§ 1. Делимость целых чисел

1.1. Деление без остатка

1. Свойства делимости целых чисел

Пусть n — целое число ($n \in Z$), m — натуральное число ($m \in N$). Говорят, что n *делится на* m, если существует целое число p ($p \in Z$) такое, что $n = mp$.

Число m называется *делителем* числа n, p — *частным* от деления n на m. Наибольшее натуральное число, являющееся натуральным делителем каждого из натуральных чисел m и n, называют *наибольшим общим делителем* этих чисел и обозначают НОД(m, n) или просто (m, n).

Например, если $m = 36$ а $n = 84$, то НОД$(36, 84) = 12$.

Два натуральных числа m и n называют *взаимно простыми* и пишут $(m, n) = 1$, если единственным общим натуральным делителем этих чисел является число единица.

Например, числа 12 и 35 взаимно просты, так как натуральными делителями числа 12 являются числа 1, 2, 3, 4, 6 и 12, а натуральными делителями числа 35 являются числа 1, 5, 7, 35.

Перечислим свойства делимости суммы (разности) и произведения чисел, считая, что $a \in Z$, $b \in Z$, $m \in N$.

1. Если a и b делятся на m, то числа $a + b$ и $a - b$ также делятся на m.

2. Если a и b делятся на m, то при любых целых числах k и l число $ak + bl$ и $ak - bl$ также делятся на m.

3. Если a делится на m, а b не делится на m, то числа $a+b$ и $a-b$ также не делятся на m.

4. Если a делится на m, а m делится на $k \in N$, то число a также делится на k.

5. Если a делится на m, а b не делится на m, то число ab делится на m.

6. Если a делится на каждое из чисел m и k , причём $(m, k) = 1$, то a делится на произведение mk.

7. Если a делится на m, то ak делится на mk при любом $k \in N$.

8. Если ab делится на m и b взаимно просто с m, то a делится на m.

Ограничимся доказательством свойства 1.

7. Факториал натурального числа

Факториал натурального числа n (обозначается $n!$, произносится *«эн факториал»*) — произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n.$$

Пример 27. *Найти наименьшее натуральное число* n *такое, что* $n!$ *делится на* 1170.

Решение. Каноническое разложение числа 1170 имеет вид $1170 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13$. Отсюда получаем, что в произведении $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ должно присутствовать в качестве множителя простое число 13. Наименьшее натуральное число n, удовлетворяющее этому условию, есть 13. Отметим, что $13!$ также делится на 2, $3^2 = 9$ и 5.

Ответ: 13.

Пример 28. *Найти наименьшее натуральное число такое, что оно не является делителем* $50!$.

Решение. Каноническое разложение числа $50!$ имеет вид:

$$50! = 2^{k_2} \cdot 3^{k_3} \cdot \ldots \cdot 47^{k_{47}}.$$

Следовательно, разложение на множители искомого числа должно содержать в качестве сомножителя хотя бы одно простое число, отличное от $2, 3, 5, \ldots, 47$, или содержать какой-либо сомножитель, представляющий 2 в степени, большей k_2, или 3 в степени, большей k_3 и т. д.

Легко убедиться, что число 53 удовлетворяет условиям задачи.

Ответ: 53.

Теорема 9. Показатель степени, с которым простое число p входит в каноническое разложение числа $n!$, равен

$$\alpha = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{p^k}\right], \qquad (1)$$

где k — такое натуральное число, что $p^k < n < p^{k+1}$, а $\left[\frac{n}{p_i}\right]$ означает целую часть числа $\frac{n}{p_i} (i = 1, 2, \ldots, k)$.

Доказательство. Поскольку

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot p \cdot \ldots \cdot 2p \cdot \ldots \cdot p^2 \cdot \ldots \cdot p^3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n,$$

2. Классы чисел $\{2k\}$, $\{2k+1\}$: чётные и нечётные числа

- Целое число, делящееся на 2, называют чётным, а целое число, не делящееся на 2, называют *нечётным.* Чётное число n можно представить в виде $n = 2k$, а нечётное число n — в виде $n = 2k + 1$, где k — некоторое целое число.

  Два целых числа называются *числами одинаковой чётности*, если оба они чётные или нечётные. Два целых числа называются *числами разной чётности*, если одно из них чётное, а другое нечётное.

- Свойства чётных и нечётных чисел:

  1. Сумма чётного и нечётного чисел — число нечётное.
  2. Сумма любого количества чётных чисел — число чётное.
  3. Сумма любого количества нечётных чисел — число чётное, если количество слагаемых чётно, и нечётное, если количество слагаемых нечётно.
  4. Произведение нескольких целых чисел чётно, если хотя бы один из множителей чётен.
  5. Произведение нескольких целых чисел нечётно, если все множители нечётны.
  6. Сумма и разность любых двух целых чисел имеют одинаковую чётность.

Пример 40. *На семи карточках написали числа* 1, 2, 3, 4, 5, 6 *и* 7. *Затем карточки перевернули, перемешали и на обратных сторонах написали те же числа* 1, 2, 3, 4, 5, 6 *и* 7. *Числа, написанные на обеих сторонах каждой карточки, сложили и полученные суммы перемножили. Чётно или нечётно полученное произведение?*

Решение. Среди семи данных чисел четыре нечётных. Значит, на какой-то карточке попадётся два нечётных числа, и их сумма чётная. Поэтому всё произведение чётно.

Ответ: чётно.

Пример 41. *Задано* 2014 *натуральных чисел. Если выбрать из них любые* 100 *чисел, то среди них окажется хотя бы одно чётное число. Если выбрать из них любые* 1916 *чисел, то среди них окажется хотя бы одно нечётное число. Может ли сумма всех этих чисел равняться* $2014 \cdot 2013$?

Числа n и $(n+3)$ не могут одновременно делиться на 2 и не могут одновременно делиться на 5. Значит, один из множителей делится на 2^4 и один из множителей делится на 5^4. Эти два множителя могут совпадать только в том случае, если число n четырёхзначное, а $(n+3)$ делится на 1000, то есть $n = 9997$.

При $n \neq 9997$ попробуем подобрать два числа, одно из которых делится на 16, а другое на 625, из которых одно больше другого на 3. Для этого переберём нечётные числа, кратные числу 625: 1875, 3125, 4375, 5625, 6875, 8125, 9375. Среди них только 1875 имеет вид $16k+3$ и только 8125 имеет вид $16k-3$.

Значит, искомое число равно 1872, 8125 или 9997.

Ответ: а) 7; б) нет; в) 1872; 8125; 9997.

§ 2. Десятичная запись натурального числа

• Любое натуральное число n можно представить в десятичной системе счисления в виде

$$n = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_2 a_1 a_0} = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Например,
$2485 = 2 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 5 = 2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 5$;
двузначное число: $\overline{ab} = 10a + b$;
трёхзначное число: $\overline{abc} = 100a + 10b + c$.

Пример 53. (ЕГЭ, 2013). *Дано трёхзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля), не кратное* 100.

а) *Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным* 82?

б) *Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным* 83?

в) *Какое наибольшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?*

Решение. а) Да, может. Например, $902 : (9+0+2) = 82$.

Пусть a, b, c — цифры данного числа, где $a \neq 0$ и одновременно b и c не равны 0. Тогда получаем $\overline{abc} = 100a+10b+c$. По условию $100a+10b+c = 82(a+b+c)$. Отсюда $18a = 72b + 81c$ или, после сокращения на 9, $2a = 8b + 9c$. Полученному равенству удовлетворяют, например, цифры $a = 9, b = 0, c = 2$. Получается число 902.

Доказательство. Так как число 5 является простым числом, то имеем $n^5 \equiv n(\mathrm{mod}\ 5)$, то есть n^5 и n имеют одинаковые остатки.

Пример 83. *Показать, что число* $13^{176} - 1$ *делится на* 89.

Решение. Применив формулу разности квадратов, получим

$$13^{176} - 1 = (13^{88} - 1)(13^{88} + 1).$$

Так как 89 — простое число и $(13; 89) = 1$, то на основании малой теоремы Ферма справедливо сравнение $13^{88} \equiv 1(\mathrm{mod}\ 89)$, то есть $13^{88} - 1$ кратно 89, и, следовательно, $13^{176} - 1$ кратно 89.

§ 4. Выражения с числами

Числовое выражение — это любая запись из чисел, знаков математических действий и скобок.

1. Дроби

Пример 84. (ММО, 2002, 8-й класс). *На острове* $\frac{2}{3}$ *всех мужчин женаты и* $\frac{3}{5}$ *всех женщин замужем. Какая доля населения острова состоит в браке?*

Решение. Пусть число супружеских пар на острове равно N (замужем N женщин, женаты N мужчин). По условию N замужние женщины составляют $\frac{3}{5}$ всех женщин острова, значит, на острове $\frac{5N}{3}$ женщин. Аналогично, женатые мужчины составляют $\frac{2}{3}$ всех мужчин острова, значит, на острове $\frac{3N}{2}$ мужчин.

Поэтому всего на острове $\frac{5N}{3} + \frac{3N}{2} = \frac{19N}{6}$ жителей, а в браке состоит $2N$ жителей. Искомая доля равна $\dfrac{2N}{\frac{19N}{6}} = \frac{12}{19}$.

Ответ: $\frac{12}{19}$.

Пример 85. (МИОО, 2010). *Среди обыкновенных дробей с положительными знаменателями, расположенных между числами* $\frac{96}{35}$ *и* $\frac{97}{36}$*, найти такую, знаменатель которой минимален.*

Значит, между 8 квадратами последовательных натуральных чисел можно расставить знаки так, что полученная сумма будет равняться 0:

$$\underbrace{(a+7)^2-(a+6)^2-(a+5)^2+(a+4)^2}_{=4}-$$
$$\underbrace{-(a+3)^2+(a+2)^2+(a+1)^2-a^2}_{=-4}=0.$$

При $N=56$ данные числа можно разбить на группы по 8 чисел в каждой так, что сумма чисел в каждой группе равна 0, а значит, и сумма всех чисел равна 0.

г) Как и в предыдущем пункте, расставим знаки между 72 числами $4^2, 5^2, \ldots, 74^2, 75^2$ таким образом, чтобы их сумма равнялась 0. Перед числом 2^2 поставим знак «+», а перед 3^2 поставим «−». При такой расстановке знаков сумма равна $1^2+2^2-3^2=-4$.

Ответ: а) да; б) нет; в) да; г) да.

§ 5. Выражения с переменными

Рассмотрим задачи с целыми числами, содержащие выражения с переменными.

1. Целые рациональные выражения

Целые рациональные выражения — это выражения, составленные из чисел и переменных с помощью действий сложения, вычитания, умножения, возведения переменных в натуральную степень.

Пример 93. *Квадратный трёхчлен $f(x)=x^2+px+q$ имеет два различных целых корня. Один из корней трёхчлена и его значение в точке $x=11$ являются простыми числами. Найдите корни трёхчлена.*

Решение. Пусть корни трёхчлена равны a и b. Тогда

$$f(x)=(x-a)(x-b) \text{ и } f(11)=(11-a)(11-b).$$

Если a и $(11-a)(11-b)$ простые числа, то $b=10$ или $b=12$.

Пусть $b=10$, тогда числа a и $11-a$ не могут быть простыми числами (докажите самостоятельно, рассматривая случай, когда $a=2$ и a — нечётное).

Решение. Обозначим $\operatorname{tg} x = n$ и $\operatorname{tg} 2x = m$. Исходя из формулы $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$, имеем

$$m = \frac{2n}{1-n^2} \text{ или } m = \frac{-2n}{(n-1)(n+1)}.$$

Так как НОД$(n; n+1) = 1$ и НОД$(n; n-1) = 1$, то m будет целым только в случае, если знаменатель дроби равен 1, то есть $n = 0$. Значит, $m = 0$. В этом случае $tgx = 0$ и $x = \pi n, n \in Z$.

Ответ: $x = \pi n, n \in Z$.

6. Выражения с факториалами

Пример 100. *Найти все натуральные n, при которых число $1! + 2! + \ldots + n!$ есть точный квадрат.*

Решение. Проверим первые значения n. При $n = 1$ и $n = 3$ получаем числа, являющиеся точными квадратами. Если $n = 2$, то число $1! + 2! = 3$ не является квадратом. Для $n = 4$ число $1! + 2! + 3! + 4! = 33$ не является квадратом. Далее при $n \geqslant 5$ все слагаемые оканчиваются нулём, поэтому все суммы оканчиваются на цифру 3, то есть числа не являются квадратами.

Ответ: 1; 3.

§ 6. Уравнения и неравенства в целых числах

6.1. Линейные уравнения

1. Метод прямого перебора

Пример 101. *В клетке сидят кролики и фазаны. Всего у них 18 ног. Узнать, сколько в клетке тех и других. Указать все решения.*

Решение. Пусть x — количество кроликов, y — количество фазанов, тогда имеем уравнение $4x + 2y = 18$ или $2x + y = 9$.

Если $x = 1$, то $y = 7$.

Если $x = 2$, то $y = 5$.

Если $x = 3$, то $y = 3$.

Если $x = 4$, то $y = 1$.

При $x = 5$ получаем $2 \cdot 5 = 10 > 9$.

Ответ: (1;7), (2;5), (3;3), (4;1).

§ 11. Геометрическая прогрессия

Так же, как и задания на арифметическую прогрессию, задания на геометрическую прогрессию ежегодно присутствуют в вариантах КИМ ЕГЭ по математике, в диагностических и тренировочных работах.

Для решения задач этого параграфа потребуются следующие определения и формулы.

- *Геометрическая прогрессия* — числовая последовательность $\{b_n\}$, первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число q, не равное нулю: $b_{n+1} = b_n \cdot q$, $b_1 \neq 0$, $q \neq 0$, $n \in N$.

- Число q называют *знаменателем* геометрической прогрессии, число b_1 — *первым членом, а* b_n — *n-м членом (или общим членом)*.

- Геометрическую прогрессию называют *возрастающей*, если $b_{n+1} > b$ при всех $n \in N$; *убывающей*, если $b_{n+1} < b_n$ при всех $n \in N$; *постоянной*, если $b_{n+1} = b_n$ при всех $n \in N$.

- Формула n-го (общего) члена геометрической прогрессии:

  $$b_n = b_1 \cdot q^{n-1};$$

  и в общем виде

  $$b_n = b_m \cdot q^{n-m}, n, m \in N.$$

- Формула знаменателя геометрической прогрессии:

  $$q = \frac{b_{n+1}}{b_n};$$

  и в общем виде

  $$q^{n-m} = \frac{b_n}{b_m}, \text{в частности } q^{n-1} = \frac{b_n}{b_1} \text{ при } n \geqslant 2.$$

- Каждый член геометрической прогрессии, начиная со второго, возведённый в квадрат, равен произведению предшествующего и последующего членов, то есть

  $$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$$

Ответы

1. д) Так как $21^{2012} = 441^{1006} = (440+1)^{1006} = 440k + 1$ и $439^{2011} = (440-1)^{2011} = 440n - 1$, то $21^{2012} + 439^{2011} = 440(k+n)$, то есть данное выражение делится на 440.

4. г) Верно равенство

$$\underbrace{11\ldots1}_{100}2\underbrace{11\ldots1}_{100} = \underbrace{11\ldots11}_{101}\underbrace{00\ldots0}_{100} + \underbrace{11\ldots11}_{100} =$$
$$= \underbrace{11\ldots11}_{101}\cdot(1\underbrace{00\ldots0}_{100}+1) = \underbrace{11\ldots11}_{101}\cdot 1\underbrace{00\ldots0}_{99}1.$$

Следовательно, данное число — составное.

д) Сумма цифр числа, стоящего в показателе степени, равна $(1+2)\cdot 100 = 300$, то есть делится на 3 и его можно представить в виде $\underbrace{11\ldots11}_{100}\underbrace{22\ldots22}_{100} = 3n$, где n — некоторое натуральное число. Тогда верно равенство

$$2^{\overbrace{11\ldots11}^{100}\overbrace{22\ldots22}^{100}} + 1 = 2^{3n} + 1 = (2^n + 1)(2^{2n} - 2^n + 1).$$

Следовательно, данное число — составное.

5. Рассмотрим числа вида $\underbrace{11\ldots11}_{n}\underbrace{22\ldots22}$. При $n = 1$ имеем $12 = 3\cdot 4$.

При $n = 2$ имеем:

$$1122 = 1100 + 22 = 11\cdot(100+2) = 11\cdot(99+3) = 33\cdot(33+1).$$

При $n = 3$ имеем: $111\,222 = 111\,000 + 222 = 111\cdot(1000+2) = 111\cdot(999+3) = 333\cdot(333+1)$.

Соответственно, в общем случае имеем

$$\underbrace{11\ldots11}_{n}\underbrace{22\ldots22}_{n} = \underbrace{11\ldots11}_{n}\underbrace{00\ldots00}_{n} + \underbrace{22\ldots22}_{n} = \underbrace{11\ldots11}_{n}\cdot$$
$$\cdot\left(1\underbrace{00\ldots00}_{n}+2\right) = \underbrace{11\ldots11}_{n}\cdot\left(\underbrace{99\ldots99}_{n}+3\right) =$$
$$= \underbrace{33\ldots33}_{n}\cdot\left(\underbrace{33\ldots33}_{n}+1\right).$$