $\sum\limits_{k=1}^{n} (c \cdot a_k) = c \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, где $c = \text{const}$.

3. $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k.$

4. $\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=2}^{n+1}a_{k-1}=\sum_{k=0}^{n-1}a_{k+1}$ – свойство «сдвига» индекса суммирования.

Для доказательства истинности некоторого утверждения $A(n)$ при всех значениях натуральной переменной n, от которой оно зависит (начиная с n_0, $n_0 \in \mathbf{N}$), часто используют ***метод математической индукции***. Для этого необходимо сделать следующие три шага:

1) непосредственной проверкой убедиться в истинности $A(n_0)$;

2) допустить, что $A(k)$ истинно для любого $k \geqslant n_0$;

3) доказать, что $A(k+1)$ истинно для всех $k \in \mathbf{N}$, $k \geqslant n_0$.

Пример 1. На первом курсе учатся 200 студентов. Из них своевременно сдали зачет по математике 175 человек, по физике – 185 человек. Не сдали зачет ни по математике, ни по физике 10 человек. Определить, сколько студентов сдали оба зачета.

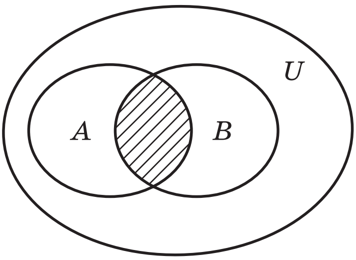


Рис. 1.7

Решение. Пусть U – множество всех студентов курса; A – множество студентов, которые сдали зачет по математике, B – по физике (рис. 1.7).

Согласно условию задачи $m(U)=200$, $m(A)=175$, $m(B)=185$, $m(U \setminus (A \cup B))=10$ и надо найти $m(A \cap B)$.

Находим, сколько человек сдали хотя бы один зачет:

$$m(A \cup B)=m(U)-m(U \setminus (A \cup B))=200-10=190.$$

Используем далее формулу (1.2), из которой выражаем

$$m(A \cap B)=m(A)+m(B)-m(A \cup B).$$

Получаем

$$m(A \cap B)=175+185-190=170.$$

Пример 2. Сократить дробь $\frac{(2n-1)!+(2n)!}{(2n+1)!}$.

Р е ш е н и е. Выделим общий множитель в числителе и знаменателе. Очевидно, что

$$(2n)! = 1 \cdot 2 \cdots (2n-1) \cdot 2n = (2n-1)!2n,$$

$$(2n+1)! = 1 \cdot 2 \cdots (2n-1) \cdot 2n(2n+1) = (2n-1)!(2n)(2n+1).$$

Поэтому

$$\frac{(2n-1)! + (2n)!}{(2n+1)!} = \frac{(2n-1)!(1+2n)}{(2n-1)!(2n)(2n+1)} = \frac{1}{2n}.$$

Пример 3. Вычислить сумму $\sum_{n=1}^{7} \frac{(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{(n-1)!}$.

Р е ш е н и е. Запишем последовательно слагаемые, придавая переменной n значения 1, 2, ..., 7:

$$\sum_{n=1}^{7} \frac{(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^{\left[\frac{1}{2}\right]}}{0!} + \frac{(-1)^{[1]}}{1!} + \frac{(-1)^{\left[\frac{3}{2}\right]}}{2!} + \frac{(-1)^{[2]}}{3!} + \frac{(-1)^{\left[\frac{5}{2}\right]}}{4!} + \frac{(-1)^{[3]}}{5!} +$$

$$+ \frac{(-1)^{\left[\frac{7}{2}\right]}}{6!} = \frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} + \frac{(-1)^1}{2!} + \frac{(-1)^2}{3!} + \frac{(-1)^2}{4!} + \frac{(-1)^3}{5!} + \frac{(-1)^3}{6!} =$$

$$= 1 - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} - \frac{1}{720}.$$

Вычисляя, приходим к ответу:

$$\sum_{n=1}^{7} \frac{(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{(n-1)!} = -\frac{217}{720}.$$

Пример 4. Доказать справедливость формулы

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2 \tag{1.3}$$

для любого $n \in \mathbf{N}$.

Р е ш е н и е. Используем метод математической индукции.

1. Проверяем справедливость равенства (1.3) при $n = 1$. Для этого в равенстве (1.3) полагаем $n = 1$, причем левая часть равенства будет состоять из одного слагаемого:

$$(2\cdot 1-1)=1^2,$$

т.е. $1=1$ выполняется.

2. Допускаем, что для $n=k$ утверждение (1.3) верно, т.е.

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2. \qquad (1.4)$$

3. Доказываем справедливость формулы (1.3) для $n=k+1$. Рассмотрим левую часть равенства (1.3) при $n=k+1$ и преобразуем ее:

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2(k+1)-1)=(1+3+5+\ldots+2k-1)+2k+1.$$

Используем далее тот факт, что выражение в последних скобках, согласно соотношению (1.4), равно k^2. В итоге получаем

$$k^2+2k+1=(k+1)^2.$$

Правая часть равенства (1.3) для $n=k+1$ имеет вид $(k+1)^2$. Очевидно, что левая и правая части равенства (1.3) при $n=k+1$ равны.

Так как все три шага математической индукции реализованы, формула (1.3) верна для любого $n\in\mathbf{N}$.

Задания

I уровень

1.1. Пусть $A=[-2,3]$, $B=(-\infty,0)$, $C=[0,4)$. Покажите эти множества на числовой оси и найдите множество:

1) $A\cup B$; 2) $A\cap B$; 3) $B\cup C$;

4) $(A\cup B)\cap C$; 5) $A\cup(B\cap C)$; 6) $B\setminus(A\cup C)$.

1.2. Пусть A – множество натуральных делителей числа 15, B – множество простых чисел, меньших числа 10, C – множество четных чисел, меньших числа 9. Найдите множество:

1) $A\cup B$; 2) $A\cap B$; 3) $B\cap C$;

4) $(A\cup C)\cap B$; 5) $A\cup(C\cap B)$; 6) $A\cap B\cap C$.

1.3. В группе учатся 28 студентов, каждый из которых умеет кататься на лыжах или коньках. При этом 20 человек умеют кататься на лыжах, 15 человек – на коньках. Определите, сколько студентов умеют кататься и на лыжах, и на коньках.

ОГЛАВЛЕНИЕ