Содержание

Некоторые постоянные

$\frac{1}{2}=0{,}5$	$\frac{1}{8}=0{,}125$
$\frac{1}{3}\approx 0{,}333$	$\frac{1}{9}\approx 0{,}111$
$\frac{1}{4}=0{,}25$	$\frac{1}{10}=0{,}1$
$\frac{1}{5}=0{,}2$	$\frac{1}{100}=0{,}01$
$\frac{1}{6}\approx 0{,}166$	$\frac{1}{1000}=0{,}001$
$\frac{1}{7}\approx 0{,}142$	$\frac{1}{10\,000}=0{,}0001$

$\sqrt{2}\approx 1{,}414$	$\sqrt{7}\approx 2{,}645$
$\sqrt{3}\approx 1{,}732$	$\sqrt{8}=2\sqrt{2}\approx 2{,}828$
$\sqrt{5}\approx 2{,}236$	$\sqrt{10}\approx 3{,}162$
$\sqrt{6}\approx 2{,}449$	

$0!=1$	$3!=6$
$1!=1$	$4!=24$
$2!=2$	$5!=120$

Некоторые постоянные

$\ln 0 = 1$	$\ln 6 \approx 1{,}791$
$\ln 2 \approx 0{,}693$	$\ln 7 \approx 1{,}945$
$\ln 3 \approx 1{,}098$	$\ln 8 \approx 2{,}079$
$\ln 4 \approx 1{,}386$	$\ln 9 \approx 2{,}197$
$\ln 5 \approx 1{,}609$	

$\lg 1 = 0$	$\lg 6 \approx 0{,}778$
$\lg 2 \approx 0{,}301$	$\lg 7 \approx 0{,}845$
$\lg 3 \approx 0{,}477$	$\lg 8 \approx 0{,}903$
$\lg 4 \approx 0{,}602$	$\lg 9 \approx 0{,}954$
$\lg 5 \approx 0{,}699$	

$\pi \approx 3{,}141$	$\frac{\pi}{2} \approx 1{,}570$
$\pi^2 \approx 9{,}869$	$\frac{\pi}{3} \approx 1{,}047$
$\pi^3 \approx 31{,}006$	$\frac{1}{\pi} \approx 0{,}318$
$\pi^4 \approx 97{,}409$	$\sqrt{\pi} \approx 1{,}772$
$2\pi \approx 6{,}283$	

$$e \approx 2{,}718$$

$$e^2 \approx 7{,}389$$

$$\frac{1}{e} \approx 0{,}367$$

$$\sqrt{e} \approx 1{,}648$$

1. Начала анализа и алгебры

1.1. Числа, действия с числами

1.1.1. Классы чисел

Натуральные числа

Натуральными называют числа, с помощью которых можно считать предметы: 1, 2, 3 и т. д. Число 0 не является натуральным.

Последовательность всех натуральных чисел, расположенных в порядке их возрастания, называется **натуральным рядом**.

Множество всех натуральных чисел принято обозначать символом N (от лат. *naturalis* — естественный):

$N = \{1, 2, 3\ldots\}$.

Любое натуральное число можно представить в виде суммы разрядных слагаемых:

$$a = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2 a_1 a_0} =$$

$$= a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0,$$

где 10^i— i-я разрядная единица, a_i — количество i-х разрядных единиц, $a_n > 0$.

Таблица разрядов и классов натуральных чисел

Порядок	Значение разрядной единицы	Классы	Разряды
0	10^0	единица	единицы
1	10^1		десятки
2	10^2		сотни
3	10^3	тысяча	единицы тысяч
4	10^4		десятки тысяч
5	10^5		сотни тысяч
6	10^6	миллион	единицы миллионов
7	10^7		десятки миллионов
8	10^8		сотни миллионов
9	10^9	миллиард	единицы миллиардов
10	10^{10}		десятки миллиардов
11	10^{11}		сотни миллиардов

Числа высокой разрядности:
10^9 — миллиард,
10^{12} — триллион,
10^{15} — квадриллион,
10^{18} — квинтиллион,
10^{21} — секстиллион,
10^{24} — септиллион,
10^{27} — октиллион,
10^{30} — нониллион,
10^{33} — дециллион.

Целые числа

Два числа, отличающиеся друг от друга только знаком, называются **противоположными** (например: +1 и –1, +5 и –5). **Положительные** числа — это числа больше нуля (со знаком +), а **отрицательные** — это числа меньше нуля (со знаком –).

Целыми называются все натуральные числа, число 0 и все отрицательные числа, противоположные натуральным. Множество целых чисел обозначается Z:

$Z = \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2\ldots\}$.

Однозначными называются целые неотрицательные числа, которые можно записать с помощью одной десятичной цифры (0, 1, 2…9), **двузначными** — с помощью двух цифр (10, 11, 12…99) и т. д. Числа, для записи которых используется более одной цифры, называются **многозначными**.

Рациональные числа

Число, которое можно записать в виде отношения $\frac{m}{n}$, где m — целое, n — натуральное, называется **рациональным**.

Множество рациональных чисел обозначается Q:

$$Q = \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m \in Z,\ n \in N \right\}.$$

Существуют две формы записи рационального числа — обыкновенная и десятичная дроби.

Обыкновенная (или **простая**) дробь — запись рационального числа в виде $\pm\frac{m}{n}$ ($n \neq 0$). При этом делимое m называется **числителем** дроби, а делитель n — **знаменателем**.

Обыкновенная дробь может быть правильной, неправильной и смешанной. **Правильной** называется дробь, у которой модуль числителя меньше модуля знаменателя ($|m| < n$) и которая представляет рациональные числа, по модулю меньшие единицы. Дробь, не являющаяся правильной, называется **неправильной** и представляет рациональное число, большее или равное единице по модулю.

Неправильную дробь можно представить в виде суммы целого числа и правильной дроби, называемой **смешанной** дробью.

Десятичной дробью называют позиционную запись дроби. Она выглядит следующим образом:

$$\pm \overline{a_1 a_2 \ldots a_n, b_1 b_2 \ldots} \,.$$

Часть записи, которая стоит до позиционной запятой, является **целой частью** числа (дроби), а стоящая после запятой — **дробной частью**. Любая обыкновенная дробь может быть представлена единственным образом в виде конечной десятичной дроби или в виде бесконечной периодической дроби.

Если десятичная дробь имеет конечное число знаков после запятой, то она и называется **конечной десятичной дробью**.

Если в записи десятичной дроби одна цифра или группа цифр начинают повторяться бесконечно много раз, такую дробь называют **периодической**. В краткой записи периодической дроби повторяющуюся цифру (или группу цифр) пишут в скобках. Эту цифру (или группу цифр) называют **периодом дроби**.

Переход из периодической дроби в обыкновенную осуществляется с помощью формулы:

$$\overline{a_1a_2\ldots a_n, b_1b_2\ldots b_m(c_1c_2\ldots c_k)} = \overline{a_1a_2\ldots a_n} + \frac{\overline{b_1b_2\ldots b_mc_1c_2\ldots c_k} - \overline{b_1b_2\ldots b_m}}{(10^k-1)\cdot 10^m}.$$

Иррациональные числа

Иррациональное число — это число, которое не является рациональным, то есть не может быть представлено в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое, n — натуральное число.

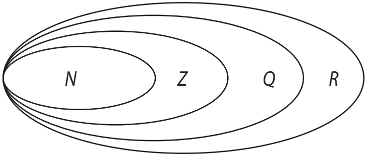
Множество иррациональных чисел обозначается заглавной латинской буквой I.

Иррациональное число может быть представлено в виде бесконечной непериодической десятичной дроби.

Действительные числа

Рациональные числа и иррациональные числа образуют множество **действительных** (или **вещественных**) чисел.

Множество действительных чисел обозначается заглавной латинской буквой R.



1.1.2. Правила округления

Округление натуральных чисел

Под **округлением** натурального числа понимают замену его таким ближайшим по значению числом, у которого одна или несколько последних цифр в его записи заменены нулями.

Чтобы округлить натуральное число, нужно в записи числа выбрать разряд, до которого производится округление. Цифра, записанная в выбранном разряде:

- не меняется, если следующая за ней справа цифра — 0, 1, 2, 3 или 4;
- увеличивается на единицу, если следующая за ней справа цифра — 5, 6, 7, 8 или 9.

Все цифры, стоящие справа от данного разряда, заменяются нулями.

Если в разряде, до которого производится округление, стоит цифра 9 и необходимо её увеличить на единицу, то в этом разряде записывается цифра 0, а цифра в соседнем старшем разряде (слева) увеличивается на 1.

Округление десятичных дробей

Чтобы округлить десятичную дробь, нужно в записи числа выбрать разряд, до которого производится округление. Цифра, записанная в данном разряде:

- не меняется, если следующая за ней справа цифра — 0, 1, 2, 3 или 4;
- увеличивается на единицу, если следующая за ней справа цифра — 5, 6, 7, 8 или 9.

Все цифры, стоящие справа от данного разряда, заменяются нулями. Если эти нули находятся в дробной части числа, то их не пишут.

Если в разряде, до которого производится округление, стоит цифра 9 и необходимо её увеличить на единицу, то в этом разряде записывается цифра 0, а цифра в предыдущем разряде (слева) увеличивается на 1.

1.1.3. Модуль действительного числа и его свойства

Модуль действительного числа a (абсолютная величина) — это само число a, если $a \geq 0$, и противоположное число $-a$, если $a < 0$:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}.$$

Свойства:

- $|-a| = |a|$;
- $|ab| = |a| \cdot |b|$;
- $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$;
- $|a^k| = |a|^k$, если a^k существует;
- $|a| \geq 0$, причём $|a| = 0$ тогда и только тогда, когда $a = 0$;
- $a \leq |a|$;
- $-|a| \leq a$;
- $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$;
- $|a + b| \leq |a| + |b|$;
- $|a - b| \leq |a| + |b|$;
- $|a - b| \geq |a| - |b|$.

1.1.4. Дробные выражения

Основное свойство дроби:

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b},\ b \neq 0,\ c \neq 0.$$

Действия с дробями (предполагается, что знаменатели дробей отличны от нуля):

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

1.1.5. Проценты

Процент (от лат. *per cent* — «на сотню») — одна сотая часть числа. Передаётся знаком %. Используется для обозначения доли чего-либо по отношению к целому. Чтобы вычислить p % от a, нужно a умножить на p и разделить на 100:

$$b = \frac{a \cdot p}{100}.$$

Обратно, если известно, что p % искомой величины равны b, то чтобы вычислить искомую величину, нужно b разделить на p и умножить на 100:

$$a = \frac{b \cdot 100}{p}.$$

1.1.6. Пропорциональность

Пропорциональными называются две взаимно зависимые величины, если отношение их значений остаётся неизменным.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},\ b \neq 0,\ d \neq 0$$

(a, d — крайние члены пропорции, b, c — средние члены пропорции).

Основное свойство пропорции:

$$a \cdot d = b \cdot c.$$

Выражение члена пропорции через остальные:

$$a = \frac{b \cdot c}{d};\ b = \frac{a \cdot d}{c};\ c = \frac{a \cdot d}{b};\ d = \frac{b \cdot c}{a}.$$

Если истинна пропорция $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то истинны и следующие пропорции:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \qquad \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \qquad \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$$

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \qquad \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \qquad \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

$$\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$$

Две величины называются **прямо пропорциональными**, если при увеличении (уменьшении) одной из них в несколько раз другая увеличивается (уменьшается) во столько же раз.

Прямая пропорциональность — функция, заданная формулой

$$y = k \cdot x,\ k \neq 0,$$

где k — коэффициент пропорциональности, y, x — пропорциональные переменные.

Свойство прямой пропорциональности:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}.$$

Обратная пропорциональность — функция, заданная формулой

$$y = \frac{k}{x},\ k \neq 0,\ x \neq 0.$$

Свойство обратной пропорциональности:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}.$$

1.1.7. Степени и корни

Степень с целым показателем

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}},\ \text{где}\ n \in N,\ n \neq 1$$

$a^1 = a$ $\qquad$ $a^0 = 1\ (a \neq 0)$

$1^n = 1$ $\qquad$ $0^n = 0\ (n > 0)$

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}\ (a \neq 0)$

Свойства:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\qquad$ $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \dfrac{1}{a^{n-m}}$

$(ab)^n = a^n \cdot b^n$ $\qquad$ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n}$

Таблица квадратов чисел от 0 до 99

Десятки	Единицы				
	0	1	2	3	4
0	0	1	4	9	16
1	100	121	144	169	196
2	400	441	484	529	576
3	900	961	1024	1089	1156
4	1600	1681	1764	1849	1936
5	2500	2601	2704	2809	2916
6	3600	3721	3844	3969	4096
7	4900	5041	5184	5329	5476
8	6400	6561	6724	6889	7056
9	8100	8281	8464	8649	8836

Корень n–й степени

Корнем степени n из действительного числа a, где n — натуральное число, называется такое действительное число b, n-я степень которого равна a:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a.$$

Таблица квадратов чисел от 0 до 99

Десятки	Единицы				
	5	6	7	8	9
0	25	36	49	64	81
1	225	256	289	324	361
2	625	676	729	784	841
3	1225	1296	1369	1444	1521
4	2025	2116	2209	2304	2401
5	3025	3136	3249	3364	3481
6	4225	4356	4489	4624	4761
7	5625	5776	5929	6084	6241
8	7225	7396	7569	7744	7921
9	9025	9216	9409	9604	9801

Нахождение корня n-й степени из числа a называется **извлечением корня**. Число a называется **подкоренным числом** (выражением), n — **показателем корня**. При нечётном n существует корень n-й степени для любого действительного числа a.

При чётном n существует корень n-й степени только для неотрицательного числа a.

Чтобы устранить двузначность корня n-й степени из числа a, вводится понятие арифметического корня n-й степени из числа a.

Если $a \geq 0$ и n — натуральное число, большее 1, то существует одно и только одно неотрицательное число b, при котором выполняется равенство $b^n = a$. Это число b называется **арифметическим корнем** n-й степени из неотрицательного числа a и обозначается $\sqrt[n]{a}$.

Свойства:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b > 0)$$

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[n \cdot m]{a^{n+m}}$$

В частности, $\sqrt{a}$ — арифметический квадратный корень:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a, \ \sqrt{a^2} = |a|.$$

Степень с дробным (рациональным) показателем

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, a > 0, n \in N, n \geq 2$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{n}{m}}, m \in Z,\ n \in N, n \geq 2, a > 0$$

Свойства степени с действительным показателем

$(a > 0, b > 0, x \in R, y \in R)$

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$

$(a^x)^y = (a^y)^x = a^{x+y}$

$a^x = 10^{x \cdot \lg a}$

$a^x = b^{x \cdot \log_b a}$

$a^x = e^{x \cdot \ln a} = \exp(x \cdot \ln a)$

1.1.8. Числовые последовательности и прогрессии

Числовые последовательности

Последовательностью называют перенумерованное множество чисел (имеющее конечное или бесконечное число членов): $\{a_1, a_2 \ldots a_n \ldots\}$.

Последовательность называют:

- *возрастающей,* если $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots$;
- *неубывающей,* если $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \le \ldots$;
- *убывающей,* если $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots$;
- *невозрастающей,* если

$$a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge \ge a_n \ge \ldots.$$

Последовательности этих четырёх типов называют **монотонными**.

Последовательность называется **ограниченной**, если существуют такие числа M и m, что для всех элементов последовательности (для любого k) выполняется неравенство $m \le a_k \le M$. Если существует только M, то последовательность называют *ограниченной сверху*, если же существует лишь точка m — *ограниченной снизу*.

Арифметическая прогрессия

Арифметической прогрессией называется такая числовая последовательность $\{a_1, a_2 \ldots a_n \ldots\}$, каждый член которой, начиная со второго, получается прибавлением к предыдущему одного и того же числа d, называемого **разностью прогрессии**: $a_{n+1} = a_n + d$ $(n = 1, 2\ldots)$.

Если разность прогрессии — положительное число, то прогрессия является возрастающей числовой последовательностью, если отрицательное — убывающей.

Формула *n*-го члена:

$$a_n = a_1 + d \cdot (n - 1).$$

Свойства:

$$a_k - a_{k-i} = a_{k+i} - a_k \Rightarrow a_k = \frac{a_{k-i} + a_{k+i}}{2};$$

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \ldots = a_k + a_{n-k+1} = \\ = \ldots = a_n + a_1.$$

Формула суммы *n* первых членов:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{2a_1 + d \cdot (n - 1)}{2} \cdot n.$$

Геометрическая прогрессия

Геометрической прогрессией называется такая числовая последовательность $\{b_1, b_2 \ldots b_n \ldots\}$, первый член которой не равен 0, а каждый последующий её член, начиная со второго, получается умножением предыдущего члена на одно и то же число q, не равное 1 и называемое знаменателем прогрессии:

$$b_n = b_{n-1} \cdot q.$$

Формула *n*-го члена: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

Свойства:

- при $q > 0$ все члены геометрической прогрессии одного знака, при $q < 0$ — знаки членов прогрессии чередуются;
- $\frac{b_k}{b_{k-1}} = \frac{b_{k+1}}{b_k} \Rightarrow b_k^2 = b_{k-1} \cdot b_{k+1}.$

Формула суммы n первых членов ($q \neq 1$):

$$S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q - 1} = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}.$$

Бесконечная геометрическая прогрессия, знаменатель которой $|q| < 1$, называется **бесконечной убывающей геометрической прогрессией**. Её члены убывают по абсолютной величине:

$$|b_1| > |b_2| > \ldots > |b_n| > \ldots.$$

Сумма бесконечной геометрической прогрессии:

$$b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + \ldots = \frac{b_1}{1 - q}, \ |q| < 1.$$

Некоторые тождества

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2 \cdot (n + 1)^2}{4}$$

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n - 1)^2 = \frac{n \cdot (4n^2 - 1)}{3}$$

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n - 1)^3 = n^2 \cdot (2n^2 - 1)$$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n + 1) = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2)}{3}$$

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \ldots + n \cdot (3n + 1) = n \cdot (n + 1)^2$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) =$$
$$= \frac{1}{4} \cdot n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) \cdot (n + 3)$$

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot n^2 =$$
$$= (-1)^{n-1} \cdot \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n + 1)} = \frac{n}{n + 1}$$

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n - 1) \cdot (2n + 1)} =$$
$$= \frac{n}{2n + 1}$$

1.1.9. Числовые неравенства

Числовое неравенство — неравенство между действительными числами: если два вещественных числа a и b соединены знаком неравенства $\neq$ или одним из любых отношений порядка $a > b$, или $a < b$, или $a \geq b$, или $a \leq b$, установленных между числами, то говорят, что задано числовое неравенство.

Неравенства бывают:

- строгие — $>$, $<$;
- нестрогие — $\geq$, $\leq$;
- одного смысла (одного знака) — $<$ и $\leq$, $>$ и $\geq$;
- разного смысла (разного знака) — $>$ и $<$, $>$ и $\leq$, $<$ и $\geq$, $\geq$ и $\leq$.

Свойства числовых неравенств

- Если $a < b$, то $b > a$ (свойство антисимметричности).
- Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$ (свойство транзитивности).
- Если $a < b$, то при любом c: $a + c < b + c$.

Примечание. Число c может быть как положительным, так и отрицательным, то есть данное свойство можно интерпретировать следующим образом: если к левой и правой частям числового неравенства добавить (вычесть) одно и то же число — знак неравенства не изменится.

• Если $a + b < c$, то $a < c - b$ — слагаемое можно переносить из левой части числового неравенства в правую, изменив его знак на противоположный.

• Если $a < b$ и $c > 0$, то $ac < bc$ — при умножении левой и правой частей числового неравенства на положительное число знак неравенства не меняется.

• Если $a < b$ и $c < 0$, то $ac > bc$ — при умножении левой и правой частей числового неравенства на отрицательное число знак неравенства меняется на противоположный.

• Если $a < b$, a и b одного знака, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ — неравенства между обратными числами одного знака имеют противоположные знаки.

1.1. Числа, действия с числами

• Если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$, $a - d < b - c$.

• Если $0 < a < b$, $0 < c < d$, то $ac < bd$ — при почленном умножении неравенств между положительными числами одного знака получается неравенство того же знака.

• Если $0 < a < b$, $0 < c < d$, то $\frac{a}{d} < \frac{b}{c}$ — при почленном делении неравенств между положительными числами одного знака получается неравенство того же знака.

• Если $a > 0, b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ — сумма двух обратных положительных чисел меньше 2.

• $\begin{cases} 0 < a < b, x > 0 \Rightarrow a^x < b^x \\ 0 < a < b, x < 0 \Rightarrow a^x < b^x \end{cases}$

• $\begin{cases} 0 < a < b, c > 1 \Rightarrow \log_c a < \log_c b \\ 0 < a < b, 0 < c < 1 \Rightarrow \log_c a > \log_c b \end{cases}$

• Если $|a| < |b|$, то $a^2 < b^2$.

Некоторые неравенства

• Сравнение среднего геометрического и среднего арифметического неотрицательных чисел:

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$$

(равенство лишь при $a = b$);

$$\sqrt{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \le \frac{1}{n} \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$

(равенство лишь при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$).

• $\dfrac{2ab}{a^2+b^2} \le 1, a > 0, b > 0$

(равенство лишь при $a = b$).

• $a + \dfrac{1}{a} \ge 2, a > 0$

(равенство лишь при $a = 1$).

• $\sqrt{a+b} \le \sqrt{a} + \sqrt{b}, a \ge 0, b \ge 0$

(равенство лишь при $ab = 0$).

• $a \ge 0, b \ge 0, \ n \in N \Rightarrow a^n + b^n \le (a+b)^n$.

• Неравенство Буняковского:

$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$.

• Неравенство Бернулли:

$(1 + h)^n \ge 1 + nh, h > -1, n \in N$;

$(1 + h_1)(1 + h_2) \times \ldots \times (1 + h_n) \geq 1 + h_1 + h_2 + \ldots + h_n$

($h_1, h_2, \ldots, h_n$ — числа одного знака, больше –1).

- $n \in N, n > 2 \Rightarrow \sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$.
- $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$.
- $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}, n > 1$.

1.1.10. Логарифмы

Логарифмом положительного числа b по основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$) называется показатель степени, в которую нужно возвести a, чтобы получить b. Основное логарифмическое тождество:

$a^{\log_a b} = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$).

$\lg b$ — десятичный логарифм (логарифм по основанию 10): $10\lg b = b$.

$\ln b$ — натуральный логарифм (логарифм по основанию e): $e^{\lg b} = b$.

Переход от одного основания к другому:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

В частности, $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a} = \dfrac{\lg b}{\lg a} = \dfrac{\ln b}{\ln a}$

Свойства:

$\log_a a = 1$

$\log_{a^k} u = \dfrac{1}{k} \cdot \log_a u$

$\log_a u^k = k \cdot \log_a u$

$\log_a (uv) = \log_a u + \log_a v$

$\log_a 1 = 0$

$\log_{a^k} u^k = \log_a u$

$\log_a \dfrac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$

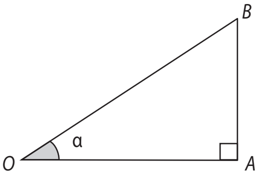
$\log_a \dfrac{1}{v} = -\log_a v$

1.1.11. Тригонометрические формулы

Тригонометрические функции

Тригонометрические функции — элементарные функции, которые исторически возникли при рассмотрении прямоугольных треугольников и выражали зависимости сторон этих треугольников от острых углов.

Прямоугольный треугольник — это треугольник, в котором один угол прямой (то есть составляет 90 °). Сторона, противоположная прямому углу, называется *гипотенузой* (сторона OB на рисунке). Стороны, прилегающие к прямому углу, называются *катетами* (стороны *OA* и *AB* на рисунке).



• Синусом угла α называется отношение противолежащего катета к гипотенузе:

$$\sin\alpha = \frac{AB}{OB}.$$

• Косинусом угла α называется отношение прилежащего катета к гипотенузе:

$$\cos\alpha = \frac{OA}{OB}.$$