



# СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие .....	7
<b>ТЕМА 1. ВЫЧИСЛЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ .....</b>	<b>13</b>
1.1. Арифметические действия. Корень. Степень. Логарифм .....	13
Арифметические действия с натуральными числами .....	14
Признаки делимости натуральных чисел .....	14
Модуль числа .....	16
Арифметические действия с действительными числами .....	17
Дроби .....	19
Логарифм .....	24
1.2. Числовые и буквенные выражения .....	25
Геометрические формулы .....	26
Алгебраические формулы .....	28
Формулы из «физических задач» .....	28
Формулы из «экономических задач» .....	30
1.3. Преобразования буквенных выражений, включающих степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции .....	32
Формулы сокращённого умножения (базовый уровень) .....	33
Формулы сокращённого умножения (профильный уровень) .....	35
Углы на тригонометрической окружности .....	38
Определение тригонометрических функций .....	38
Обратные тригонометрические функции .....	39
Формулы приведения .....	39
Знаки преобразуемых тригонометрических функций .....	40
Тригонометрические формулы .....	40
<b>ТЕМА 2. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА .....</b>	<b>45</b>
2.1. Уравнения .....	45
Особенности решения уравнений разных типов .....	46
Иррациональные уравнения .....	48

Показательные и логарифмические уравнения .....	50
Тригонометрические уравнения .....	53
Свойства элементарных функций .....	55
<b>2.2. Неравенства .....</b>	<b>57</b>
Решение неравенств .....	58
Алгебраические неравенства .....	58
Метод интервалов .....	59
Иррациональные неравенства .....	63
Показательные и логарифмические неравенства .....	64
 <b>ТЕМА 3. ЧТЕНИЕ ГРАФИКОВ И ДИАГРАММ. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ .....</b>	 <b>75</b>
3.1. Чтение графиков и диаграмм .....	75
3.2. Исследование функций .....	80
Графики элементарных функций .....	80
Свойства элементарных функций .....	83
Чтение функции по изображённому графику .....	83
Исследование функции с помощью производной .....	84
Применение производной к исследованию функции .....	84
 <b>ТЕМА 4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ .....</b>	 <b>99</b>
4.1. Планиметрические задачи .....	99
Углы .....	99
Треугольники .....	100
Медиана, биссектриса, средняя линия треугольника .....	103
Четырёхугольники. Многоугольники .....	104
Окружность .....	107
4.2. Стереометрические задачи .....	119
Пирамида .....	120
Параллелепипед .....	121
Тела вращения .....	122

<b>ТЕМА 5. ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ</b> .....	130
5.1. Математические модели на языке алгебры .....	130
Текстовые задачи .....	136
Задачи на части и проценты .....	137
Задачи на выполнение определённого объёма работ .....	139
Задачи на движение .....	141
Задачи на сплавы, растворы и смеси .....	143
5.2. Математические модели на языке геометрии .....	147
5.3. Математические модели на языке логики .....	149
5.4. Математические модели на языке вероятности .....	151
Основные понятия теории вероятностей .....	152
Классическое определение вероятности .....	152
Теоремы о вероятностях событий .....	153
 <b>ТЕМА 6. ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ</b> .....	 157
6.1. Текстовая задача на части и проценты .....	157
6.2. Текстовая арифметическая задача .....	160
6.3. Задание на сопоставление различных величин .....	162
 <b>ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ</b> .....	 169
Тема 1. Вычисления и преобразования .....	169
Тема 2. Уравнения и неравенства .....	177
Тема 3. Чтение графиков и диаграмм. Исследование функций .....	187
Тема 4. Геометрические задачи .....	203
Тема 5. Исследование математической модели .....	207
Тема 6. Прикладные задачи .....	220
Ответы к заданиям для самостоятельного решения .....	226
 <b>Инструкция по выполнению экзаменационной работы</b> .....	 241
<b>ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ВАРИАНТЫ</b> .....	242
Вариант 1 .....	242

Вариант 2 . . . . .	250
Вариант 3 . . . . .	258
Вариант 4 . . . . .	265
Вариант 5 . . . . .	273
Вариант 6 . . . . .	281
Вариант 7 . . . . .	288
Вариант 8 . . . . .	296
Вариант 9 . . . . .	304
Вариант 10 . . . . .	312
Ответы и критерии оценивания . . . . .	320

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная книга — учебное пособие для быстрой и эффективной подготовки школьников к единому государственному экзамену по математике базового и профильного уровней. Она будет полезна и преподавателям, занимающимся подготовкой учащихся к сдаче экзамена в формате ЕГЭ.

Организация систематического повторения материала, изученного в 5–11 классах, является основой подготовки к ЕГЭ. Пособие призвано оказать помощь в систематизации, углублении, обобщении знаний основных тем курса:

- «Вычисления и преобразования»,
- «Уравнения и неравенства»,
- «Чтение графиков и диаграмм. Исследование функций»,
- «Геометрические задачи»,
- «Исследование математической модели»,
- «Прикладные задачи».

Материал пособия содержит в себе всё необходимое для последовательной подготовки к ЕГЭ. Краткая, но ёмкая теоретическая информация позволит легко и быстро получить сведения, необходимые для изучения конкретных тем. В каждой теме содержится подробный разбор экзаменационных заданий как профильного, так и базового уровня.

Для закрепления полученных знаний в разделе «Задания для самостоятельного решения» размещено большое количество примеров и задач. Проверить себя и оценить уровень подготовки позволят ответы в конце раздела.

В разделе «Тренировочные варианты» предлагаются 10 экзаменационных вариантов, составленных в соответствии с демонстрационным вариантом и спецификацией 2022 года. Каждый вариант включает в себя 18 заданий, различающихся уровнем сложности. Первая часть экзаменационной работы состоит из 11 заданий с кратким ответом, а вторая часть — из 7 заданий с развёрнутым ответом. Задания проверяют материал всех тематических блоков.

В конце размещены ответы и критерии оценки для проверки правильности решений.

Материал пособия подобран и изложен на основе большого педагогического опыта автора в подготовке учеников к экзаменам по математике в формате ЕГЭ.

Решить абсолютно все задания за отведённое время экзамена очень трудно. Очень часто наиболее сильные участники экзамена, стремясь как можно скорее заняться сложными и интересными задачами второй части, допускают обидные ошибки в простых задачах с кратким ответом.

### СОВЕТ

**Внимательно проверьте решения простых задач, прежде чем погружаться в решение сложных!**

Постарайтесь запомнить как можно больше формул!

Внимательно разберите примеры, не пропускайте их! Они помогут лучше усвоить правила и алгоритмы вычислений, отработать навыки быстрого выполнения заданий разных типов.

**В связи с возможными изменениями в формате и количестве заданий рекомендуем в процессе подготовки к экзамену обращаться к материалам сайта официального разработчика экзаменационных заданий — Федерального института педагогических измерений: [www.fipi.ru](http://www.fipi.ru).**

**Желаем успеха!**

**Список необходимых умений  
для успешной сдачи ЕГЭ по математике**

<b>1</b>	<b>Уметь выполнять вычисления и преобразования</b>
1.1	Выполнять арифметические действия, сочетая устные и письменные приёмы; находить значения корня натуральной степени, степени с рациональным показателем, логарифма
1.2	Вычислять значения числовых и буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования
1.3	Проводить по известным формулам и правилам преобразования буквенных выражений, включающих степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции
<b>2</b>	<b>Уметь решать уравнения и неравенства</b>
2.1	Решать рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения, их системы
2.2	Решать рациональные, показательные и логарифмические неравенства, их системы
<b>3</b>	<b>Уметь выполнять действия с функциями</b>
3.1	Определять значение функции по значению аргумента при различных способах задания функции; описывать по графику поведение и свойства функции, находить по графику функции наибольшее и наименьшее значения; строить графики изученных функций
3.2	Вычислять производные и первообразные элементарных функций
3.3	Исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшее и наименьшее значения функции
<b>4</b>	<b>Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами</b>

4.1	Решать планиметрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей)
4.2	Решать простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей); использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы
5	<b>Уметь строить и исследовать простейшие математические векторы</b>
5.1	Моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения и неравенства по условию задачи; исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры
5.2	Моделировать реальные ситуации на языке геометрии, исследовать построенные модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры; решать практические задачи, связанные с нахождением геометрических величин
5.3	Проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений, распознавать логически некорректные рассуждения
5.4	Моделировать реальные ситуации на языке теории вероятностей и статистики, вычислять в простейших случаях вероятности событий
6	<b>Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни</b>
6.1	Анализировать реальные числовые данные, информацию статистического характера; осуществлять практические расчёты по формулам; пользоваться оценкой и прикидкой при практических расчётах
6.2	Решать прикладные задачи, в том числе социально-экономического и физического характера, на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение скорости и ускорения

- ➔ Краткие теоретические сведения
- ➔ Примеры экзаменационных заданий
- ➔ Разбор и алгоритмы решений



# Тема 1

## ВЫЧИСЛЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Вспомним такие понятия, как натуральные числа, дроби, рациональные и действительные числа, корень, степень, логарифм. Научимся вычислять значения числовых и буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования буквенных выражений, включающих степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции.

### СОВЕТ

На экзамене вместе с заданиями тебе будут выданы некоторые справочные материалы. Их мы разместили в конце пособия. Ознакомься с ними, так тебе будет проще понять, какую информацию следует выучить, а какой ты сможешь воспользоваться из предоставленных экзаменационных материалов. Внимательно разбери примеры, не пропускай их. Они помогут лучше усвоить правила и алгоритмы вычислений, отработать навыки быстрого выполнения заданий разных типов.

### 1.1. Арифметические действия. Корень. Степень. Логарифм

*Изучив материал данного раздела вы научитесь:*

- *выполнять арифметические действия, сочетая устные и письменные приёмы;*
- *находить значения корней натуральной степени большей 1, степени с рациональным показателем, логарифма.*

**БУ** ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ СПРАВОЧНИК

**Арифметические действия с натуральными числами**

Закон	Действия	
	Сложение $a + b = p$ $a, b$ — слагаемые, $p$ — сумма	Умножение $a \cdot b = p$ $a, b$ — множители, $p$ — произведение
<b>Переместительный</b>	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
<b>Сочетательный</b>	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
<b>Распределительный</b>	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	

**Признаки делимости натуральных чисел**

Обозначение:  $a$  делится на  $b \Leftrightarrow a : b$

Чётные числа:  $\{0, 2, 4, 6, 8\}$

Число делится <u>на 2</u> ( $2 = 2^1$ ), если его последняя цифра чётная	$11135\underline{4} : 2 \Rightarrow 4$ — чётное число
Число делится <u>на 4</u> ( $4 = 2^2$ ), если число составленное из последних двух цифр, делится на 4	$173\underline{32} : 4 \Rightarrow 32 : 4 = 8$
Число делится <u>на 8</u> ( $8 = 2^3$ ), если число составленное из последних трёх цифр, делится на 8	$97\underline{216} : 8 \Rightarrow 216 : 8 = 27$
Число делится <u>на 5</u> ( $5 = 5^1$ ), если его последняя цифра 0 или 5	$371\underline{5} : 5 \Rightarrow 5$ — последняя цифра
Число делится <u>на 25</u> ( $25 = 5^2$ ), если число, составленное из двух последних цифр, делится на 25 или две последние цифры 0	$173\underline{75} : 25 \Rightarrow 75 : 25 = 3$

Число делится на <u>10</u> , если его последняя цифра 0	$530 : 10 \Rightarrow 0$ — последняя цифра
Число делится на <u>3</u> , если сумма его цифр делится на 3	$381 : 3 \Rightarrow 3 + 8 + 1 = 12; 12 : 3 = 4$
Число делится на <u>9</u> , если сумма его цифр делится на 9	$927 : 9 \Rightarrow 9 + 2 + 7 = 18; 18 : 9 = 2$
Число делится на <u>11</u> , если разность между суммой цифр, стоящих на нечётных местах (считая справа налево), и суммой цифр, стоящих на чётных местах, делится на 11	$8536 : 11 \Rightarrow (3 + 8) - (5 + 6) = 0;$ $0 : 11 = 0$

### СОВЕТ

Для решения задач базового уровня на вычисление значения числового или буквенного выражения, нахождение чисел, удовлетворяющих определенным условиям, используют признаки делимости чисел.



### ПРИМЕРЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ЗАДАНИЙ

**БУ Задание №1.** Найдите четырёхзначное число, кратное 88, все цифры которого различны и чётны. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

**Решение.**

Число делится на 88, если оно делится на 8 и на 11.

**Признак делимости на 8:** число делится на 8 тогда и только тогда, когда три его последние цифры — нули или образуют число, которое делится на 8.

**Признак делимости на 11:** число делится на 11, если сумма цифр, которые стоят на чётных местах, равна сумме цифр, стоящих на нечётных местах, либо разность этих сумм делится на 11.

Используя признак делимости на 8 и учитывая, что все цифры искомого числа должны быть чётны и различны, получаем, что последними цифрами числа могут быть: 024, 048, 064, 208, 240, 264, 280, 408, 480, 608, 624, 640, 648, 680, 824, 840, 864.

Используя признак делимости на 11 получим, что условию задачи удовлетворяют числа: 6248, 8624, 2640.

**Ответ:** 2640 или 6248, или 8624.