УДК 373:51
ББК 22.1я721
М64

**Мирошин, Владимир Васильевич.**
М64 ЕГЭ 2021. Математика : решение задач / В. В. Мирошин, А. Р. Рязановский. — Москва : Эксмо, 2020. — 496 с. — (ЕГЭ. Сдаём без проблем).

ISBN 978-5-04-112807-4

Издание предназначено для подготовки учащихся к ЕГЭ по математике.

Пособие содержит полезную информацию для решения задач профильного уровня, основные понятия, определения, формулы, а также подробные решения более 500 задач. С помощью данного пособия учащийся сможет научиться решать задачи разного уровня сложности.

Издание окажет помощь учащимся не только при подготовке к ЕГЭ, но и к дополнительным вступительным испытаниям по математике, а также может быть использовано учителями при организации учебного процесса.

**УДК 373:51**
**ББК 22.1я721**

**ISBN 978-5-04-112807-4**

# Введение

Данная книга адресована в первую очередь тем, кто желает успешно подготовиться к *вступительным экзаменам* в вуз и к *единому государственному экзамену* (ЕГЭ) по математике и получить высокие баллы. Поскольку ЕГЭ — это не только выпускной школьный экзамен, но и вузовский вступительный экзамен, предусматривающий проверку знаний по всему школьному курсу, в пособие включены задачи и краткие справочные материалы по всему курсу математики: как по арифметике и алгебре для 7—11 классов, так и по курсу начал анализа 10—11 классов. При этом мы хотели, не перегружая пособие излишними подробностями, а тем более — теоретическими выкладками и доказательствами, сосредоточить внимание на решении задач и в первую очередь на решении задач повышенной сложности.

Пособие включает восемь глав. Каждая глава начинается с краткого перечисления некоторых теоретических сведений с краткими комментариями, позволяющими вспомнить соответствующий материал. Затем приводятся примеры решения задач различного уровня сложности и упражнения, позволяющие лучше понять и запомнить рассмотренные способы решения задач. Заканчивается каждая глава набором задач для самостоятельного решения. Эти задания взяты из различных сборников и из разрешенных для публикации (открытых) вариантов ЕГЭ.

Как рекомендуется работать с пособием? Сначала внимательно прочтите и изучите теоретическое введение к данной теме. Изложение теории сопровождается иллюстрирующими примерами и задачами. Прочитав задачу, попытайтесь решить ее самостоятельно, не заглядывая в решение, предложенное в пособии. Не исключено, что ваше решение может оказаться более рациональным или оригинальным. Если же все ваши попытки окажутся безуспешными, посмотрите начало решения, указанного в пособии. Не исключено, что вам будет достаточно какой-то начальной идеи, чтобы завершить решение задачи самостоятельно. И только если и в этом случае задачу решить не удастся, ознакомьтесь с ее полным решением, предложенным в пособии. После этого *обязательно перерешайте задачу* от начала и до конца.

Мы уверены, что пособие поможет вам успешно сдать вступительные экзамены и поступить в вуз.

***Желаем успеха!***

# ГЛАВА 1

## ЧИСЛА. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ, ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

### § 1. Основные понятия и определения

Основным числовым множеством, которое изучается в школе, является множество $R$ *действительных чисел*. Любое число $x \in R$ является или *рациональным*, или *иррациональным* числом. Таким образом, множество действительных чисел есть объединение двух множеств: множества $Q$ рациональных чисел и множества $\bar{Q}$ иррациональных чисел: $R = Q \cup \bar{Q}$. Действительные числа удобно изображать в виде точек числовой прямой. При этом каждая точка числовой прямой изображает некоторое действительное число, и наоборот, каждое действительное число представляется некоторой точкой числовой прямой. Причем различным точкам соответствуют различные действительные числа.

Множество чисел $x$, удовлетворяющих неравенству $a \le x \le b$, называется *отрезком* и обозначается $[a;\ b]$. Множество чисел $x$, удовлетворяющих неравенству $a < x \le b$ или $a \le x < b$, называется *полуинтервалом* и обозначается соответственно $(a;\ b]$ и $[a;\ b)$. Множество чисел $x$, удовлетворяющих неравенству $a < x < b$, называется *интервалом* и обозначается $(a;\ b)$. Каждое из указанных множеств называется промежутком и может быть (в общем случае) обозначено $\langle a; b \rangle$.

Каждое рациональное число $r \in Q$ можно представить в виде отношения целого числа $m$ к натуральному числу $n$: $r = \frac{m}{n}$, где $n \in N = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$, $m \in Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n, \ldots\}$. Таким образом, каждое натуральное число, нуль и любое целое отрицательное число являются рациональными, поскольку $n = \frac{n}{1}$, $0 = \frac{0}{1}$ и $-n = \frac{-n}{1}$. Рациональными числами являются, очевидно, все обыкновенные и конечные десятичные дроби, а также, что уже менее очевидно, все бесконечные периодические десятичные дроби. Действительно, если считать правило сложения «столбиком» верным и для бесконечного числа десятичных дробей, т.е. считать верным, например, следующее равенство:

$$0,(1)=0,1111\ldots1\ldots=0,1+0,001+\ldots+0,\overbrace{000\ldots0}^{(n-1)\,нуль}1+\ldots,$$

то, воспользовавшись формулой для суммы бесконечной геометрической прогрессии $S=\dfrac{a_1}{1-q}$ со знаменателем $q=0,1$ и первым членом $a_1=0,1$, получим $0,(1)=\dfrac{0,1}{1-0,1}=\dfrac{0,1}{0,9}=\dfrac{1}{9}$.

Аналогично можно показать, что для любой чистой периодической десятичной дроби $0,(a_1a_2\ldots a_n)$, дробная часть которой содержит только повторяющуюся группу цифр (период) $\overline{a_1,\ a_2\ldots a_n}$, справедлива следующая **формула записи чистой периодической десятичной дроби в виде обыкновенной дроби:**

$$0,(a_1a_2\ldots a_n)=\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_n}}{\underbrace{99\ldots9}_{n\ девяток}}.$$

Например, $0,(1)=\dfrac{1}{9}$; $0,(2)=\dfrac{2}{9}$; $0,(9)=\dfrac{9}{9}=1$; $0,(17)=\dfrac{17}{99}$; $0,(1323)=\dfrac{1323}{9999}=\dfrac{147}{1111}$.

В случае смешанной периодической дроби поступают следующим образом:

$$0,78(1323)=\frac{78,(1323)}{100}=\frac{78+0,(1323)}{100}=\frac{78+\dfrac{1323}{9999}}{100}.$$

Выполнив сложение, получим $0,78(1323)=\dfrac{781245}{999900}$.

Число $\alpha\in\overline{Q}$, которое нельзя представить в виде отношения целых чисел, называется иррациональным числом. Отсюда следует, что **любое иррациональное число записывается в виде бесконечной непериодической десятичной дроби.** Но бесконечное число десятичных знаков записать невозможно! Поэтому для иррациональных чисел выбирают специальные обозначения в виде символов или букв. Например, иррациональными являются следующие числа $\sqrt{17}$; $\sqrt[14]{15}$; $5^{6,3}$; $\log_7 10$; $\sin\frac{\pi}{5}$, при записи которых использованы символы $\sqrt[n]{\ }$, $\log_a$; sin. Иррациональными являются, например, числа $\pi = 3{,}1415...$ и $e = 2{,}718281828...$ .

Замечательным свойством действительных чисел, и в частности рациональных чисел, является тот факт, что рациональные числа расположены «между» действительными числами весьма плотно: *между любыми двумя действительными числами расположено бесконечно много рациональных чисел.*

**Пример 1.** Среди всех обыкновенных несократимых дробей $\frac{m}{n}$, $m$, $n \in N$, лежащих между дробями а) $\frac{1}{2}$ и —; б) $\frac{16}{21}$ и $\frac{17}{21}$; в) $\frac{5}{17}$ и $\frac{1}{3}$, найдите такую дробь, которая имеет наименьший знаменатель.

*Решение,* а) Пусть $\frac{1}{2} < \frac{m}{n} < \frac{1}{3}$. Тогда $3n < 6m < 4n$. Таким образом, на интервале $(3n;\ 4n)$ требуется найти наименьшее кратное 6. При $n = 1$; 2; 3; 4 интервал $(3n;\ 4n)$ не содержит кратных 6. При $n = 5$ интервал $(3n;\ 4n)$ имеет вид (15; 20), на котором лежит только одно число, кратное 6, а именно: $18 = 63$, т.е. $m = 3$. Таким образом, условию задачи удовлетворяет дробь $\frac{3}{5}$.

Задания б) и в) решите самостоятельно. Вы получите б) $\frac{16}{21} < \frac{4}{5} < \frac{17}{21}$; в) $\frac{5}{17} < \frac{3}{10} < \frac{1}{3}$.

**Пример 2.** При каком значении параметра $a$ на интервале $(5 - 2a;\ 2a + 7)$ лежит ровно 101 целое число?

*Решение.* При любом $a$ серединой интервала $(5 - 2a;$ $2a + 7)$ является число $x_0 = \frac{(5-2a)+(2a+7)}{2} = 6$. Следовательно, чтобы на интервале $(5 - 2a;\ 2a + 7)$ лежало ровно 101 целое число, необходимо и достаточно, чтобы в правой полуокрестности точки 6 лежало ровно 50 натуральных чисел, что равносильно неравенству:

$$56 < 2a + 7 \leq 57 \Leftrightarrow 24{,}5 < a \leq 25.$$

Итак, условию задачи удовлетворяют только те $a$, для которых $24{,}5 < a \leq 25$.

Для натуральных чисел справедлива **основная теорема арифметики:**

Каждое натуральное число $n$, большее 1, может быть представлено в виде произведения простых чисел, причем такое представление единственно с точностью до порядка сомножителей, т.е.

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_k,$$

где $p_1$, $p_2$, $p_3$, ... $p_k$ — простые числа. Напомним, что натуральное число $p > 1$ называется **простым числом,** если оно имеет только два натуральных делителя: 1 и $p$. Натуральное число $p > 1$, не являющееся простым, называется **составным числом.** Множество простых чисел — бесконечное множество.

**Пример 3.** Решите уравнение $x^2 - px + q = 0$, где $p$, $q$ — простые числа, если один корень этого уравнения также является простым числом.

*Решение.* Пусть $x$ — простой корень данного уравнения. Тогда $x \neq 0$ и данное уравнение равносильно уравнению $x = p - \frac{q}{x}$. Отсюда следует, что число $\frac{q}{x}$ — целое. Значит, число $x$ — делитель числа $q$. По условию $x$ и $q$ — простые числа, а число 1 не является простым числом. Следовательно, $x = q$. Подставляя $x = q$ в данное уравнение, находим $q = p - 1$. Существует только два простых числа, разность между которыми равна 1. Это числа 3 и 2. Итак, данное уравнение имеет вид $x^2 - 3x + 2 = 0$, а его корни 1 и 2.

На множестве $Z = \{0; \pm 1; \pm 2; \ldots\}$ целых чисел определена особая операция: **деление с остатком.** Справедлива теорема:

Для любых целых чисел $a$ и $b$ существуют единственные целое число $c$ и целое неотрицательное число $r$ такие, что $a = bc + r$, причем $0 \leq r < |b|$.

При $r > 0$ число $c$ называется **неполным частным** от деления $a$ на $b$; при $r=0$ число $c$ есть **частное** от деления $a$ на $b$; $b$ — **делитель** $a$; $a$ — **кратное** $b$. Говорят также, что **число *b* делит число *a*.** Записывают это так: $b|a$ или, что то же самое, **число *a* делится на *b*:** $a \vdots b$. Из определения делимости натуральных чисел следует, что если $b|a$, то $1 \le b \le a$. Поэтому число натуральных делителей натурального числа $a$ конечно. Например, число 28 имеет ровно шесть натуральных делителей, а именно: 1; 2; 4; 7; 14; 28.

**Пример 4.** Определите последнюю цифру числа $3^{4567}$.

*Решение*. Посмотрим на неотрицательные целые степени числа 3: $3^0=1$, $3^1=3$, $3^2=9$, $3^3=27$, $3^4=81$, $3^5=243$, ... Мы видим, что последние цифры этих степеней образуют периодическую последовательность цифр: 1; 3; 9; 7; 1; 3; 9; 7; 1; 3; 9; 7; ... . Период этой последовательности равен 4. Поскольку $4567=1141\cdot 4 + 3$, то последней цифрой данной степени является число 7.

При решении задач на натуральные числа полезны следующие понятия.

**1. Наибольший общий делитель натуральных чисел *a* и *b*: НОД(*a*; b).**

**2. Наименьшее общее кратное натуральных чисел *a* и *b*: НОК[*a*; *b*].**

Смысл этих понятий ясен из их названий. Например, НОД(12; 32)$=$4. Действительно, общими делителями чисел 12 и 32 являются числа 1; 2; 4. Других общих делителей эти числа не имеют. Из всех общих делителей 1; 2; 4 чисел 12 и 32 наибольшим является число 4. Поэтому наибольшим общим делителем 12 и 32 является число 4. В общем случае, если требуется найти наибольший общий делитель НОД($a$; $b$) двух натуральных чисел, можно использовать их разложения на простые множители или воспользоваться **алгоритмом Евклида.** В нашем случае алгоритм Евклида выглядит следующей цепочкой равенств:

$$32=122 + 8;\ 12=81 + 4;\ 8=42.$$

Последний ненулевой остаток, равный в данном случае 4, и является НОД(12; 32).

Второй пример. Найдем НОК[12; 32]. Для этого разложим числа 12 и 32 в произведение простых сомножителей: $12 = 2^2 \cdot 3$; $32 = 2^5$. Ясно, чтобы натуральное число $k$ было общим кратным чисел 12 и 32, т.е. чтобы $k$ делилось на 12 и на 32, необходимо и достаточно, чтобы $k = 2^2 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot m$, где $m \in N$. Отсюда при $m = 1$ получим наименьшее общее кратное чисел 12 и 32. Поэтому НОК[12; 32] $= 96$.

В общем случае для нахождения наименьшего общего кратного НОК[$a$; $b$] двух натуральных чисел $a$ и $b$, где $a \geq b$, обычно сначала с помощью алгоритма Евклида находят НОД($a$; $b$), а затем используют равенство НОК[$a$; $b$] НОД($a$; $b$) $= ab$. В нашем случае

$$\text{НОК}[12;\ 32] = \frac{12 \cdot 32}{\text{НОД}(12;\ 32)} = \frac{12 \cdot 32}{4} = 96.$$

Получили тот же самый результат.

Наибольший общий делитель НОД($a$; $b$) натуральных чисел $a$ и $b$, где $a > b$, обладает некоторыми полезными свойствами. Отметим наиболее очевидные.

1. $\text{НОД}(a;\ b) = \text{НОД}(ka;\ kb),\ k \in N$;
2. $\text{НОД}\left(\frac{a}{k};\ \frac{b}{k}\right) = \frac{\text{НОД}(a;b)}{k}$;
3. $\text{НОД}(a;\ b) = \text{НОД}(a;\ a \pm b)$.

**Пример 5.** Целые числа $m$ и $n$ не имеют общих делителей, отличных от 1 и –1. Является ли дробь $\frac{5m - 3n}{2m + 5n}$ сократимой при некоторых натуральных $m$ и $n$?

*Решение.*

Пусть

$$d = \text{НОД}(5m - 3n;\ 2m + 5n) > 1.$$

Тогда справедливы равенства

$$\begin{cases} 5m - 3n = dk, \\ 2m + 5n = ds, \end{cases}$$

где числа $k$ и $s$ взаимно просты. Значит, дробь можно сократить только на один из делителей числа $d$, отличный от 1. Запишем $m = \frac{5k + 3s}{31} d$, $n = \frac{5s - 2k}{31} d$. Отсюда $d = 31q$.

Можно рассуждать иначе. Запишем дробь в виде

$$\frac{5m-3n}{2m+5n}=2+\frac{1}{\frac{2m+5n}{m-13n}}=2+\frac{1}{2+\frac{31n}{m-13n}} \quad (\text{при } m-13n\neq 0).$$

Данная дробь сократима тогда и только тогда, когда сократима дробь $\frac{31n}{m-13n}$. Но числа $m$ и $n$ не имеют общих делителей, поэтому дробь может быть сокращена на число 31 или на кратное ему. Например, при $m=23$, $n=-3$ получаем дробь $\frac{5m-3n}{2m+5n}=\frac{5\cdot 23+9}{2\cdot 23-15}=\frac{124}{31}$, которая сократима на 31.

При решении различных задач повышенной сложности нередко типичной проблемой является **сравнение чисел.** Напомним, что сравнение рациональных чисел осуществляется с помощью определения:

$$\frac{a}{b}<\frac{m}{n}\xrightarrow{\text{опр.}}an<bm\,.$$

В других случаях помогает свойство транзитивности неравенств:

$$\frac{a}{b}>\alpha,\alpha>\frac{m}{n}\Rightarrow\frac{a}{b}>\frac{m}{n}\,.$$

При сравнении дробей полезны следующие теоремы.

**Теорема.**

*Если числитель и знаменатель дроби положительны, то при их увеличении на одно и то же число неправильная дробь уменьшается, а правильная увеличивается, другими словами:*

если $a>b>0$ и $c>0$, то $\frac{a}{b}>\frac{a+c}{b+c}$ и $\frac{b}{a}<\frac{b+c}{a+c}$.

**Пример 6.** Сравните числа $\frac{1222333}{1333222}$ и $\frac{2222333}{2333222}$.

*Решение*. Использовать для сравнения приведенное выше определение не хочется. Придется перемножать семизначные числа! Используя теорему, заметив, что поскольку дробь $\frac{1222333}{1333222}$ правильная и $\frac{2222333}{2333222}=\frac{1222333+1000000}{1333222+1000000}$, то $\frac{1222333}{1333222}<\frac{2222333}{2333222}$.

При сравнении чисел, имеющих вид степени (или выражения с радикалами), используют теоремы, выражающие свойства степеней и радикалов.

**Теорема.**

Если $a>0$, $b>0$, то $a>b \Leftrightarrow a^{\beta}>b^{\beta}$, где $\beta$ — положительное число.

**Теорема.**

Если $a>1$ и $\alpha>\beta$, то $a^{\alpha}>a^{\beta}$; если $0<a<1$ и $\alpha>\beta$, то $a^{\alpha}<a^{\beta}$.

**Теорема.**

Если $a \geq b \geq 0$, то $\sqrt[n]{a^m} \geq \sqrt[n]{b^m}$, где $n$, $m$ — натуральные числа.

**Пример 7.** Сравните числа $2^{300}$ и $3^{200}$.

*Решение*. Поскольку $2^{300}=(2^3)^{100}$, а $3^{200}=(3^2)^{100}$, и $2^3<3^2$, то $2^{300}<3^{200}$.

**Пример 8.** Сравните числа $2^{\sqrt{3}}$ *и* $3^{\sqrt{2}}$.

*Решение*. Здесь более сложный случай. По свойству степеней с основанием, большим 1, имеем $3^{\sqrt{2}}>3^{1,4}$, а $2^{\sqrt{3}}<2^2$. Сравним теперь числа $3^{1,4}=(3^{0,7})^2$ и $2^2$. Для этого достаточно сравнить $3^{0,7}$ и 2 или $(3^{0,7})^{10}$ и $2^{10}$. Но $(3^{0,7})^{10}=3^7=2187$, а $2^{10}=1024$. Теперь получаем цепочку неравенств:

$$1024<2187 \Leftrightarrow 2^{10}<3^7 \Leftrightarrow 2<3^{0,7} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^2<3^{1,4} \Leftrightarrow 2^{\sqrt{3}}<2^2<3^{1,4}<3^{\sqrt{2}}.$$

**Пример 9.** Сравните числа $\sqrt[5]{5}$ и $\sqrt[6]{6}$.

*Решение*. Воспользуемся следующим свойством радикалов: если $a>0$, то $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n\cdot k]{a^k}$, где $n$, $k$ — натуральные числа.

Получим $\sqrt[5]{5}=\sqrt[30]{5^6}$ и $\sqrt[6]{6}=\sqrt[30]{6^5}$. Теперь достаточно сравнить степени $5^6$ и $6^5$. Оценим их отношение:

$$\frac{5^6}{6^5}=\frac{5}{\left(\frac{6}{5}\right)^5}=\frac{5}{(1+0,2)^5}=\frac{5}{(1+0,2)^2(1+0,2)^3}=$$

$$=\frac{5}{(1+0,4+0,04)(1+0,6+0,12+0,008)}>\frac{5}{2\cdot 2}>1.$$

Таким образом, $\frac{5^6}{6^5} > 1 \Leftrightarrow 5^6 > 6^5$ и, значит, $\sqrt[5]{5} > \sqrt[6]{6}$.

*Замечания.*

1) В данном случае степени $5^6$ и $6^5$ невелики, а именно $5^6 = 15625$, $6^5 = 7776$, и их нетрудно вычислить «вручную», т.е. без калькулятора. Можно и без вычислений оценить степени:

$$5^6 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125 \cdot 125 > 10000,$$

$$6^5 = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 36 \cdot 36 \cdot 6 < 40 \cdot 40 \cdot 6 = 9600.$$

Поэтому $5^6 > 10000 > 9600 > 6^5$.

2) Если же степени действительно не поддаются вычислению (даже на калькуляторе), например, $n^{n+1}$ и $(n+1)^n$, то можно использовать неравенство $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$, верное при любом натуральном *n*, и поступить так:

$$\frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > \frac{n}{3} \geq 1 \text{ при всех натуральных } n \geq 3.$$

**Упражнение.** Докажите самостоятельно неравенство

$$\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}.$$

При сравнении чисел, которые являются значениями тригонометрических или логарифмических функций, обычно используются свойства соответствующих функций.

Перечислим некоторые свойства тригонометрических функций, связанные с неравенствами.

Если $-\frac{\pi}{2} < a \leq b < \frac{\pi}{2}$, то $\sin a \leq \sin b$ и $\operatorname{tg} a \leq \operatorname{tg} b$ (свойство монотонности).

Если $0 < a \leq b < \pi$, то $\cos a \geq \cos b$ и $\operatorname{ctg} a \geq \operatorname{ctg} b$ (свойство монотонности).

Если $0 < a \leq b < \pi$, то $\frac{\sin a + \sin b}{2} \leq \sin \frac{a+b}{2}$ (свойство выпуклости).

Если $-\frac{\pi}{2} < a \leq b < \frac{\pi}{2}$, то $\frac{\cos a + \cos b}{2} \leq \cos \frac{a+b}{2}$ (свойство выпуклости).

Если $-1 \leq a \leq b \leq 1$, то $\arcsin a \leq \arcsin b$, но $\arccos a \geq \arccos b$ (свойство монотонности).

Если $a \le b$, то $\operatorname{arctg} a \le \operatorname{arctg} b$, но $\operatorname{arcctg} a \ge \operatorname{arcctg} b$ (свойство монотонности).

**Пример 10.** Найдите множество значений функции[1]

$$y=\sin(0,5\arccos(0,5+0,5\sqrt{1-0,5x}))\,.$$

*Решение.* Сначала установим область определения данной функции. Поскольку функция $\sin t$ определена при любом $t$, то область определения данной функции совпадает с областью определения функции $y=\arccos t$, где $t=0,5+0,5\sqrt{1-0,5x}$ . По определению $\arccos t$ определен только на отрезке $-1 \le t \le 1$. Решим неравенство

$$-1\le 0,5+0,5\sqrt{1-0,5x}\le 1\,.$$

Получим

$$-1\le 0,5+0,5\sqrt{1-0,5x}\le 1 \Leftrightarrow -2\le 1+\sqrt{1-0,5x}\le 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3\le \sqrt{1-0,5x}\le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-0,5x\le 1, \\ 1-0,5x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0\le x\le 2\,.$$

Итак, данная функция определена только на отрезке [0; 2]. При всех этих $x$ имеем неравенство $0,5\le 0,5+0,5\sqrt{1-0,5x}\le 1$ и поэтому

$$\arccos 0,5\ge \arccos(0,5+0,5\sqrt{1-0,5x})\ge \arccos 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0\le \arccos(0,5+0,5\sqrt{1-0,5x})\le \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0\le 0,5\arccos(0,5+0,5\sqrt{1-0,5x})\le \frac{\pi}{6}\,.$$

Следовательно,

$$0\le \sin(0,5\arccos(0,5+0,5\sqrt{1-0,5x}))\le \sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\,.$$

Таким образом, множество значений данной функции есть отрезок $\dfrac{1}{2}$.

Перечислим некоторые свойства логарифмических функций, связанные с неравенствами.

---

[1] Другие задания на нахождение области значений функции см. в главе 2.

Если $0<a\le b$ и $c>1$, то $\log_c a\le\log_c b$ (свойство монотонности).

Если $1<a\le b$ и $c>1$, то $0<\log_b c\le\log_a c$ (свойство монотонности).

**Пример 11.** Сравните числа $\log_2 3$ и $\log_3 4$.

*Решение.* Здесь можно поступить так. Сравним числа

$$\log_2 3-1=\log_2\frac{3}{2} \text{ и } \log_3 4-1=\log_3\frac{4}{3}.$$

Рассмотрим следующую цепочку неравенств

$$\log_2\frac{3}{2}>\log_2\frac{4}{3}>\log_3\frac{4}{3}.$$

Отсюда следует, что $\log_2 3>\log_3 4$.

В данном случае возможен второй способ. Пусть $\log_2 3=a$. Тогда

$$\log_3 4=2\log_3 2=\frac{2}{\log_2 3}=\frac{2}{a}.$$

Рассмотрим функцию $y=x-\frac{2}{x}=\frac{x^2-2}{x}$. При $x>0$ значения этой функции положительны при $x>\sqrt{2}$, и отрицательны при $0<x<\sqrt{2}$. Поэтому сравним числа $a$ и $\sqrt{2}$, *т.е.* $\log_2 3$ *и* $\sqrt{2}=\log_2 2^{\sqrt{2}}$. Для этого достаточно сравнить числа 3 и $2^{\sqrt{2}}$. Имеем цепочку неравенств $2^{\sqrt{2}}<2^{1,5}\le2\sqrt{2}<2\cdot1,5=3$. Отсюда $\log_2 3=a>\sqrt{2}$ и поэтому значение $y(a)=a-\frac{2}{a}>0$. Следовательно,

$$\log_2 3-\log_3 4>0\Leftrightarrow\log_2 3>\log_3 4.$$

Часто при решении задач повышенной сложности приходится выполнять тождественные преобразования для того, чтобы данное выражение стало удобно для исследования. В основе этих преобразований лежат различные формулы. Перечислим некоторые из них, которые встречаются наиболее часто.

## § 2. Формулы сокращенного умножения

1. $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.
2. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.
3. $a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$.