ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее (десятое, исправленное) издание «Сборника задач по математике для поступающих в вузы (с решениями)», как и предыдущие три издания, состоит из двух книг (книга 1 — «Алгебра», книга 2 — «Геометрия»). При этом сохранен почти весь массив задач пятого—девятого изданий и произведена дополнительная корректировка условий и решений всех задач. Сохранены и теоретические сведения справочного характера, примеры решения задач с объяснением применяемых методов, а также разделение задач на три группы (А, Б, В) по их возрастающей трудности в тех главах, где такое разделение было осуществлено и в предыдущих изданиях «Сборника».

Хотя такое деление имеет более или менее условный характер, авторы полагают, что умение решать задачи из группы А должно определять минимально необходимый уровень подготовки учащихся к вступительным экзаменам в вузы. Успешное решение задач из группы Б определяет более высокое качество усвоения школьной программы. К группе В отнесены задачи повышенной трудности, однако практика решения таких задач полезна для развития и укрепления способности к самостоятельному логическому мышлению, для обогащения математической культуры и может быть использована в школе и на факультативных занятиях.

В каждой главе внутри групп А, Б, В задачи объединены по типам и методам решения. Кроме того, в каждой из групп А, Б и В к наиболее типичным задачам даны полные решения или указания, помещенные в конце книги. Тем самым «Сборник» приобретает новое качество — он становится дополнительным к школьным учебникам пособием для самообучения в процессе подготовки к вступительным экзаменам в вузы.

В соответствии со школьной программой обучения математике всюду (за исключением гл. 17) рассматриваются только области действительных чисел: действительные корни функций, уравнений, систем уравнений.

Учитывая интересы учащихся школ, лицеев и гимназий, изучающих математику по расширенной программе, авторы включили в раздел «Дополнение» главы «Комбинаторика и бином Ньютона» (гл. 16) и «Комплексные числа» (гл. 17). Несмотря на то что эти темы не входят в действующую программу для поступающих в вузы, они окажутся весьма полезными для тех, кто интересуется математикой и готовится к поступлению в вузы, где к абитуриентам предъявляются повышенные требования по этому предмету. Наконец, «Сборник» завершает раздел «Приложение», который содержит «Вопросы и задачи для самопроверки» и «Варианты билетов для вступительных письменных экзаменов».

В «Сборнике» приняты следующие обозначения: начало и конец решения задачи отмечаются соответственно знаками □ и ■ , а вместо слова «Указание» употребляется знак ●. При этом для удобства пользования книгой номера условий тех задач, к которым даны решения (указания), обведены рамкой (соответственно овальной линией).

В настоящем десятом издании «Сборника» исправлены замеченные неточности и опечатки.

Начиная с третьего издания работа над «Сборником» выполнялась коллективом авторов без участия самого активного соавтора и научного редактора его первого и второго изданий М. И. Сканави, умершего в 1972 г. Специальное редактирование третьего и последующих изданий осуществлял Б. А. Кордемский. Он проделал огромную работу и в процессе подготовки предыдущего (девятого) издания (1999 г.), но, к сожалению, книга вышла в свет уже без него. Мы сохраним светлую память о нем и о других наших коллегах, ушедших из жизни за последние годы, — И. Ф. Орловской, Р. И. Позойском, В. К. Егереве, В. В. Зайцеве.

Авторы сердечно благодарят учащихся и преподавателей школ, подготовительных курсов и факультетов вузов, рецензентов «Сборника», высказавших критические замечания и добрые советы, предложивших поправки. В особенности авторы признательны Р. И. Борковскому (г. Челябинск), приславшему наибольшее количество пожеланий и замечаний, учтенных при работе над книгой.

Авторы

ГЛАВА 1

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Свойства степеней

Для любых x и y и любых положительных a и b верны следующие равенства:

$$a^0 = 1; \tag{1.1}$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}; \tag{1.2}$$

$$a^x : a^y = a^{x-y}; \tag{1.3}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}; \tag{1.4}$$

$$(ab)^x = a^x b^x; \tag{1.5}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}; \tag{1.6}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}. \tag{1.7}$$

Формулы преобразования многочленов

Для любых a, b и c верны следующие равенства:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b); \tag{1.8}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \tag{1.9}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2; \tag{1.10}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\text{или } (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b); \tag{1.11}$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$\text{или } (a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b); \tag{1.12}$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2); \tag{1.13}$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2); \tag{1.14}$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \tag{1.15}$$

где x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.

Свойства арифметических корней

Для любых натуральных n и k, больших 1, и любых неотрицательных a и b верны следующие равенства:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \tag{1.16}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \, (b \neq 0); \tag{1.17}$$

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}; \tag{1.18}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[kn]{a}; \tag{1.19}$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}; \tag{1.20}$$

$$(\sqrt[n]{a})^n = a \;\; (a \geq 0); \tag{1.21}$$

$$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}, \text{ если } 0 \leq a < b; \tag{1.22}$$

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a \text{ при } a \geq 0, \\ -a \text{ при } a < 0; \end{cases} \tag{1.23}$$

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|; \tag{1.24}$$

$$\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a} \; (a \geq 0). \tag{1.25}$$

Пример 1. Упростить выражение

$$\frac{x^4 + 2x^2 - 3x + 1}{x^2 + \sqrt{3x} + 1} + 2\left(\sqrt[6]{27x^3} - \frac{1}{2}\right).$$

☐ Обозначим дробь через A, а выражение в скобках — через B; тогда заданное выражение примет вид $A + 2B$. Заметим, что для $\sqrt{3x}$ и $\sqrt[6]{27x^3}$ допустимыми являются только значения $x \geq 0$, при которых знаменатель дроби A не равен нулю. Поэтому и для заданного выражения допустимыми являются только значения $x \geq 0$.

Используя формулу (1.9), выделяем в числителе дроби A полный квадрат:

$$x^4 + 2x^2 + 1 - 3x = (x^2 + 1)^2 - 3x.$$

Так как $x \geq 0$, то в силу равенства (1.21) имеем $3x = (\sqrt{3x})^2$. Тогда полученное выражение с помощью формулы (1.8) можно разложить на множители как разность квадратов:

$$(x^2 + 1)^2 - (\sqrt{3x})^2 = (x^2 + 1 - \sqrt{3x})(x^2 + 1 + \sqrt{3x}).$$

Следовательно,

ГЛАВА 4

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

(здесь и в дальнейшем запись $n \in \boldsymbol{Z}$ означает, что n — любое целое число)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \tag{4.1}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},\ x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1),\ n \in \boldsymbol{Z}; \tag{4.2}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x},\ x \neq \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}; \tag{4.3}$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1,\ x \neq \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}; \tag{4.4}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x},\ x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1),\ n \in \boldsymbol{Z}; \tag{4.5}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x},\ x \neq \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \tag{4.6}$$

Формулы сложения

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y; \tag{4.7}$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y; \tag{4.8}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y; \tag{4.9}$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y; \tag{4.10}$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y},\ x, y, x+y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}; \tag{4.11}$$

$$\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y},\ x, y, x-y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \tag{4.12}$$

Формулы двойного аргумента

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x; \tag{4.13}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x; \tag{4.14}$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x},\ x \ne \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k,\ \ k \in \boldsymbol{Z}, x \ne \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \tag{4.15}$$

Формулы половинного аргумента

(для синуса и косинуса — формулы понижения степени)

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}; \tag{4.16}$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}; \tag{4.17}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x},\ x \ne \pi + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};\ \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x},\ x \ne \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \tag{4.18}$$

Формулы преобразования суммы в произведение

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}; \tag{4.19}$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}; \tag{4.20}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}; \tag{4.21}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}; \tag{4.22}$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}, x, y \ne \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}; \tag{4.23}$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}, x, y \ne \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \tag{4.24}$$

Формулы преобразования произведения в сумму

$$\sin x\sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)); \tag{4.25}$$

$$=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}+\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}+\frac{\sin 6\alpha}{\cos 6\alpha}+\frac{\cos 6\alpha}{\sin 6\alpha}=$$

$$=\frac{\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha}{\sin 2\alpha\cos 2\alpha}+\frac{\sin^2 6\alpha+\cos^2 6\alpha}{\sin 6\alpha\cos 6\alpha}=\frac{1}{\sin 2\alpha\cos 2\alpha}+\frac{1}{\sin 6\alpha\cos 6\alpha}=$$

$$=\frac{2}{\sin 4\alpha}+\frac{2}{\sin 12\alpha}=\frac{2(\sin 12\alpha+\sin 4\alpha)}{\sin 4\alpha\sin 12\alpha}.$$

Преобразуя сумму синусов по формуле (4.19), получаем $A=\dfrac{4\sin 8\alpha\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha\sin 12\alpha}$. Так как $\sin 8\alpha=2\sin 4\alpha\cos 4\alpha$, то $A=\dfrac{8\sin 4\alpha\cos^2 4\alpha}{\sin 4\alpha\sin 12\alpha}=\dfrac{8\cos^2 4\alpha}{\sin 12\alpha}$. ■

Пример 2. Упростить выражение

$$A=\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{4}\right)\sin\frac{\alpha}{4}.$$

□ К произведению первых двух сомножителей применим формулу (4.27). Тогда получим

$$A=\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)+\sin\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\alpha}{4}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{4}=\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{4}+\frac{1}{4}\sin\frac{\alpha}{4}.$$

Снова используя формулу (4.27), находим

$$A=\frac{1}{4}\left(-\sin\frac{\alpha}{4}+\sin\frac{3\alpha}{4}\right)+\frac{1}{4}\sin\frac{\alpha}{4}=\frac{1}{4}\sin\frac{3\alpha}{4}.\ ■$$

Пример 3. Представить в виде произведения $A=2\cos^2 3\alpha+\sqrt{3}\sin 6\alpha-1$.

□ Согласно формуле (4.14), имеем $2\cos^2 3\alpha-1=\cos 6\alpha$. Следовательно,

$$A=\cos 6\alpha+\sqrt{3}\sin 6\alpha=2\left(\frac{1}{2}\cos 6\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 6\alpha\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos 6\alpha+\sin\frac{\pi}{3}\sin 6\alpha\right).$$

Так как выражение в скобках — развернутая формула (4.10) для косинуса разности, то $A=2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-6\alpha\right)$. ■

Пример 4. Проверить, что $\operatorname{tg}20^\circ+4\sin 20^\circ=\sqrt{3}$.

□ Применив формулы (4.2), (4.13) и (4.19), получим

$$A=\operatorname{tg}20^\circ+4\sin 20^\circ=\frac{\sin 20^\circ+4\sin 20^\circ\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ}=\frac{\sin 20^\circ+2\sin 40^\circ}{\cos 20^\circ}=$$

$$= \frac{(\sin 20^\circ + \sin 40^\circ) + \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{2\sin 30^\circ \cos 10^\circ + \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{\cos 10^\circ + \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ}.$$

Заменив по формуле приведения $\cos 10^\circ$ на $\sin 80^\circ$ и снова используя формулу (4.19), находим

$$A = \frac{\sin 80^\circ + \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{2\sin 60^\circ \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}. \blacksquare$$

Пример 5. Найти значение $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, если известно, что $\sin x - \cos x = 1{,}4$.

☐ Удобно воспользоваться формулами (4.28) и (4.29), учитывая, что они верны только при $x \neq \pi(2n+1)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Однако в данном случае x не может принимать эти значения. Действительно, если бы $x = \pi(2n+1)$, то $\sin(\pi(2n+1)) - \cos(\pi(2n+1)) = 0 - (-1) \neq 1{,}4$. Выразив $\sin x$ и $\cos x$ через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, перепишем данное равенство в виде

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} - \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = 1{,}4.$$

Полагая $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z$, получаем уравнение $z^2 - 5z + 6 = 0$, откуда $z_1 = 2$, $z_2 = 3$.

Итак, $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 2$ и $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 3$. ■

Пример 6. Упростить выражение

$$A = \frac{1}{2}\sin^2\left(2\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) - 2(\cos^4\alpha + \sin^4\alpha) + 2(\cos^6\alpha + \sin^6\alpha).$$

☐ По формуле приведения имеем $\sin^2\left(2\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = \cos^2 2\alpha$. Преобразуем $\cos^6\alpha + \sin^6\alpha$ как сумму кубов по формуле (1.13):

$$\cos^6\alpha + \sin^6\alpha = (\cos^2\alpha)^3 + (\sin^2\alpha)^3 =$$

$$= (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)(\cos^4\alpha + \sin^4\alpha - \cos^2\alpha\sin^2\alpha),$$

откуда, учитывая формулы (4.1) и (4.13), находим $\cos^6\alpha + \sin^6\alpha = \cos^4\alpha +$

9.031.☐ I способ. Имеем $y=|x+2|+|x-2|$. Воспользуемся определением модуля и построим график на различных участках числовой оси: если $x<-2$, то $y=-x-2-x+2=-2x$; если $-2\le x<2$, то $y=x+2-x+2=4$; если $x\ge 2$, то $y=x+2+x-2=2x$ (рис. Р. 9.4, *а*).

II способ. Построим на одном чертеже графики функций $y=|x+2|$ и $y=|x-2|$, а затем сложим их графически (рис. Р. 9.4, *б*).■

9.037. ☐ а) Строим график по точкам (1; 0), (0,5; 1), (2; –1) (рис. Р. 9.5, *а*).

б) Функция определена, если $-x>0$, т. е. $x<0$. График функции $y=\log_{0,5}(-x)$ симметричен графику функции $y=\log_{0,5}x$ относительно оси Oy (рис. Р. 9.5, *б*).

в) Функция $y=\log_{0,5}|x|$ — четная; ее область определения $x\ne 0$. График функции состоит из двух кривых, симметричных относительно оси Oy (рис. Р. 9.5, *в*). ■

г), д) См. рис. Р .9.5, *г*, *д*.

9.038. ☐ Функция $y=2^{1/x}$ определена при $x\ne 0$, причем $2^{1/x}>0$ на всей области определения. Если $x\to 0$ справа, то $\frac{1}{x}\to+\infty$, т. е. $2^{1/x}\to+\infty$, если же $x\to 0$ слева, то $\frac{1}{x}\to-\infty$, т. е. $2^{1/x}\to 0$; далее, если $x\to+\infty$, то $\frac{1}{x}\to 0$ и $\frac{1}{x}>0$, т. е. $2^{1/x}\to 1$ (причем $2^{1/x}>1$); если же $x\to-\infty$, то $\frac{1}{x}\to 0$ и $\frac{1}{x}<0$, т. е. $2^{1/x}\to 1$ (причем $2^{1/x}<1$). Искомый график изображен на рис. Р. 9.6.■

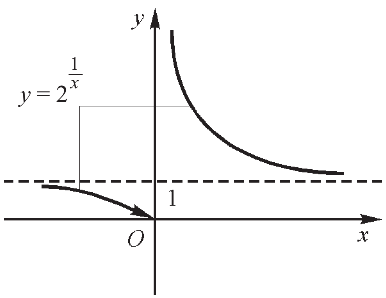

Рис. Р. 9.6

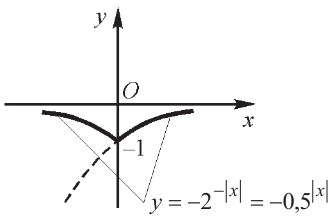

Рис. Р. 9.7

9.039. См. рис. Р. 9.7.

9.041. ☐ Здесь $x>0$. Если $\lg x\ge 0$, т. е. $x\ge 1$, то $y=2\lg x$; если же $\lg x<0$, т. е. $0<x<1$, то $y=0$. Искомый график изображен на рис. Р. 9.8.■

9.042. □ Имеем $y=\sqrt{10^{2\lg|x|}}=10^{\lg|x|}=|x|$ при условии $x\neq 0$. Таким образом, если из графика функции $y=|x|$ удалить точку (0; 0), то получим искомый график (рис. Р 9.9). ■

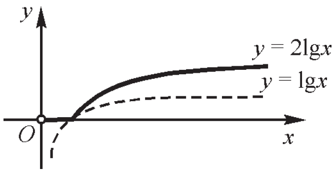

Рис. Р. 9.8

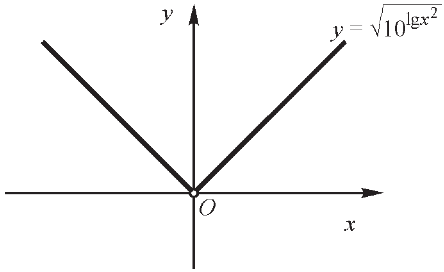

Рис. Р. 9.9

9.043. □ Функция определена, если $x>0$ и $x\neq 1$. При этих значениях x имеем $y=2$. Искомый график изображен на рис. Р. 9.10.■

9.047. □ Область определения функции: $\begin{cases} x\neq 2, \\ x+2>0 \end{cases} \Rightarrow -2<x<2;\ x>2.$

При этих значениях x функция имеет вид $y=\log_2(x+2)$. Ее график изображен на рис Р. 9.11.■

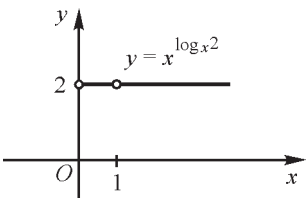

Рис. Р. 9.10

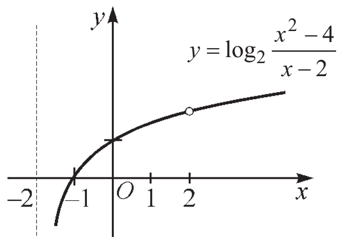

Рис. Р. 9.11

9.050. □ Запишем уравнение в виде $|x-1|=5-2x$ и построим на одном чертеже графики функций $y=|x-1|$ и $y=5-2x$ (рис. Р. 9.12). Решением данного уравнения является абсцисса точки пересечения этих графиков. С помощью рис Р. 9.12 устанавливаем, что $x=2$.■

9.051. □ Так как $b^2-4ac=0$ и $a>0$, то квадратный трехчлен ax^2+bx+c

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА 11

ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1°. ***Произвольный треугольник*** (a, b, c — стороны; α, β, γ — противолежащие им углы; p — полупериметр; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности; S — площадь; h_a — высота, проведенная к стороне a):

$$S = \frac{1}{2} a h_a; \qquad (11.1)$$

$$S = \frac{1}{2} bc \sin\alpha; \qquad (11.2)$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \ \textbf{(формула Герона)}; \qquad (11.3)$$

$$r = \frac{S}{p}; \qquad (11.4)$$

$$R = \frac{abc}{4S}; \qquad (11.5)$$

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}; \qquad (11.6)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \ \textbf{(теорема косинусов)}; \qquad (11.7)$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R \ \textbf{(теорема синусов)}. \qquad (11.8)$$

2°. ***Прямоугольный треугольник*** (a, b — катеты; c — гипотенуза; a_c, b_c — проекции катетов на гипотенузу):

$$S = \frac{1}{2} ab; \qquad (11.9)$$

$$S = \frac{1}{2} c h_c; \qquad (11.10)$$

$$r = \frac{a+b-c}{2}; \qquad (11.11)$$

$$R = \frac{c}{2}; \tag{11.12}$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ (**теорема Пифагора**)}; \tag{11.13}$$

$$\frac{a_c}{h_c} = \frac{h_c}{b_c}; \tag{11.14}$$

$$\frac{a_c}{a} = \frac{a}{c}; \tag{11.15}$$

$$\frac{b_c}{b} = \frac{b}{c}; \tag{11.16}$$

$$a = c\sin\alpha = c\cos\beta = b\,\mathrm{tg}\,\alpha = b\,\mathrm{ctg}\,\beta. \tag{11.17}$$

3°. ***Равносторонний треугольник*:**

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; \tag{11.18}$$

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}; \tag{11.19}$$

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}. \tag{11.20}$$

4°. ***Произвольный выпуклый четырехугольник*** (d_1 и d_2 — диагонали; φ — угол между ними; S — площадь):

$$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi. \tag{11.21}$$

5°. ***Параллелограмм*** (a и b — смежные стороны; α — угол между ними; h_a — высота, проведенная к стороне a):

$$S = ah_a = ab\sin\alpha = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi. \tag{11.22}$$

6°. ***Ромб*:**

$$S = ah_a = a^2\sin\alpha = \frac{1}{2}d_1 d_2. \tag{11.23}$$

7°. ***Прямоугольник*** (d — диагональ):

$$S = ab = \frac{1}{2}\,d^2\sin\varphi. \tag{11.24}$$

8°. ***Квадрат***:

$$S = a^2 = \frac{1}{2}d^2. \tag{11.25}$$

9°. ***Трапеция*** (a и b — основания; h — расстояние между ними; l — средняя линия):

$$l = \frac{a+b}{2}; \tag{11.26}$$

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h = lh. \tag{11.27}$$

10°. ***Описанный многоугольник*** (p — полупериметр; r — радиус вписанной окружности):

$$S = pr. \tag{11.28}$$

11°. ***Правильный многоугольник*** (a_n — сторона правильного n-угольника; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности):

$$a_3 = R\sqrt{3};\ a_4 = R\sqrt{2};\ a_6 = R; \tag{11.29}$$

$$S = \frac{na_n r}{2}. \tag{11.30}$$

12°. ***Окружность, круг*** (r — радиус; C — длина окружности; S — площадь круга):

$$C = 2\pi r; \tag{11.31}$$

$$S = \pi r^2. \tag{11.32}$$

13°. ***Сектор*** (l — длина дуги, ограничивающей сектор; $n°$ — градусная мера центрального угла; α — радианная мера центрального угла):

$$l = \frac{\pi r n^\circ}{180^\circ} = r\alpha; \tag{11.33}$$

$$S = \frac{\pi r^2 n^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{2} r^2 \alpha. \tag{11.34}$$

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ФИГУР

1°. *Три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении* 2 : 1, *считая от вершины треугольника.*

☐ Пусть медианы AD и BE пересекаются в точке O (рис. 11.1). Построим четырехугольник $MNDE$, где M и N — середины отрезков AO и BO. Тогда $MN \parallel AB$ и $MN = 0{,}5AB$ как средняя линия ΔAOB; $ED \parallel AB$ и $ED = 0{,}5AB$ как средняя

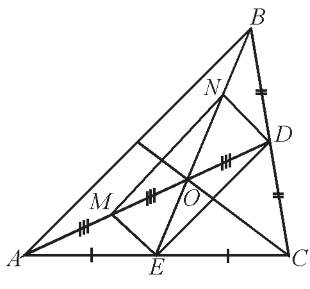

Рис. 11.1

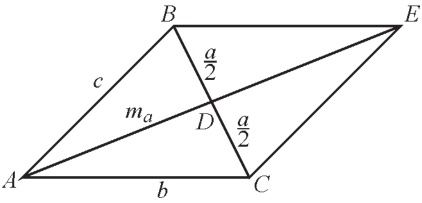

Рис. 11.2

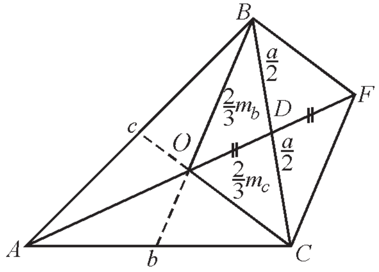

Рис. 11.3

линия ΔABC. Поэтому $MN \parallel ED$ и $MN = ED$, т. е. фигура $MNDE$ — параллелограмм с диагоналями MD и NE. Значит, $MO = OD$ и так как $MO = AM$, то $AM = MO = OD$. Итак, точка O делит медиану AD в отношении $AO : OD = 2 : 1$ и в таком же отношении эта точка делит медиану BE.

Очевидно, что в том же отношении должна делить и третью медиану точка ее пересечения как с первой, так и со второй медианами. При этом третья медиана не может пересечь их в точках, отличных от O, поскольку тогда на каждой медиане имелись бы две различные точки, делящие ее в отношении 2 : 1, считая от вершины, что невозможно.■

2°. *Длина медианы треугольника выражается формулой*

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}, \qquad (11.35)$$

где a, b, c — длины сторон треугольника.

□ Продолжим медиану AD (рис.11.2) на расстояние $DE = AD$ и построим отрезки BE и EC. В полученном четырехугольнике $ABEC$ точка D пересечения диагоналей $AE = 2m_a$ и $BC = a$ делит каждую из них пополам; следовательно, $ABEC$ — параллелограмм. Теперь используем теорему о том, что сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин его сторон. Составив уравнение и решив его относительно m_a, получим искомое соотношение.■

3°. *Длина стороны треугольника выражается формулой*

$$a = \frac{2}{3}\sqrt{2(m_b^2 + m_c^2) - m_a^2}, \qquad (11.36)$$

где m_a, m_b, m_c — длины медиан треугольника.

□ Отметим на медиане AD точку O пересечения медиан ΔABC (рис.11.3); согласно свойству 1°, она делит AD в отношении $AO : OD = 2 : 1$. Продолжим OD на расстояние $DF = OD = \frac{1}{3}m_a$ и соединим точку F с B и C.

Теперь составим уравнение, связывающее длины сторон $BO = \frac{2}{3}m_b$, $CO = \frac{2}{3}m_c$ и диагоналей $OF = \frac{2}{3}m_a$, $BC = a$ параллелограмма $OBFC$. Решив это уравнение относительно a, получим искомое соотношение.■

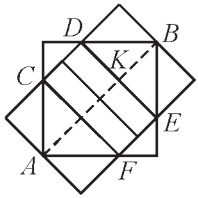

Рис. Р. 12.57

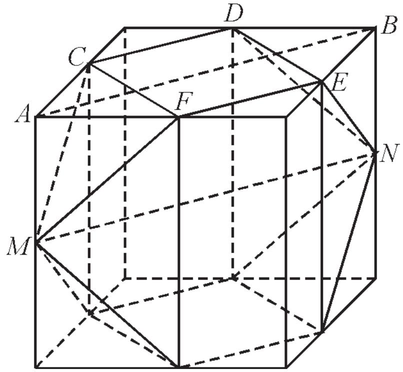

Рис. Р. 12.58

т. е. $r_{\text{шара}} = \dfrac{3R}{2(\sqrt{7}+1)} = \dfrac{R(\sqrt{7}-1)}{4}$. Итак, искомая поверхность

$$S = 4\pi r^2{}_{\text{шара}} = 4\pi\frac{R^2}{16}(\sqrt{7}-1)^2 = \frac{\pi R^2}{4}(8-2\sqrt{7}) = \frac{\pi R^2}{2}(4-\sqrt{7}).$$

Если же рассмотреть пирамиду с вершиной F, то, рассуждая аналогично, в результате получим следующее значение поверхности шара: $S = \dfrac{\pi R^2(12-3\sqrt{15})}{2}$. ■

12.216. $\dfrac{a^3(5+\sqrt{5})}{24}$.

12.217. □ Пусть один из кубов стоит на горизонтальной плоскости, а общий отрезок соединяет середины его противоположных вертикальных ребер. Рассмотрим вид сверху (рис. Р. 12.57). Проекцию общей части двух кубов составляет фигура $ACDBEF$, при этом $CDEF$ — грань параллелепипеда, а BED — проекция грани пирамиды (на рис. 12.58 части второго куба, выступающие за пределы первого, не изображены). Основание пирамиды — вертикальная грань параллелепипеда, площадь которой равна $DE \cdot a$. Так как $DE = a$, $BK = \dfrac{a}{2}$, то суммарный объем двух пирамид $V_1 = 2\cdot\dfrac{1}{3}a^2\cdot\dfrac{a}{2} = \dfrac{a^3}{3}$. Объем параллелепипеда $V_2 = a^2 \cdot CD$, где $CD = AB - a = a\sqrt{2} - a = a(\sqrt{2}-1)$, т. е. $V_2 = a^3(\sqrt{2}-1)$. Итак, объем общей части $V_1 + V_2 = a^3\left(\dfrac{1}{3}+\sqrt{2}-1\right) = \dfrac{(3\sqrt{2}-2)a^3}{3}$. ■

12.218. $0{,}25a^3$. **12.219.** $2(\sqrt{2}-1)a^3$.

12.220. □ Пусть первоначально угол поворота равен 0°. Если провести сечение через центр общей части двух кубов перпендикулярно диагонали, то получится правильный шестиугольник. После поворота на 60° этот шестиуголь-

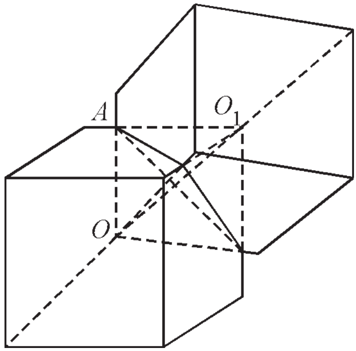

Рис. Р. 12.59

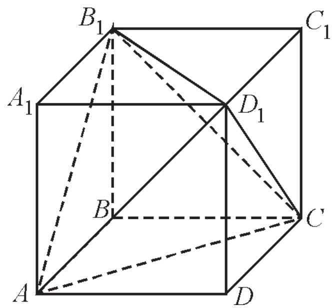

Рис. Р. 12.60

ник совместится сам с собой, т. е. ребра кубов пересекаются (рис. Р. 12.59). Искомая общая часть состоит из двух одинаковых правильных треугольных пирамид с вершинами в точках O и O_1. Так как все углы при вершине — прямые, то объем каждой пирамиды $V_1=\frac{b^3}{6}$, где $b = OA$. Высота каждой из пирамид $h=\frac{OO_1}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{4}$. С другой стороны, $V_1=\frac{1}{3}S_{\text{осн}}h$, где $S_{\text{осн}}=\frac{(b\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4}=\frac{b^2\sqrt{3}}{2}$. Имеем $\frac{b^3}{6}=\frac{1}{3}\cdot\frac{b^2\sqrt{3}}{2}h$, откуда $h=\frac{b\sqrt{3}}{3}$. Значит, $\frac{b\sqrt{3}}{3}=\frac{a\sqrt{3}}{4}$, т. е. $b=\frac{3a}{4}$. Итак, искомый объем $V=2V_1=\frac{b^3}{3}=\frac{9a^3}{64}$. ■

12.221. □ По условию $AB = a$ (рис. Р. 12.60); тогда $AB_1=a\sqrt{2}$, как и все остальные ребра построенной пирамиды D_1AB_1C. Значит, все ее грани — правильные треугольники, т. е. D_1AB_1C — правильный тетраэдр, а его полная поверхность $S=4\cdot\frac{2a^2\sqrt{3}}{4}=2a^2\sqrt{3}$. Грани тетраэдра отсекают от куба равные пирамиды, объем каждой из которых $V_1=\frac{a^3}{6}$. Итак, объем тетраэдра $V=a^3-4V_1=a^3-\frac{2a^3}{3}=\frac{a^3}{3}$. ■

12.222. $\frac{a^3}{6}$. **12.223.** $18d^2$.

Г Л А В А 14

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ

14.001. ☐ Пусть P, N и K — точки касания вписанной окружности со сторонами ΔABC (рис. Р. 14.1). По условию $KB = n$, $CK = m$, где $n > m$. Положим $AB = x$; тогда $AN = AB - NB = x - n$. Согласно теореме Пифагора, имеем $x^2 = (x - n + m)^2 + (m + n)^2$; $x^2 = x^2 + n^2 + m^2 - 2xn + 2xm - 2mn + m^2 + 2mn + n^2$;

$2(n - m)x = 2(m^2 + n^2)$. Итак, $AB = x = \dfrac{m^2 + n^2}{n - m}$. ■

14.002. ☐ Пусть a и b — катеты, c — гипотенуза прямоугольного треугольника. Согласно условию, $a + b = 8$, т. е. $b = 8 - a$. Предположим, что $c = 5$; тогда получим уравнение $a^2 + (8 - a)^2 = 5^2$, или $a^2 + 64 - 16a + a^2 - 25 = 0$, или $2a^2 - 16a + 39 = 0$. Но $0{,}25D = 64 - 2 \cdot 39 < 0$ и, значит, это уравнение не имеет корней. Итак, длина гипотенузы не может быть равной 5 см. ■

14.003. ☐ Докажем, что $\dfrac{ab + bc + ac}{h_a + h_b + h_c} = 2R$ (рис. Р. 14.2). Воспользуемся

теоремой синусов: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$, откуда

$$\frac{ac}{c\sin A} = \frac{ab}{a\sin B} = \frac{bc}{b\sin C} = 2R. \qquad (1)$$

Но $S_{\Delta ABC} = 0{,}5ab\sin C = 0{,}5ah_a$, откуда $h_a = b\sin C$ (это также непосредственно видно из рис. Р. 14.2); аналогично $h_b = c\sin A$, $h_c = a\sin B$. Тогда из соотношений (1) находим $ab = 2Rh_c$, $bc = 2Rh_a$, $ac = 2Rh_b$. Сложив эти равенства, получим

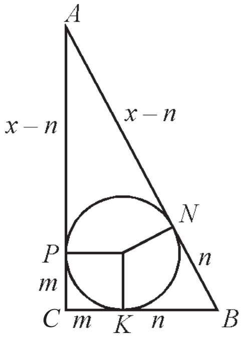

Рис. Р. 14.1

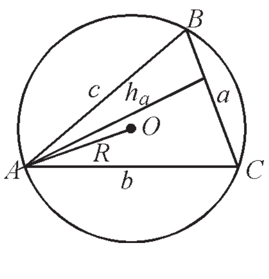

Рис. Р. 14.2

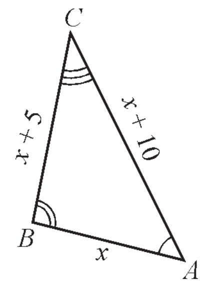

Рис. Р. 14.3

$$ab+bc+ac=2R(h_a+h_b+h_c),\text{ или }\frac{ab+bc+ac}{h_a+h_b+h_c}=2R. \blacksquare$$

14.004. □ Пусть в ΔABC (рис. Р. 14.3) $AB = x$, $BC = x + 5$ и $AC = x + 10$, где $x > 5$. Согласно теореме косинусов, имеем $(x + 10)^2 = x^2 + (x + 5)^2 - 2x(x + 5)\cos B$,

откуда $\cos B=\frac{x^2-10x+75}{2x(x+5)}=\frac{(x+5)(x-15)}{2x(x+5)}=\frac{x-15}{2x}$. Так как $0 < \cos B < 1$, то

$0<\frac{x-15}{2x}<1.$ Наименьшим значением x, при котором выполняется это неравенство, является $x = 15$. Поэтому наибольшее число, обладающее указанным в условии свойством, есть $x + 10 = 25$. ■

14.005. □ По условию $BD = DC = a$, $\angle BAD = \angle CAD = \alpha$ (рис. Р. 14.4); требуется доказать, что ΔABC — равнобедренный. В ΔABD и ΔACD по теореме косинусов имеем $a^2 = c^2 + m^2 - 2mc\cos\alpha$, $a^2 = b^2 + m^2 - 2mb\cos\alpha$. Вычитая одно выражение из другого, получим $(c^2 - b^2) - 2m(c - b)\cos\alpha = 0$, или $(c - b)(c + b - 2m\cos\alpha) = 0$. Так как $c + b - 2m\cos\alpha \neq 0$, то $c = b$, т. е. ΔABC — равнобедренный. ■

14.006. □ Согласно условию, в ΔABC (рис. Р. 14.5) $AB = 2a$, $BC = 3a$, $AC = 4a$. Используя формулу (11.37), находим $AD : DB = AC : BC = 4a : 3a = 4 : 3$.

Так как $AD + DB = 2a$, то $AD=\frac{4}{7}\cdot 2a=\frac{8a}{7}$, $BD=\frac{3}{7}\cdot 2a=\frac{6a}{7}$. Но BO — биссектриса в ΔDBC и, значит, $OC:OD=BC:BD=3a:\frac{6a}{7}=\frac{7}{2}$. ■

14.007. 12, 15 и 18 см.

14.008. □ Находим (рис. Р. 14.6) $AH=HD=\sqrt{25-24}=1$ (см), т. е. $AD = 2$ см.

Далее имеем $\frac{BC}{DC}=\frac{AB}{AD}=\frac{5}{2}$. Известно, что длина биссектрисы выражается фор-

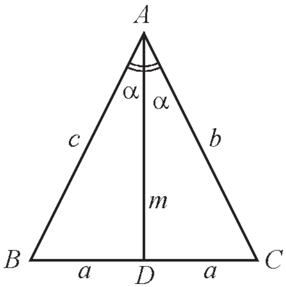

Рис. Р. 14.4

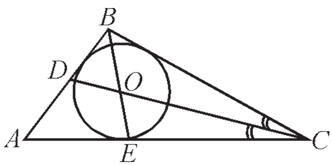

Рис. Р. 14.5

ОГЛАВЛЕНИЕ