СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

*Если бы мне пришлось начать вновь свое обучение, то я последовал бы совету Платона и принялся бы сперва за математику**.

Галилео Галилей

Английский биолог и популяризатор науки Ричард Докинз заметил однажды, что никто и никогда не признается с гордостью в невежестве и необразованности по части литературы, но неосведомленность в точных науках, ярче всего воплощающаяся в абсолютном незнании математики, вовсе не считается чем-то постыдным. Докинз заметил это обстоятельство не первым: он и сам указывает, что это утверждение давно превратилось в клише.

Это, разумеется, истинная правда. Никто не станет хвалиться, что никогда не читал книг, не видел ни одного произведения искусства, никогда — ни разу в жизни — не был растроган музыкой. Если провести опрос, я совершенно уверен, что не най-

* «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки». День первый. (Пер. С. Н. Долгова.) Здесь и далее цит. по: *Галилей Г.* Избранные произведения: В 2 т. М.: Наука, 1964. Т. 2.

дется ни одного образованного взрослого человека, никогда не слыхавшего о Шекспире, Рембрандте или Бахе. По всей вероятности, участники такого опроса знали бы и имена великих математиков Пифагора, Исаака Ньютона и Альберта Эйнштейна. Но многие ли слышали о Леонарде Эйлере, Сринивасе Рамануджане или Георге Канторе?

Возможно, в этот самый момент вы тоже спрашиваете себя: «Что? Кто это такие? Их имена ни о чем мне не говорят».

Это великие математики. Величайшие математики!

Я всерьез увлекаюсь музыкой, литературой и изобразительным искусством, но искренне считаю, что математические формулы Рамануджана — такое же чудо, как музыкальные построения Баха, а открытия Кантора, касающиеся бесконечности, кажутся мне не менее поразительными, чем произведения Шекспира.

И раз уж мы сравниваем гениев художественного творчества с гениями математики, я хотел бы отметить, что Кантор был специалистом по творчеству Шекспира, а Эйнштейн — прекрасным пианистом и скрипачом. Такое встречается очень часто, и я знаю много математиков, чрезвычайно хорошо знающих литературу, искусство и музыку.

Более того, немецкий математик Карл Вейерштрасс сказал как-то, что математик, в котором нет ничего от поэта, не может быть хорошим математиком. Однако создается впечатление, что этот принцип не действует в обратном направлении: многие из тех, кто работает в области литературы, музыки или изобразительного искусства, по-видимому, испытывают неприязнь к математике.

В чем тут дело? Почему столь многие люди, какими бы образованными они ни были, чураются замысловатости и красоты, которые можно найти в мире чисел и их связях друг с другом?

Возможно, главная причина заключается в неприступности математики и тех трудностях, с которыми сталкиваются желающие познать ее. Действительно, математика весьма сложна, и, чтобы разобраться в ее хитросплетениях, необходимо затратить время и приложить умственные усилия — но и за особо изысканными жемчужинами иногда приходится нырять до самых недоступных глубин.

Мысль написать эту книгу явилась мне однажды, когда я перебирал свою математическую библиотеку. Я заметил, что мои сочинения по большей части относятся к одной из двух категорий:

1. Математические книги, написанные для неспециалистов. Некоторые из них совершенно замечательны, но они в большей степени посвящены рассказам о математике, чем самой математике.

2. Математические книги, написанные для математиков. В этой категории тоже есть множество превосходных работ, но прочесть (и понять) их могут только математики.

Поэтому я решил написать книгу, которая относилась бы еще к одной, третьей категории. Я расскажу читателю-неспециалисту просто и ясно о двух математических теориях, которые считаю самыми завораживающими, — теории чисел и теории множеств, и каждая из них имеет отношение к бесконечности. Вместе с этим я предложу стратегии математического мышления, позволяющие читателю испытать свои способности к решению поистине увлекательных математических задач.

Для меня важно, чтобы эту книгу мог с удовольствием читать любой человек, достаточно любознательный и стремящийся время от времени поработать головой. Поэтому я воздержался от использования любых устрашающих математических символов (нигде в этой книге вы не найдете никаких $\nabla f(x_1, \ldots, x_n)$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\iiint$ или $\lim\limits_{x\to\infty}$). Применяются только базовые математические операции (сложение, вычитание, умножение и деление, плюс несколько операций посложнее, вроде возведения в степень и извлечения корня). Кроме того, я как мог старался сделать текст занимательным: на самом деле никто не любит задач о трех трубах, которые наполняют бассейн, и еще двух, которые (по никому не известным причинам) одновременно с этим пытаются его осушить.

Комментарии к книге, ответы на вопросы и вопросы о вопросах можно присылать по адресу shapirapiano@gmail.com. Желаю вам увлекательного путешествия!

Разминка

КРАТКОЕ ВВЕДЕНИЕ В РАЗМЫШЛЕНИЯ

Размышления: разговор души с самой собой.

Платон

Если вы не поленились и прочитали предисловие, вы уже знаете, что у меня есть довольно солидная коллекция книг по математике. Одно из моих любимых занятий — возиться с интересными задачами. Ну, *для меня-то* это естественно. Я этому и учился. Но чтобы увидеть красоту и изящество математики, необязательно заканчивать математический факультет. Если вам хватает терпения немного подумать, вы найдете тысячи интересных — и иногда весьма знаменитых — математических задач и парадоксов, которыми уже много веков восхищается стар и млад. Стоит приложить немного усилий, и почти кто угодно сможет испытать тот восторг, в который приводит способность решать головоломки, кажущиеся на первый взгляд чрезвычайно сложными.

В этом разделе я представлю скромный набор математических задач из числа моих любимых, от довольно простых до весьма глубоких и даже предположительно неразрешимых (а если вы их все-таки решите, вас ждет премия). Я хочу познакомить вас, мой уважаемый читатель, хотя бы с немногими образцами интереснейших размышлений, которые вы можете найти в поразительном мире математики.

Великое маленькое исследование — открытая проблема

Много лет назад я прочитал удостоенную Пулитцеровской премии книгу Дугласа Р. Хофштадтера «Гёдель, Эшер, Бах». Сам автор называет ее «метафорической фугой о разумах и машинах в духе Льюиса Кэрролла». Она рассказывает о самых разнообразных предметах из царств математики, музыки, симметрии, искусственного интеллекта и логики и содержит множество математических загадок. Я хотел бы познакомить вас с одной из них.

Возьмем любое число — точнее, любое целое или натуральное число. Ахилл (он же Ахиллес — тот самый, у которого были проблемы с пяткой), также ставший одним из персонажей книги Хофштадтера, задумал число 15. Вы, разумеется, можете выбрать любое число по своему вкусу.

Теперь сделаем вот что: если это число четное, разделим его на 2. Если оно нечетное, умножим его на 3 и прибавим 1. Будем повторять эту процедуру снова и снова, пока не получим (если получим) число 1. Посмотрим, как это работает:

Поскольку 15 — число нечетное, умножим его на 3 и прибавим 1.

$15 \times 3 + 1$ дает 46.

46 — число четное: разделим его на 2 и получим 23. Поскольку это число нечетное, умножим его на 3 и прибавим 1.

$23 \times 3 + 1 = 70$

Продолжим этот процесс:

$70/2 = 35$;

$35 \times 3 + 1 = 106$;

$106/2 = 53$;

$53 \times 3 + 1 = 160$;

$160/2 = 80$;

$80/2 = 40$;

$40/2 = 20$;

$20/2 = 10$;

$10/2 = 5$;

$5 \times 3 + 1 = 16$;

$16/2 = 8$;

$8/2 = 4$;

$4/2 = 2$, и наконец $2/2 = 1$.

Процесс дошел до конца.

Спрашивается, правда ли, что эта процедура рано или поздно приводит к 1 для *любого* исходного числа?

Попробуйте подставить в нее пару других чисел. Для некоторых из них этот процесс может оказаться чрезвычайно долгим, и вам, возможно, понадобится очень большой лист бумаги. Если вы попытаетесь запустить этот процесс на компьютере, имейте в виду — вычисления могут затянуться.

Хофштадтер предложил Ахиллесу попробовать число 27. Вы можете последовать его примеру. Я дам вам пару минут… или, может быть, часов.

Сдаетесь? Если начать с 27, кажется, что процесс все продолжается и продолжается и дает нескончаемую цепочку вычислений. В какой-то момент вы можете решить, что она и впрямь никогда не закончится. На самом деле требуемое в этом случае число шагов равно 111.

В своей книге Хофштадтер предостерегает Ахиллеса относительно попыток найти ответ на заданный выше вопрос (действительно ли из любого числа можно получить 1?) и рассказывает, что эта задача известна под названием «гипотеза Коллатца» (напомню на всякий случай, что «гипотеза» значит «догадка» или, точнее, «предложение возможной новой теоремы, которую еще нужно доказать»). Она утверждает, что, с какого бы числа мы ни начали описанный выше процесс, он рано или поздно приведет к 1. Эта гипотеза названа в честь немецкого математика Лотара Коллатца (1910–1990), впервые описавшего ее в 1937 г. Тем не менее у нее есть и другие названия: в частности, ее называют гипотезой Улама (по имени польского математика Станислава Улама) или задачей Какутани (по имени японского математика Сидзуо Какутани). Иногда говорят просто о гипотезе $3n + 1$, что вполне логично.

Когда я впервые узнал о гипотезе $3n + 1$, я был слишком молод, чтобы осознать, насколько сложна и глубока эта задача. Я предполагал, что мне понадобится всего несколько дней, чтобы придумать критерий, определяющий, для каких чисел эта процедура дает на последнем шаге 1. Мне казалось даже, что я сумею доказать истинность гипотезы — что любое число в конце концов приводит к 1. Возможно, занимаясь этим, я даже смогу открыть распределение числа шагов, необходимого для каждого конкретного числа (например, когда мы подставили число 15, количество шагов оказалось равным 17). Я не мог понять только одного: как так получилось, что никто до сих пор не сумел решить эту задачу.

Во всяком случае, так я думал…

По-видимому, существует веская причина, по которой эта задача все еще считается «открытой проблемой».

Хотя успеха я не добился, это меня не слишком расстроило. Я нахожу трудные вопросы очень привлекательными. Они заставляют размышлять.

На самом деле я даже больше люблю задачи, которые не могу решить (или по меньшей мере не могу решить без труда), чем те, которые решаются в момент и без особых интеллектуальных усилий. Разумеется, это не значит, что я оказываюсь на вершине блаженства, когда не могу справиться с какой-нибудь проблемой — несомненно, решение непростой задачи, доставшееся ценой большого труда, доставляет гораздо больше удовольствия.

Вернемся, однако, к нашей гипотезе. Посмотрите, что тут происходит. Мы столкнулись с математической задачей, в которой используются только базовые арифметические операции — сложение, умножение и деление, — и тем не менее *никто на свете не знает, как ее решить!*

Как такое может быть? Можно было бы предположить, что задача, которую можно сформулировать таким простым образом, должна иметь простое решение. Не тут-то было! На простой вопрос не всегда есть простой ответ. В математике есть множество вопросов, которые можно задать маленькому ребенку, и он легко поймет, в чем состоит задача, но ответов на них до сих пор не нашли даже самые гениальные взрослые.

Если рассмотреть достаточное количество примеров задачи Коллатца, можно заметить одно обстоятельство: последние числа, появляющиеся в этом процессе представляют собой последовательно уменьшающиеся степени 2. Например, если начать с 15, то последние пять чисел последовательности — это 16, 8, 4, 2 и, наконец, 1.

Это явление можно сформулировать в виде правила, сказав, что если процесс доходит до числа вида 2^n, то он гарантированно сойдется к 1 в точности через n делений на 2. Это наблюдение позволяет перефразировать гипотезу $3n + 1$ следующим образом: приходит ли на каком-то этапе процесс, начатый с любого произвольного числа, к степени 2?

Принцип замены исходной задачи на другую называется приведением или упрощением. Этот метод — полезный математический инструмент; в некотором смысле он открывает более естественный путь к решению математических задач. Еще одна, похожая, стратегия решения задач — это рассуждения в обратном порядке (от конца к началу). Этот прием, возможно, знаком вам по лабиринтам. Когда разрабатываешь маршрут по лабиринту, иногда бывает удобнее начать от выхода и прокладывать путь к исходной точке. В некотором глубоком смысле можно сказать, что в том же состоит и метод приведения математической задачи.

Венгерский математик Пал Эрдёш (1913–1996) любил предлагать денежные призы за успешное решение интересовавших его открытых математических проблем. Призы эти начинались с 25 долларов, а доказательство гипотезы Коллатца стоило в его прейскуранте целых 500 долларов — то есть попадало в категорию весьма дорогих задач, хотя сам Эрдёш говорил, что мир математики, возможно, не готов к таким сложным и запутанным задачам, как гипотеза $3n + 1$. Эрдёша уже нет с нами, но можно не беспокоиться: выплату призов взял на себя его коллега Рон Грэм. Если вам удастся решить эту задачу, вы можете получить приз одним из двух способов: либо в виде чека, который сам Эрдёш выписал перед смертью (его можно только вставить в рамку: срок действия этого чека давно истек), либо реальными деньгами (выбор между грехом гордыни и грехом сребролюбия).

К слову, а также потому, что я хотел бы поделиться этим интересным фактом, самое большое число, когда-либо использованное в математическом доказательстве, названо в честь этого же самого Рона Грэма. Число это настолько велико, что его невозможно записать в стандартной математической нотации.

> *Мудрость — это знать, что не знаешь того, чего не знаешь, и знаешь то, что знаешь. Глупость — это думать, что знаешь то, чего не знаешь, или не знаешь того, что знаешь.*
>
> Китайская пословица