



## **ВВЕДЕНИЕ**

*Уважаемые старшеклассники!  
Уважаемые учителя!*

Данное пособие предназначено для подготовки к ЕГЭ по математике.

Сборник содержит тренировочные варианты работ для экзамена профильного уровня, составленные в соответствии с демонстрационным вариантом и спецификацией.

Так как вы избрали экзамен профильного уровня, то ваша цель — поступление в высшее учебное заведение, требующее хорошей математической подготовки. Авторы, обладая большим опытом работы в общеобразовательных учреждениях и подготовки к экзаменам, постарались сделать так, чтобы предложенные варианты не только готовили к ЕГЭ, но и оказывали сильную помощь в подготовке к дополнительным вступительным испытаниям по математике.

В пособии приведено 30 экзаменационных вариантов, из которых несколько имеют подробное решение. Кроме того, авторы старались сделать так, чтобы даже самые простые задания несли информацию, пригодную для подготовки к ЕГЭ. Так как вы планируете продолжать математическое образование, вам потребуется высокий балл для того, чтобы подтвердить хорошее знание математики и свою конкурентоспособность.

Конечно, ваша цель — последние задания, приносящие наибольшее количество баллов. Они снабжены критериями выставления оценок по приведенным решениям. Но это не значит, что задачи 13–19 не могут иметь других решений. Не забывайте про задачи первой части. Очень часто наиболее сильные участники экзамена, стремясь как можно скорее заняться сложными и интересными задачами второй части, допускают обидные ошибки в простых задачах первой части.

Кроме того, для преподавателей школ в пособии приводятся общие решения для некоторых задач, размещенные в приложении.

**Желаем успеха!**



# ВАРИАНТ 1

## Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

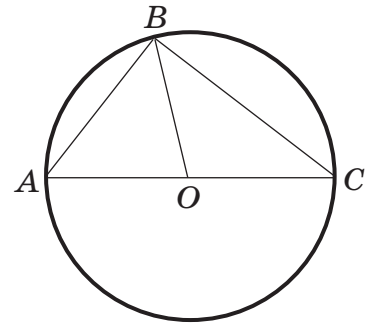
1 Найдите корень уравнения  $4^{2x-3} = 8$ .

Ответ: \_\_\_\_\_ .

2 В непрозрачной урне находятся 12 белых и 8 красных шаров. Наудачу извлекают один шар. Какова вероятность того, что этот шар не будет белым?

Ответ: \_\_\_\_\_ .

3 Вершины треугольника  $ABC$ , вписанного в окружность, делят ее на дуги  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$ , меры которых относятся как числа  $2 : 3 : 5$ . Точка  $O$  — центр окружности. Найдите меру угла  $BOC$ . Ответ укажите в градусах.



Ответ: \_\_\_\_\_ .

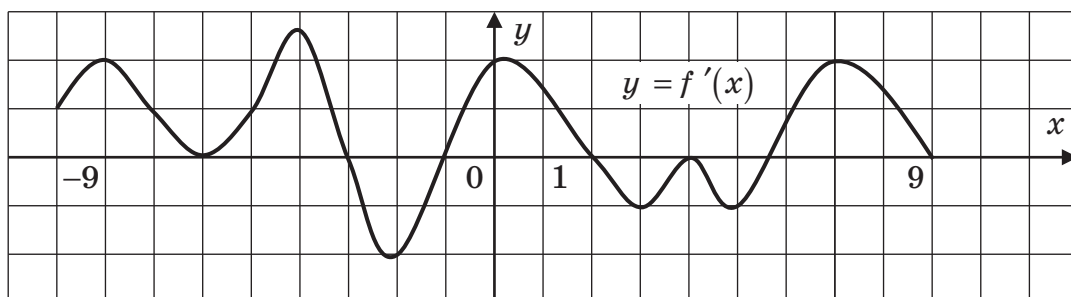
4 Найдите значение выражения  $\frac{2}{7+4\sqrt{3}} + \frac{2}{7-4\sqrt{3}}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_ .

5 Плоскость, параллельная основанию прямого кругового конуса, делит его на конус и усеченный конус, боковые поверхности которых относятся как числа  $1 : 3$ . Найдите, как относится объем усеченного конуса к объему отсеченного конуса.

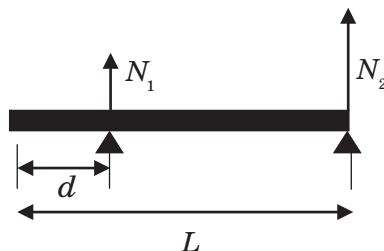
Ответ: \_\_\_\_\_ .

6 На рисунке изображен график производной функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-9; 9)$ . Найдите количество точек максимума функции на данном промежутке.



Ответ: \_\_\_\_\_ .

- 7 Стержень массой  $m = 80$  кг длиной  $L = 5$  м расположен на двух опорах. Одна опора удалена от первого конца стержня на расстояние  $d$ , а вторая находится во втором конце стержня. Сила давления  $N_1$  на первую опору вычисляется по формуле  $N_1 = \frac{mg}{2(L-d)}$ ,  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>. Найдите расстояние  $d$  от первого конца стержня до первой опоры, если  $N_1 = 98$  Н.

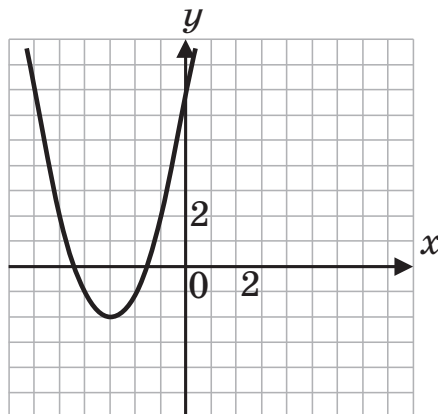


Ответ: \_\_\_\_\_ .

- 8 Первую половину пути поезд ехал со скоростью 30 км/ч, а вторую половину — в 3 раза быстрее. Определите, с какой постоянной скоростью должен был ехать поезд, чтобы прибыть в пункт назначения в то же самое время? Ответ укажите в км/ч.

Ответ: \_\_\_\_\_ .

- 9 На рисунке изображен график функции  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , где числа  $a, b, c$  — целые. Найдите значение  $f(1)$ .



Ответ: \_\_\_\_\_ .

- 10 В цехе работают семь мужчин и три женщины. По табельным номерам наудачу отобраны три человека. Найдите вероятность того, что все отобранные лица окажутся мужчинами. Ответ округлите до тысячных.

Ответ: \_\_\_\_\_ .

- 11 Найдите наибольшую абсциссу точки графика функции  $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 7x - 4$ , в которой касательная к графику функции образует с осью абсцисс угол  $45^\circ$ .

Ответ: \_\_\_\_\_ .

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

## Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте четко и разборчиво.

**12** Решите уравнение  $2\cos 3x + 6\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 0$ .

**13** Основание пирамиды  $SABCD$  — параллелограмм  $ABCD$ . Плоскость сечения проведена через сторону  $AB$ , середину  $M$  бокового ребра  $SC$  и точку  $N$ , принадлежащую ребру  $SD$ .

- а) Докажите, что сечение  $ABMN$  — трапеция.
- б) Найдите, в каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды.

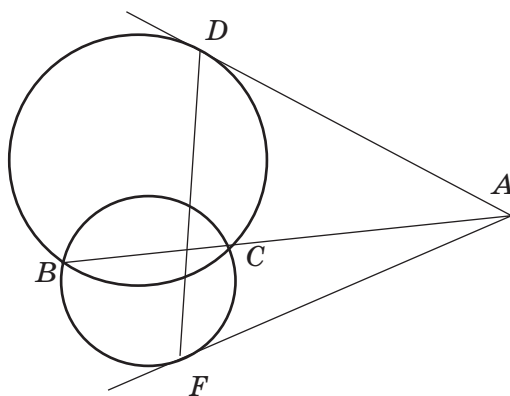
**14** Решите неравенство  $\lg x - \frac{1}{2}\log_{0,1}(5x-4) \geq \sqrt{\frac{4\lg^2 x + \lg^2(5x-4)}{2}}$ .

**15** На собрании акционеров было решено увеличить прибыль предприятия за счет расширения ассортимента продукции. Экономический анализ показал, что:

- 1) дополнительные доходы, приходящиеся на каждый новый вид продукции, окажутся равными 64 000 рублей в год;
- 2) дополнительные расходы при освоении одного нового вида составляют 7000 рублей в год, а освоение каждого последующего вида потребует на 8000 рублей в год больше расходов, чем освоение предыдущего.

Найдите значение максимально возможного прироста прибыли. Ответ укажите в тысячах рублей.

**16**  $BC$  — общая хорда двух пересекающихся окружностей. На прямой  $BC$  выбрана точка  $A$ , и из этой точки к окружностям проведены касательные  $AD$  и  $AF$ , угол между которыми равен  $\frac{\pi}{6}$ .



- а) Докажите, что  $\triangle DAF$  равнобедренный.
- б) Найдите площадь  $\triangle DAF$ , если точка  $C$  делит отрезок  $AB$  на отрезки  $AC = 12$ ,  $CB = 4$ .

**17** На координатной плоскости рассматривается множество точек  $M(a; b)$ , координаты которых таковы, что система 
$$\begin{cases} ax + by = 2, \\ (a-4)x + (b+4)y = 3, \\ (b+4)x - (a+6)y = 3 \end{cases}$$
 имеет единственное решение. Найдите площадь фигуры  $F$ , ограниченной множеством  $M$ .

**18**

Два двузначных числа записаны друг за другом. Оказалось, что полученное четырехзначное число делится на произведение исходных чисел.

- а) Может ли частное четырехзначного числа и произведения исходных чисел быть равным 3?
- б) Докажите, что отношение четырехзначного числа к произведению исходных чисел не может быть больше 11.
- в) Найдите наибольшее отношение четырехзначного числа к произведению исходных чисел.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

## ВАРИАНТ 2

### Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Найдите корень уравнения  $\sqrt{2x-1}=13$ .

Ответ: \_\_\_\_\_ .

2 Из непрозрачной урны, в которой содержатся 10 белых, 8 красных и 2 зеленых шара, наугад извлекают один из них. Какова вероятность того, что это будет либо белый, либо красный шар?

Ответ: \_\_\_\_\_ .

3 Площадь треугольника  $ABC$  равна 24.  $KL$  — средняя линия треугольника, параллельная стороне  $BC$ . Найдите площадь треугольника  $BKL$ .

Ответ: \_\_\_\_\_ .

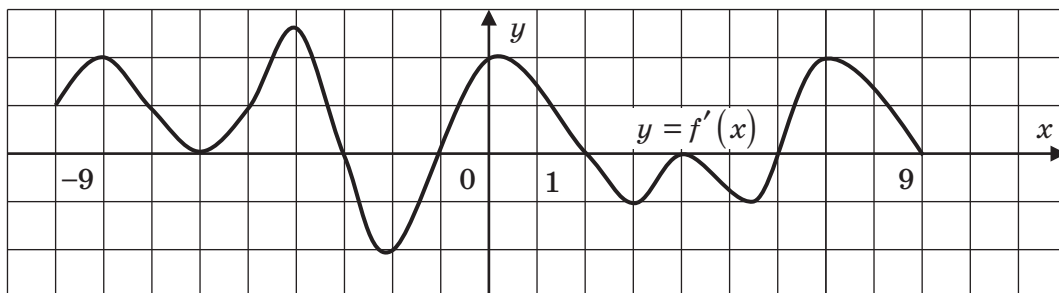
4 Найдите значение выражения  $\cos 2\alpha$ , если  $\sin \alpha = 0,25$ .

Ответ: \_\_\_\_\_ .

5 Площадь поверхности первого шара равна 43. Найдите площадь поверхности второго шара, объем которого в 27 раз больше объема первого шара.

Ответ: \_\_\_\_\_ .

6 На рисунке изображен график производной функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-9; 9)$ . Найдите количество точек минимума функции на данном промежутке.



Ответ: \_\_\_\_\_ .



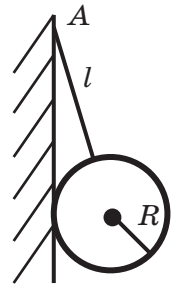
7

К вертикальной гладкой стенке в точке  $A$  на веревке длиной  $l$  подвешен шар с радиусом  $R$ . Сила натяжения веревки вычисляется по формуле

$$T = \frac{mg(l+R)}{\sqrt{(l+R)^2 - R^2}}.$$

$$T = 490 \text{ Н.}$$

Ответ: \_\_\_\_\_ .



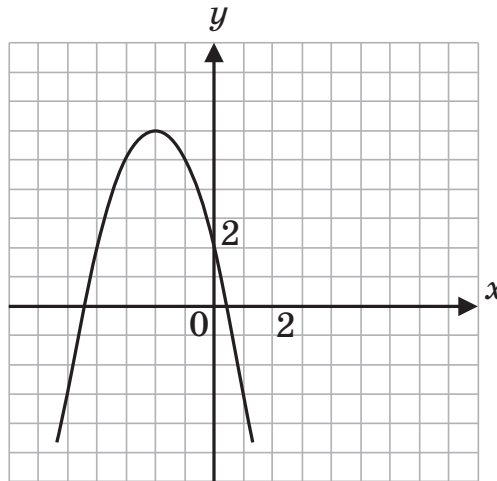
8

Имеются два сплава золота и серебра, в первом из которых массы металлов относятся как 1 : 2, а во втором как 3 : 4. Сколько граммов каждого сплава нужно взять, чтобы получить 57 г нового сплава, в котором массы золота и серебра относятся как 7 : 12? В ответе укажите массу первого сплава.

Ответ: \_\_\_\_\_ .

9

На рисунке изображен график функции  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , где числа  $a, b, c$  — целые. Найдите значение  $f(1)$ .



Ответ: \_\_\_\_\_ .

10

Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найдите вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

Ответ: \_\_\_\_\_ .

11

Укажите абсциссу точки графика функции  $f(x) = 14x - 45 - x^2$ , в которой угловой коэффициент касательной равен 4.

Ответ: \_\_\_\_\_ .

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

## Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте четко и разборчиво.

12 Решите уравнение  $\cos 2x - (2 - \sqrt{3})\cos x - \sqrt{3} + 1 = 0$ .

- 13 В треугольной пирамиде  $ABCD$  известно, что  $AB = 2$ ,  $BC = 3$ ,  $BD = 4$ ,  $AD = 2\sqrt{5}$ ,  $CD = 5$ .
- Докажите, что прямая  $BD$  перпендикулярна плоскости  $(ABC)$ .
  - Найдите длину ребра  $AC$ , если объем пирамиды  $ABCD$  наибольший возможный.

14 Решите неравенство  $\frac{2}{\log_x 2 + \log_{5x-8} 2} \geq \sqrt{\log_2 x \cdot \log_2 (5x-8)}$ .

- 15 Имеются три пакета акций. Общее суммарное количество акций первых двух пакетов совпадает с количеством акций в третьем пакете. Первый пакет в 4 раза дешевле второго, а суммарная стоимость первого и второго пакетов совпадает со стоимостью третьего пакета. Одна акция из второго пакета дороже одной акции из первого пакета на величину, заключенную в пределах от 16 до 20 рублей, а цена одной акции из третьего пакета не меньше 42 и не больше 60 рублей.

Какой процент от общего количества акций может содержаться в первом пакете?

- 16 Окружности  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $P$ . Через точку  $A$  проведена касательная  $AB$  к окружности  $\Omega_1$ , а через точку  $P$  — прямая, параллельная  $AB$  (точки  $B$  и  $C$  лежат на  $\Omega_2$ , точка  $D$  — на  $\Omega_1$ ).

- Докажите, что  $ABCD$  — параллелограмм.
- Найдите острый угол  $ABC$  параллелограмма  $ABCD$ , если  $AP = 2\sqrt{3}$ ,  $R_1 = 2$ , где  $R_1$  — радиус окружности  $\Omega_1$ .

- 17 Найдите наибольшее значение параметра  $k$ , при котором система 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2y \leq 2k - 2, \\ x + y + z = k \end{cases}$$
 имеет хотя бы одно решение.

- 18 Задана рациональная дробь вида  $\frac{5l+6}{8l+7}$ , где  $l$  — целое число.

- Найдите все целые числа, на которые может быть сокращена дробь  $\frac{5l+6}{8l+7}$ .
- Найдите все целые числа, при каждом из которых дробь  $\frac{5l+6}{8l+7}$  сократима. Укажите наименьшее натуральное такое число.
- Докажите, что если дробь  $\frac{al+b}{cl+d}$ ,  $cl+d \neq 0$ ,  $a, b, c, d, l \in \mathbb{Z}$  сократима на число  $k \in \mathbb{Z}$ , то  $ad - bc$  также делится на  $k \in \mathbb{Z}$ .

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

# ВАРИАНТ 3

## Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Найдите корень уравнения  $\log_5(10x+12)=3$ .

Ответ: \_\_\_\_\_ .

2 Из непрозрачной урны, в которой содержатся 9 белых, 8 красных и 3 зеленых шара, случайно выпал один шар. Какова вероятность того, что это не будет ни белый, ни зеленый шар?

Ответ: \_\_\_\_\_ .

3 В ромбе  $ABCD$  мера угла  $BAF$ , смежного с внутренним углом  $BAD$ , равна  $114^\circ$ . Найдите меру угла  $ADB$ .

Ответ: \_\_\_\_\_ .

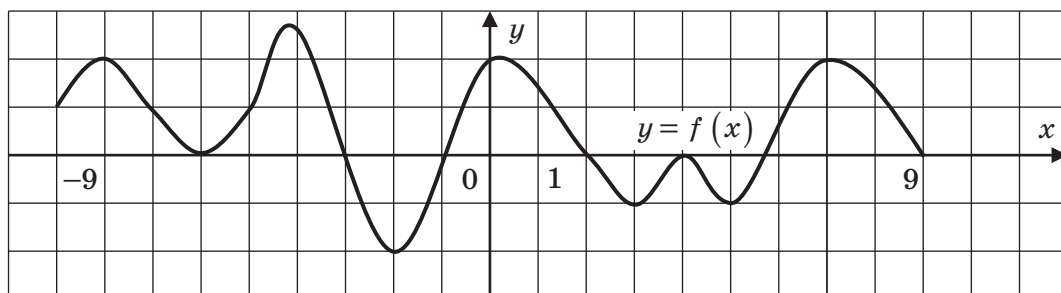
4 Найдите значение выражения  $\log_3^4\left(\frac{1}{9}\right)$ .

Ответ: \_\_\_\_\_ .

5 Площадь полной поверхности прямого кругового цилиндра равна 156. Найдите площадь поверхности второго цилиндра, радиус основания и высота которого в 2 раза меньше.

Ответ: \_\_\_\_\_ .

6 На рисунке изображен график функции  $f(x)$ , дифференцируемой на интервале  $(-9; 9)$ . Найдите количество точек минимума функции на данном промежутке.

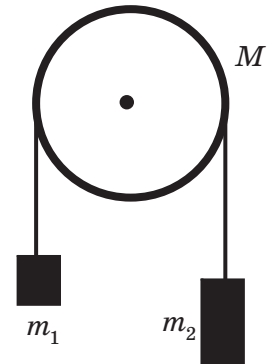


Ответ: \_\_\_\_\_ .

7

Два груза массой  $m_1$  и  $m_2$  ( $m_2 > m_1$ ) соединены между собой невесомой и нерастяжимой нитью, перекинутой через блок, вся масса  $M$  которого сосредоточена в его ободе и который может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси. Ускорение грузов можно найти по формуле  $a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + M}g$ , где  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>. Найдите массу обода, если  $m_1 = 2$  кг,  $m_2 = 8$  кг,  $a = 4,9$  м/с<sup>2</sup>.

Ответ: \_\_\_\_\_ .



8

К раствору, который содержит 40 г соли, добавили 200 г воды, после чего концентрация соли в растворе уменьшилась на 10%. Сколько воды содержал раствор?

Ответ: \_\_\_\_\_ .

9

Функция  $f(x)$  — четная и определена на всей числовой оси. Известно, что  $\begin{cases} x \geq 0, \\ f(x) = 3x^2 - 2x + 1. \end{cases}$  Найдите  $f(-3)$ .

Ответ: \_\_\_\_\_ .

10

Устройство состоит из трех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы (за время  $t$ ) первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. Найдите вероятность того, что за время  $t$  безотказно будет работать только один элемент.

Ответ: \_\_\_\_\_ .

11

Материальная точка движется прямолинейно по закону  $S(t) = 5 + 6t - \frac{1}{3}t^3$ , где путь  $S(t)$  измеряется в метрах, а время  $t$  — в секундах. Найдите скорость точки в момент  $t = 1$  с. Ответ укажите в м/с.

Ответ: \_\_\_\_\_ .

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

## Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте четко и разборчиво.

12

Решите уравнение  $\sin 7x - \sin 3x = \cos 5x$ .

13

В пирамиде  $ABCD$  медиана  $BM$ , проведенная к стороне  $AD$  треугольника  $ABD$ , равна половине  $AD$ , а медиана  $BN$ , проведенная к стороне  $CD$  треугольника  $BDC$ , равна половине  $CD$ .

а) Докажите, что прямая  $BD$  перпендикулярна плоскости  $(ABC)$ .

б) Найдите объем пирамиды  $BACNM$ , если объем пирамиды  $ABCD$  равен 16.

14 Решите неравенство  $\left| \frac{(x-3)\sqrt{5-x} + (x+2)(x+1)}{x-3} \right| \geq \sqrt{5-x} + \left| \frac{(x+2)(x+1)}{x-3} \right|$ .

15 У школьника было некоторое количество марок, ему подарили альбом для них. Если он наклеит по 20 марок на лист, то ему не хватит альбома, а если он наклеит по 23 марки на лист, то по крайней мере один лист останется пустым. Если школьнику подарить точно такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 21 марке, то всего у него будет 500 марок. Сколько листов в альбоме?

16 В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  длина отрезка  $KM$ , соединяющего середины диагоналей, равна длине отрезка  $LN$ , соединяющего середины сторон  $AB$  и  $CD$ .

- а) Докажите, что  $KLMN$  — параллелограмм.
- б) Найдите величину угла, образованного продолжением сторон  $AD$  и  $BC$ .

17 Решите систему  $\begin{cases} \sqrt{x^2 + (y-4)^2} + \frac{1}{\sqrt{5}}|x-2y-2| = 2\sqrt{5}, \\ x \geq 2. \end{cases}$

18 а) Числа 1, 2, 3, ..., 49 расположены в квадратной таблице.

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
.....						
43	44	45	46	47	48	49

Произвольное число из таблицы выписывается, после чего из таблицы вычеркиваются строка и столбец, содержащие это число. То же самое проделывается с оставшейся таблицей, состоящей из 36 чисел, и т.д., всего 7 раз. Найдите сумму выписанных чисел.

б) Квадратная таблица из 49 клеток заполнена числами от 1 до 7 так, что в каждом столбце и каждой строке встречаются все эти числа. Докажите, что если таблица симметрична относительно диагонали, идущей из левого верхнего угла в правый нижний, то на этой диагонали встретятся все числа от 1 до 7.

в) Числа 1, 2, 3, ...,  $k^2$  расположены в квадратной таблице.

1	2	3	.....	$k$
$k + 1$	$k + 2$	$k + 3$	.....	$2k$
.....				
$(k - 1)k + 1$	$(k - 1)k + 2$	$(k - 1)k + 3$	.....	$k^2$

Произвольное число из таблицы выписывается, после чего из таблицы вычеркиваются строка и столбец, содержащие это число. То же самое проделывается с оставшейся таблицей из  $(k - 1)^2$  чисел и т.д., всего  $k$  раз. Найдите сумму выписанных чисел.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

# ВАРИАНТ 4

## Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Найдите корень уравнения  $\sqrt{9-x+x^2} = x+2$ . Если корней окажется несколько, то в ответе запишите наибольший из них.

Ответ: \_\_\_\_\_ .

2 Готовясь к докладу, ученик хотел выписать нужную цитату, но забыл номер страницы. Он помнил, что этот номер выражался двузначным числом, цифры которого были различны. Какова вероятность того, что ученик найдет цитату, открыв первую из таких страниц? Ответ округлите до тысячных.

Ответ: \_\_\_\_\_ .

3 Угол между высотами  $BK$  и  $BL$  параллелограмма  $ABCD$ , проведенными соответственно к сторонам  $AD$  и  $CD$  параллелограмма, равен  $40^\circ$ . Найдите величину угла  $BAD$ . Ответ укажите в градусах.

Ответ: \_\_\_\_\_ .

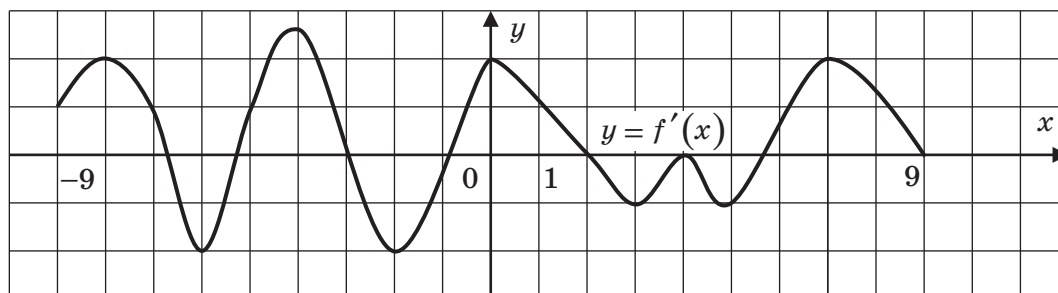
4 Найдите значение выражения  $7^{\log_7 25}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_ .

5 В треугольной пирамиде  $SABC$  через точки  $K$  и  $L$ , где  $BK$  и  $AL$  — медианы основания пирамиды, проведена плоскость  $(KLM)$ , параллельная плоскости грани  $(SAB)$ . Найдите отношение объема пирамиды  $CMKL$  к объему пирамиды  $SABC$ .

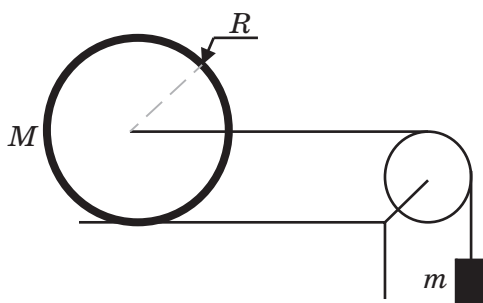
Ответ: \_\_\_\_\_ .

6 На рисунке изображен график производной функции  $f(x)$ , дифференцируемой на интервале  $(-9; 9)$ . Найдите количество точек графика функции, в которых касательная к графику параллельна или совпадает с прямой  $y = 2x - 3$  на данном промежутке.



Ответ: \_\_\_\_\_ .

- 7 По горизонтальной поверхности под действием груза массой  $m$  катится без проскальзывания колесо радиусом  $R$ , вся масса которого  $M$  сосредоточена в его ободе. Если пренебречь массой нити и блока и трением на оси блока и между блоком и нитью, то сила натяжения нити определяется по формуле  $T = \frac{2Mmg}{2M+m}$ , в которой  $g = 10 \text{ м/с}^2$  — ускорение свободного падения. Найдите массу груза, если масса кольца  $M = 2 \text{ кг}$ , а сила натяжения нити  $T = 30 \text{ Н}$ .



О т в е т : \_\_\_\_\_ .

- 8 Для постройки плотины приглашены две бригады рабочих. Первая бригада может выполнить всю работу за 36 дней, а вторая — за 45 дней. За какое время построят плотину обе бригады, работая совместно?

О т в е т : \_\_\_\_\_ .

- 9 Нечетная функция  $f(x)$  определена на всей числовой прямой. Известно, что  $\begin{cases} x \geq 0, \\ f(x) = x(2x+1)(2x-1). \end{cases}$  Найдите  $f(-3)$ .

О т в е т : \_\_\_\_\_ .

- 10 Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,38. Найдите вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,8.

О т в е т : \_\_\_\_\_ .

- 11 Найдите ускорение точки, движущейся прямолинейно с постоянным ускорением, если точка движется по закону:  $S(t) = 5t^2 + 58t - 623$ , где путь  $S(t)$  измеряется в метрах, а время  $t$  — в секундах. Ответ укажите в  $\text{м/с}^2$ .

О т в е т : \_\_\_\_\_ .

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

## Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте четко и разборчиво.

12 Решите уравнение  $\sin x = 2\sqrt{2}(\cos^3 x - \cos x)$ .

13 Высота треугольной пирамиды  $ABCS$  проходит через точку пересечения высот треугольника основания  $ABC$ .

- Докажите, что противоположные ребра пирамиды попарно перпендикулярны.
- Найдите расстояние между ребрами  $AS$  и  $BC$ , если  $SA = 6$ ,  $BC = 4$ , а объем пирамиды  $SABC$   $V = 12$ .

14 Решите неравенство  $3x + 2|x - 2| \geq 3\sqrt{3x - 2} + 2|\sqrt{3x - 2} - 2|$ .

15 Путь из  $A$  в  $B$  плот проплывает за 24 часа, а катер тратит на путь из  $A$  в  $B$  и обратно менее 10 часов. Если собственную скорость катера увеличить на 40%, то путь из  $A$  в  $B$  и обратно займет не менее 7 часов. Сколько времени плывет катер из  $A$  в  $B$  и сколько времени плывет катер из  $B$  в  $A$ ?

16 В четырехугольнике  $ABCD$  диагонали  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $K$ . Точки  $L$  и  $M$  являются серединами сторон  $BC$  и  $AD$  ( $AD > BC$ ), причем точка  $K$  принадлежит отрезку  $LM$ .

- Докажите, что  $ABCD$  — трапеция.
- Известно, что в четырехугольник  $ABCD$  можно вписать окружность радиуса  $R$  и  $AB = 2$ ,  $BD = 2\sqrt{5}$ ,  $KL : KM = 1 : 3$ . Найдите радиус окружности  $R$ .

17 Найдите все значения параметра, при каждом из которых неравенство  $\log_{\frac{3a-6}{2}} \left( \frac{2(a-1)x^2 + 2a-4}{x^2 + 1} \right) < 0$  верно для любого значения переменной.

- 18
- Тридцать студентов со всех пяти курсов составили 41 задачу. Любые два однокурсника придумали одинаковое количество задач, любые два студента с разных курсов придумали разное количество задач. Сколько человек придумали по 1 задаче?
  - Десять студентов-математиков составили 35 задач для математической олимпиады. Известно, что среди них были студенты, которые составили по 1, 2 и 3 задачи. Докажите, что среди них есть студент (по меньшей мере один), который составил не менее 5 задач.
  - Коллектив авторов, в который входило более десяти членов и который работал больше одной, но меньше двух недель, составил 2022 задачи для сборника. Каждый день, начиная со второго, коллектив составлял на одно и то же число задач больше, чем в предыдущий. Найдите время работы коллектива авторов.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.



# ВАРИАНТ 5

## Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1 Найдите корень уравнения  $\log_2(3^x + 1) = 2$ . Если корней окажется несколько, то в ответе запишите наибольший из них.

Ответ: \_\_\_\_\_ .

- 2 В аннотации к использованию бытового прибора было указано, что прибор гарантированно проработает более двух лет с вероятностью 0,95, а более трех лет — с вероятностью 0,8. Какова вероятность того, что прибор проработает более двух, но менее трех лет?

Ответ: \_\_\_\_\_ .

- 3 Периметр ромба  $ABCD$  равен 20. Сумма диагоналей ромба равна 14. Найдите площадь ромба.

Ответ: \_\_\_\_\_ .

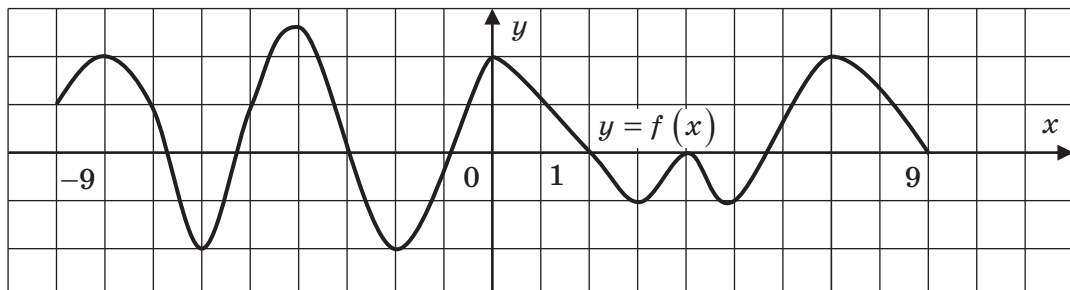
- 4 Найдите значение выражения  $\sqrt{a - 6\sqrt{a - 9}} + \sqrt{a + 6\sqrt{a - 9}}$  при  $a = 9,999$ .

Ответ: \_\_\_\_\_ .

- 5 В основании четырехугольной пирамиды  $SABCD$  лежит параллелограмм  $ABCD$ . Через диагональ основания  $BD$  и середину ребра  $CS$  — точку  $K$ , проведено сечение, отсекающее пирамиду  $KBCD$ . Найдите отношение объема пирамиды  $KBCD$  к объему пирамиды  $SABCD$ .

Ответ: \_\_\_\_\_ .

- 6 На рисунке изображен график функции  $f(x)$ , дифференцируемой на интервале  $(-9; 9)$ . Найдите количество точек максимума функции на данном промежутке.



Ответ: \_\_\_\_\_ .

7 Если надувная лодка, на дно которой положили груз массой  $m$ , плавает в бассейне площадью  $S$ , и камень выбрасывается за борт на дно бассейна, то уменьшение уровня воды в бассейне можно найти по формуле  $h = \frac{m}{S} \left( \frac{1}{\rho_{\text{в}}} - \frac{1}{\rho_{\text{к}}} \right)$ , где  $\rho_{\text{в}}$  — плотность воды,  $\rho_{\text{к}}$  — плотность камня. Найдите плотность камня, если  $m = 60$  кг,  $S = 20$  м<sup>2</sup>,  $\rho_{\text{в}} = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $h = 2 \cdot 10^{-3}$  м.

Ответ: \_\_\_\_\_ .

8 Выехав из пункта  $A$  в пункт  $B$ , велосипедист встретил идущего ему навстречу пешехода, расстояние до пункта  $A$  в момент встречи было в 4 раза больше, чем до пункта  $B$ . Доехав до пункта  $B$  и мгновенно развернувшись, велосипедист отправился в обратный путь, догнав на дороге того же пешехода. Но теперь встреча произошла на расстоянии в 4 раза большем от  $B$ , чем от  $A$ . Продолжив путь, велосипедист вернулся в исходный пункт  $A$  через 4 часа после выезда из него. Через какое время после этого в пункт  $A$  придет пешеход? Ответ укажите в минутах.

Ответ: \_\_\_\_\_ .

9 Функция  $f(x)$ , определенная на промежутке  $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ , задана уравнением  $f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x$ ,  $x \neq 0$ . Найдите  $f(5)$ .

Ответ: \_\_\_\_\_ .

10 Среди 10 шариков 4 красных. Найдите вероятность того, что из 3 случайным образом выбранных шариков 2 красных.

Ответ: \_\_\_\_\_ .

11 Найдите наибольшее значение функции  $y = x^3 - 3x^2 + 1$  на отрезке  $[1; 4]$ .

Ответ: \_\_\_\_\_ .

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

## Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте четко и разборчиво.

12 Решите уравнение  $2\sin^2 \frac{3x}{2} + \sin 6x = 1$ .

13 В основании четырехугольной пирамиды  $SABCD$  лежит ромб  $ABCD$ .  $O$  — точка пересечения его диагоналей. Известно, что  $SA = SC$ ,  $SB = SD$ .

а) Докажите, что отрезок  $SO$  перпендикулярен плоскости  $(ABCD)$ .

б) На ребре  $DC$  точка  $E$  взята так, что  $DE : EC = 2 : 3$ . Найдите отношение объема пирамиды  $BDSE$  к объему пирамиды  $SABCD$ , если  $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$ .

**14** Решите неравенство  $\log_{(x+2)} 6 + \log_{(x-2)} 6 > \log_{(x+2)} 6 \cdot \log_{(x-2)} 6$ .

**15** Банк планирует вложить на один год 40% имеющихся у него средств клиентов в проект  $A$ , а остальные 60% — в проект  $B$ . В зависимости от обстоятельств проект  $A$  может принести прибыль в размере от 19% до 24% годовых, а проект  $B$  — от 29% до 34% годовых. В конце года банк обязан вернуть деньги клиентам и выплатить им проценты по заранее установленной ставке. Определите наименьший и наибольший возможный уровень процентной ставки по вкладам, при которых чистая прибыль банка составит не менее 10%, но не более 15% годовых от суммарных вложений в проекты  $A$  и  $B$ .

**16** Через центр окружности, вписанной в  $\triangle ABC$ , проведена прямая, параллельная стороне  $AC$  и пересекающая стороны  $BA$  и  $BC$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно.

а) Докажите, что периметр  $\triangle MBN$  равен сумме  $AB + BC$ .

б) Найдите длину отрезка  $MN$ , если  $BA = 11$ ,  $BC = 13$ ,  $AC = 12$ .

**17** Найдите все значения параметра, при каждом из которых уравнение  $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1} = ax + \frac{25}{12}$  имеет хотя бы одно решение.

**18** Пусть  $M$  — множество всех шестнадцатизначных натуральных чисел, для каждого из которых выполняются два условия: оно является квадратом целого числа и в его десятичной записи в разряде десятков стоит цифра 1.

а) Существует ли какое-либо нечетное число, удовлетворяющее условиям задачи?

б) Укажите какое-либо число, удовлетворяющее условиям задачи.

в) Докажите, что множество  $M$  содержит более чем  $10^6$  чисел.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

# ВАРИАНТ 6

## Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Найдите корень уравнения  $\left(\frac{5}{6}\right)^{2x+1} = \left(\frac{6}{5}\right)^{3x-2}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

2 Из урны, содержащей 10 белых, 8 черных и 2 зеленых шара, случайно выпал какой-то шар. Какова вероятность того, что этот шар был либо не белым, либо не черным?

Ответ: \_\_\_\_\_.

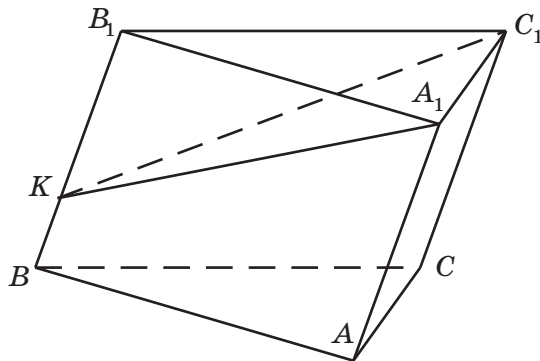
3 Вершины четырехугольника  $ABCD$ , вписанного в окружность, делят ее на дуги  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$ , меры которых относятся как числа  $2 : 3 : 5 : 8$ . Точка  $O$  — центр окружности. Найдите меру угла  $BOC$ . Ответ укажите в градусах.

Ответ: \_\_\_\_\_.

4 Найдите значение выражения  $\sqrt{7-4\sqrt{3}}(8+4\sqrt{3})$ .

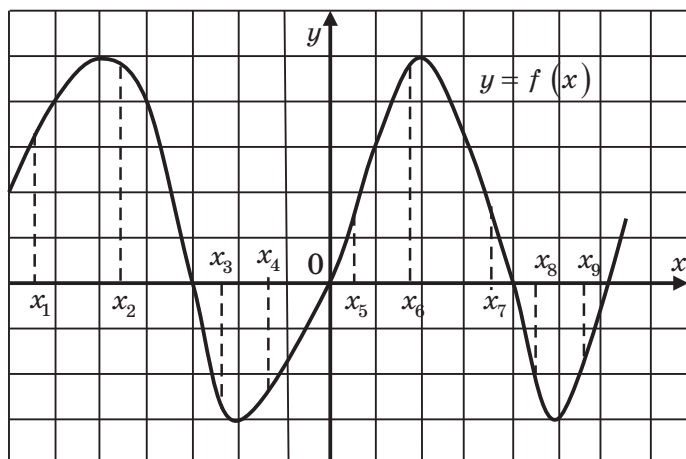
Ответ: \_\_\_\_\_.

5 Точка  $K$  лежит на ребре  $BB_1$  треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$ , причем  $BK : KB_1 = 1 : 3$ . Найдите объем пирамиды  $KA_1B_1C_1$ , если объем призмы  $ABCA_1B_1C_1$   $V = 54$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

- 6 На рисунке изображен график дифференцируемой функции  $y = f(x)$  и отмечены девять точек на оси абсцисс  $x_1, x_2, \dots, x_9$ .



Укажите количество отмеченных точек, в которых производная функции принимает отрицательные значения.

Ответ: \_\_\_\_\_ .

- 7 Стержень массой  $m = 40$  кг длиной  $L = 6$  м расположен на двух опорах, одна из которых удалена от первого конца стержня на расстояние  $d$ , а вторая находится на втором конце стержня.

Сила давления  $N_1$  на первую опору вычисляется по формуле  $N_1 = \frac{mg}{2(L-d)}$ ,  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>.

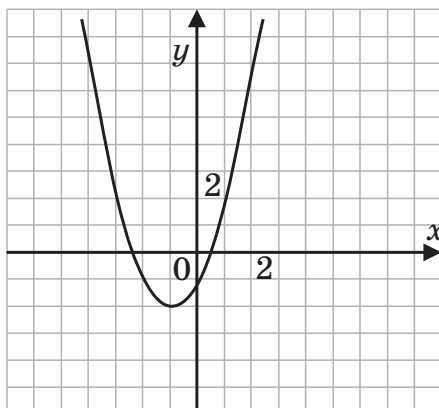
Найдите расстояние  $d$  от первого конца стержня до первой опоры, если  $N_1 = 49$  Н.

Ответ: \_\_\_\_\_ .

- 8 Два велосипедиста отправляются навстречу друг другу одновременно из пунктов А и В, расстояние между которыми равно 54 км, и встречаются через 2 часа после выезда. Определите скорость первого велосипедиста, которая на 3 км/ч больше, чем у второго.

Ответ: \_\_\_\_\_ .

- 9 На рисунке изображен график функции  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , где числа  $a, b, c$  — целые. Найдите значение  $f(3)$ .



Ответ: \_\_\_\_\_ .

- 10 В первой урне находятся 7 белых и 3 черных шара, во второй — 8 белых и 4 черных шара, в третьей урне — 2 белых и 13 черных шаров. Из этих трех урн случайным образом выбирается одна из них, а из выбранной урны — один шар. Найдите вероятность того, что выбранный шар — белый.

Ответ: \_\_\_\_\_ .

- 11 Найдите наименьшее значение функции  $y = x^3 + 3x^2$  на отрезке  $[-4; 1]$ .

Ответ: \_\_\_\_\_ .

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

## Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте четко и разборчиво.

- 12 Решите уравнение  $\sin^2 3x + \cos^2 x = 1$ .

- 13 Плоские острые углы при вершине  $A$  параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  равны  $\alpha$ .

а) Докажите, что проекция ребра  $AA_1$  параллелепипеда на плоскость  $(ABCD)$  является биссектрисой  $\angle DAB$  основания.

б) Найдите объем параллелепипеда, если  $AA_1 = 4$ ,  $AB = 4\sqrt{2}$ ,  $AD = 3$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ .

- 14 Решите неравенство  $\frac{2}{\log_{x-1}\left(\frac{5}{2}-x\right)} \leq 1$ .

- 15 В двух ящиках находится более 29 одинаковых деталей. Число деталей в первом ящике, уменьшенное на 2, более чем в 3 раза превышает число деталей во втором ящике. Утроенное число деталей в первом ящике превышает удвоенное число деталей во втором ящике, но менее чем на 60. Сколько деталей в каждом ящике?

- 16 В треугольнике  $ABC$   $H$  — точка пересечения высот треугольника,  $O$  — центр окружности, описанной около него,  $OM$  — расстояние от точки  $O$  до стороны  $AC$ .

а) Докажите, что  $BH = 2 \cdot OM$ .

б) Найдите  $OH$ , если  $AB = 13$ ,  $BC = 15$ ,  $AC = 14$ .

- 17 Найдите все значения параметра, при каждом из которых уравнение  $\log_{\sqrt{ax+2}} \sqrt{8x-3-4x^2} = 1$  имеет единственное значение.

**18**

Центральный банк государства Восьмиречья обладает неограниченным запасом монет достоинством в 1, 8 и 64 рубля.

- а) Каким наименьшим количеством монет может быть выдан вклад в 2022 рубля?
- б) Можно ли выдать вклад в 1000 рублей 19 монетами?
- в) Известно, что 20 монетами выдана некоторая сумма, меньшая 500 рублей. Найдите эту сумму, если меньшим числом монет выдать ее невозможно.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

# ВАРИАНТ 7

## Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Найдите корень уравнения  $\sqrt{15-2x} = 3$ .

Ответ: \_\_\_\_\_ .

2 Деревянный кубик с одинаково окрашенными гранями распиливается на 125 одинаковых кубиков, которые затем перемешиваются. Какова вероятность того, что случайно выбранный кубик будет содержать ровно одну окрашенную грань?

Ответ: \_\_\_\_\_ .

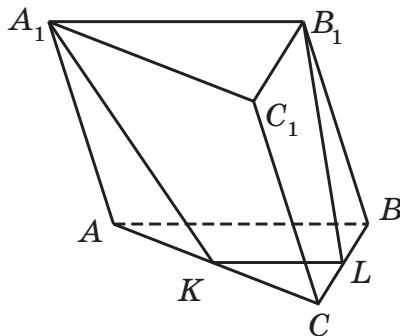
3 Площадь треугольника  $ABC$  равна 24.  $KL$  — средняя линия треугольника, параллельная стороне  $BC$ . Найдите площадь треугольника  $KOL$ , где  $O$  — точка пересечения отрезков  $BL$  и  $CK$ .

Ответ: \_\_\_\_\_ .

4 Найдите значение выражения  $\sin 2\alpha$ , если  $\cos \alpha = -0,6$ ;  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ .

Ответ: \_\_\_\_\_ .

5 В треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$ , объем которой равен 48, проведено сечение, проходящее через ребро  $A_1B_1$  призмы и среднюю линию  $KL$  треугольника  $ABC$ , параллельную ребру  $AB$ . Найдите объем многогранника  $KLCA_1B_1C_1$ .



Ответ: \_\_\_\_\_ .