Введение

Данная книга адресована в первую очередь тем, кто желает успешно подготовиться к *вступительным экзаменам* в вуз и к *единому государственному экзамену* (ЕГЭ) по математике и получить высокие баллы. Поскольку ЕГЭ — это не только выпускной школьный экзамен, но и вузовский вступительный экзамен, предусматривающий проверку знаний по всему школьному курсу, в пособие включены задачи и краткие справочные материалы по всему курсу математики: как по арифметике и алгебре для 7—11 классов, так и по курсу начал анализа 10—11 классов. При этом мы хотели, не перегружая пособие излишними подробностями, а тем более — теоретическими выкладками и доказательствами, сосредоточить внимание на решении задач и в первую очередь на решении задач повышенной сложности.

Пособие включает восемь глав. Каждая глава начинается с краткого перечисления некоторых теоретических сведений с краткими комментариями, позволяющими вспомнить соответствующий материал. Затем приводятся примеры решения задач различного уровня сложности и упражнения, позволяющие лучше понять и запомнить рассмотренные способы решения задач. Заканчивается каждая глава набором задач для самостоятельного решения. Эти задания взяты из различных сборников и из разрешенных для публикации (открытых) вариантов ЕГЭ.

Как рекомендуется работать с пособием? Сначала внимательно прочтите и изучите теоретическое введение к данной теме. Изложение теории сопровождается иллюстрирующими примерами и задачами. Прочитав задачу, попытайтесь решить ее самостоятельно, не заглядывая в решение, предложенное в пособии. Не исключено, что ваше решение может оказаться более рациональным или оригинальным. Если же все ваши попытки окажутся безуспешными, посмотрите начало решения, указанного в пособии. Не исключено, что вам будет достаточно какой-то начальной идеи, чтобы завершить решение задачи самостоятельно. И только если и в этом случае задачу решить не удастся, ознакомьтесь с ее полным решением, предложенным в пособии. После этого *обязательно перерешайте задачу* от начала и до конца.

Мы уверены, что пособие поможет вам успешно сдать вступительные экзамены и поступить в вуз.

Желаем успеха!

ГЛАВА 1

ЧИСЛА. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ, ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

§ 1. Основные понятия и определения

Основным числовым множеством, которое изучается в школе, является множество R *действительных чисел*. Любое число $x \in R$ является или *рациональным*, или *иррациональным* числом. Таким образом, множество действительных чисел есть объединение двух множеств: множества Q рациональных чисел и множества $\bar{Q}$ иррациональных чисел: $R = Q \cup \bar{Q}$. Действительные числа удобно изображать в виде точек числовой прямой. При этом каждая точка числовой прямой изображает некоторое действительное число, и наоборот, каждое действительное число представляется некоторой точкой числовой прямой. Причем различным точкам соответствуют различные действительные числа.

Множество чисел x, удовлетворяющих неравенству $a \le x \le b$, называется *отрезком* и обозначается $[a;\ b]$. Множество чисел x, удовлетворяющих неравенству $a < x \le b$ или $a \le x < b$, называется *полуинтервалом* и обозначается соответственно $(a;\ b]$ и $[a;\ b)$. Множество чисел x, удовлетворяющих неравенству $a < x < b$, называется *интервалом* и обозначается $(a;\ b)$. Каждое из указанных множеств называется промежутком и может быть (в общем случае) обозначено $\langle a; b \rangle$.

Каждое рациональное число $r \in Q$ можно представить в виде отношения целого числа m к натуральному числу n: $r = \frac{m}{n}$, где $n \in N = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$, $m \in Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n, \ldots\}$. Таким образом, каждое натуральное число, нуль и любое целое отрицательное число являются рациональными, поскольку $n = \frac{n}{1}$, $0 = \frac{0}{1}$ и $-n = \frac{-n}{1}$. Рациональными числами являются, очевидно, все обыкновенные и конечные десятичные дроби, а также, что уже менее очевидно, все бесконечные периодические десятичные дроби. Действительно, если считать правило сложения «столбиком» верным и для бесконечного числа десятичных дробей, т.е. считать верным, например, следующее равенство:

$$0,(1)=0,1111\ldots1\ldots=0,1+0,001+\ldots+0,\overbrace{000\ldots0}^{(n-1)\,нуль}1+\ldots,$$

то, воспользовавшись формулой для суммы бесконечной геометрической прогрессии $S=\dfrac{a_1}{1-q}$ со знаменателем $q=0,1$ и первым членом $a_1=0,1$, получим $0,(1)=\dfrac{0,1}{1-0,1}=\dfrac{0,1}{0,9}=\dfrac{1}{9}$.

Аналогично можно показать, что для любой чистой периодической десятичной дроби $0,(a_1a_2\ldots a_n)$, дробная часть которой содержит только повторяющуюся группу цифр (период) $\overline{a_1,\ a_2\ldots a_n}$, справедлива следующая **формула записи чистой периодической десятичной дроби в виде обыкновенной дроби:**

$$0,(a_1a_2\ldots a_n)=\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_n}}{\underbrace{\overline{99\ldots9}}_{n\ девяток}}.$$

Например, $0,(1)=\dfrac{1}{9}$; $0,(2)=\dfrac{2}{9}$; $0,(9)=\dfrac{9}{9}=1$; $0,(17)=\dfrac{17}{99}$; $0,(1323)=\dfrac{1323}{9999}=\dfrac{147}{1111}$.

В случае смешанной периодической дроби поступают следующим образом:

$$0,78(1323)=\frac{78,(1323)}{100}=\frac{78+0,(1323)}{100}=\frac{78+\dfrac{1323}{9999}}{100}.$$

Выполнив сложение, получим $0,78(1323)=\dfrac{781245}{999900}$.

Число $\alpha\in\overline{Q}$, которое нельзя представить в виде отношения целых чисел, называется иррациональным числом. Отсюда следует, что **любое иррациональное число записывается в виде бесконечной непериодической десятичной дроби.** Но бесконечное число десятичных знаков записать невозможно! Поэтому для иррациональных чисел выбирают специальные обозначения в виде символов или букв. Например, иррациональными являются следующие числа $\sqrt{17}$; $\sqrt[14]{15}$; $5^{6,3}$; $\log_7 10$; $\sin\frac{\pi}{5}$, при записи которых использованы символы $\sqrt[n]{\ }$, $\log_a$; sin. Иррациональными являются, например, числа $\pi = 3{,}1415...$ и $e = 2{,}718281828...$.

Замечательным свойством действительных чисел, и в частности рациональных чисел, является тот факт, что рациональные числа расположены «между» действительными числами весьма плотно: *между любыми двумя действительными числами расположено бесконечно много рациональных чисел.*

Пример 1. Среди всех обыкновенных несократимых дробей $\frac{m}{n}$, m, $n \in N$, лежащих между дробями а) $\frac{1}{2}$ и $-$; б) $\frac{16}{21}$ и $\frac{17}{21}$; в) $\frac{5}{17}$ и $\frac{1}{3}$, найдите такую дробь, которая имеет наименьший знаменатель.

Решение, а) Пусть $\frac{1}{2} < \frac{m}{n} < \frac{1}{3}$. Тогда $3n < 6m < 4n$. Таким образом, на интервале $(3n;\ 4n)$ требуется найти наименьшее кратное 6. При $n = 1$; 2; 3; 4 интервал $(3n;\ 4n)$ не содержит кратных 6. При $n = 5$ интервал $(3n;\ 4n)$ имеет вид (15; 20), на котором лежит только одно число, кратное 6, а именно: $18 = 63$, т.е. $m = 3$. Таким образом, условию задачи удовлетворяет дробь $\frac{3}{5}$.

Задания б) и в) решите самостоятельно. Вы получите б) $\frac{16}{21} < \frac{4}{5} < \frac{17}{21}$; в) $\frac{5}{17} < \frac{3}{10} < \frac{1}{3}$.

Пример 2. При каком значении параметра a на интервале $(5 - 2a;\ 2a + 7)$ лежит ровно 101 целое число?

Решение. При любом a серединой интервала $(5 - 2a;$ $2a + 7)$ является число $x_0 = \frac{(5-2a)+(2a+7)}{2} = 6$. Следовательно, чтобы на интервале $(5 - 2a;\ 2a + 7)$ лежало ровно 101 целое число, необходимо и достаточно, чтобы в правой полуокрестности точки 6 лежало ровно 50 натуральных чисел, что равносильно неравенству:

$$56 < 2a + 7 \le 57 \Leftrightarrow 24{,}5 < a \le 25\,.$$

Итак, условию задачи удовлетворяют только те a, для которых $24{,}5 < a \le 25$.

Для натуральных чисел справедлива **основная теорема арифметики:**

Каждое натуральное число n, большее 1, может быть представлено в виде произведения простых чисел, причем такое представление единственно с точностью до порядка сомножителей, т.е.

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_k\,,$$

где p_1, p_2, p_3, ... p_k — простые числа. Напомним, что натуральное число $p > 1$ называется **простым числом,** если оно имеет только два натуральных делителя: 1 и p. Натуральное число $p > 1$, не являющееся простым, называется **составным числом.** Множество простых чисел — бесконечное множество.

Пример 3. Решите уравнение $x^2 - px + q = 0$, где p, q — простые числа, если один корень этого уравнения также является простым числом.

Решение. Пусть x — простой корень данного уравнения. Тогда $x \ne 0$ и данное уравнение равносильно уравнению $x = p - \dfrac{q}{x}$. Отсюда следует, что число $\dfrac{q}{x}$ — целое. Значит, число x — делитель числа q. По условию x и q — простые числа, а число 1 не является простым числом. Следовательно, $x = q$. Подставляя $x = q$ в данное уравнение, находим $q = p - 1$. Существует только два простых числа, разность между которыми равна 1. Это числа 3 и 2. Итак, данное уравнение имеет вид $x^2 - 3x + 2 = 0$, а его корни 1 и 2.

На множестве $Z = \{0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots\}$ целых чисел определена особая операция: **деление с остатком.** Справедлива теорема:

Для любых целых чисел a и b существуют единственные целое число c и целое неотрицательное число r такие, что $a = bc + r$, причем $0 \le r < |b|$.

При $r > 0$ число c называется **неполным частным** от деления a на b; при $r=0$ число c есть **частное** от деления a на b; b — **делитель** a; a — **кратное** b. Говорят также, что **число b делит число a.** Записывают это так: $b|a$ или, что то же самое, **число a делится на b:** $a \vdots b$. Из определения делимости натуральных чисел следует, что если $b|a$, то $1 \leq b \leq a$. Поэтому число натуральных делителей натурального числа a конечно. Например, число 28 имеет ровно шесть натуральных делителей, а именно: 1; 2; 4; 7; 14; 28.

Пример 4. Определите последнюю цифру числа 3^{4567}.

Решение. Посмотрим на неотрицательные целые степени числа 3: $3^0=1$, $3^1=3$, $3^2=9$, $3^3=27$, $3^4=81$, $3^5=243$, ... Мы видим, что последние цифры этих степеней образуют периодическую последовательность цифр: 1; 3; 9; 7; 1; 3; 9; 7; 1; 3; 9; 7; ... . Период этой последовательности равен 4. Поскольку $4567=1141 \cdot 4 + 3$, то последней цифрой данной степени является число 7.

При решении задач на натуральные числа полезны следующие понятия.

1. Наибольший общий делитель натуральных чисел a и b: НОД(a; b).

2. Наименьшее общее кратное натуральных чисел a и b: НОК[a; b].

Смысл этих понятий ясен из их названий. Например, НОД(12; 32)$=4$. Действительно, общими делителями чисел 12 и 32 являются числа 1; 2; 4. Других общих делителей эти числа не имеют. Из всех общих делителей 1; 2; 4 чисел 12 и 32 наибольшим является число 4. Поэтому наибольшим общим делителем 12 и 32 является число 4. В общем случае, если требуется найти наибольший общий делитель НОД(a; b) двух натуральных чисел, можно использовать их разложения на простые множители или воспользоваться **алгоритмом Евклида.** В нашем случае алгоритм Евклида выглядит следующей цепочкой равенств:

$$32=122 + 8; \ 12=81 + 4; \ 8=42.$$

Последний ненулевой остаток, равный в данном случае 4, и является НОД(12; 32).

Второй пример. Найдем НОК[12; 32]. Для этого разложим числа 12 и 32 в произведение простых сомножителей: $12=2^2\cdot 3$; $32=2^5$. Ясно, чтобы натуральное число k было общим кратным чисел 12 и 32, т.е. чтобы k делилось на 12 и на 32, необходимо и достаточно, чтобы $k=2^2\cdot 3\cdot 2^3\cdot m$, где $m\in N$. Отсюда при $m=1$ получим наименьшее общее кратное чисел 12 и 32. Поэтому НОК[12; 32] $=96$.

В общем случае для нахождения наименьшего общего кратного НОК[a; b] двух натуральных чисел a и b, где $a \geq b$, обычно сначала с помощью алгоритма Евклида находят НОД(a; b), а затем используют равенство НОК[a; b] НОД(a; b) $= ab$. В нашем случае

$$\text{НОК}[12;\ 32]=\frac{12\cdot 32}{\text{НОД}(12;\ 32)}=\frac{12\cdot 32}{4}=96.$$

Получили тот же самый результат.

Наибольший общий делитель НОД(a; b) натуральных чисел a и b, где $a > b$, обладает некоторыми полезными свойствами. Отметим наиболее очевидные.

1. $\text{НОД}(a;\ b)=\text{НОД}(ka;\ kb),\ k\in N$;
2. $\text{НОД}\left(\frac{a}{k};\ \frac{b}{k}\right)=\frac{\text{НОД}(a;b)}{k}$;
3. $\text{НОД}(a;\ b)=\text{НОД}(a;\ a\pm b)$.

Пример 5. Целые числа m и n не имеют общих делителей, отличных от 1 и –1. Является ли дробь $\frac{5m-3n}{2m+5n}$ сократимой при некоторых натуральных m и n?

Решение.

Пусть

$$d=\text{НОД}(5m-3n;\ 2m+5n) > 1.$$

Тогда справедливы равенства

$$\begin{cases}5m-3n=dk,\\ 2m+5n=ds,\end{cases}$$

где числа k и s взаимно просты. Значит, дробь можно сократить только на один из делителей числа d, отличный от 1. Запишем $m=\frac{5k+3s}{31}d$, $n=\frac{5s-2k}{31}d$. Отсюда $d=31q$.

Можно рассуждать иначе. Запишем дробь в виде

$$\frac{5m-3n}{2m+5n}=2+\frac{1}{\dfrac{2m+5n}{m-13n}}=2+\frac{1}{2+\dfrac{31n}{m-13n}} \quad (\text{при } m-13n\neq 0).$$

Данная дробь сократима тогда и только тогда, когда сократима дробь $\dfrac{31n}{m-13n}$. Но числа m и n не имеют общих делителей, поэтому дробь может быть сокращена на число 31 или на кратное ему. Например, при $m=23$, $n=-3$ получаем дробь $\dfrac{5m-3n}{2m+5n}=\dfrac{5\cdot 23+9}{2\cdot 23-15}=\dfrac{124}{31}$, которая сократима на 31.

При решении различных задач повышенной сложности нередко типичной проблемой является **сравнение чисел.** Напомним, что сравнение рациональных чисел осуществляется с помощью определения:

$$\frac{a}{b}<\frac{m}{n}\xrightarrow{\text{опр.}}an<bm\,.$$

В других случаях помогает свойство транзитивности неравенств:

$$\frac{a}{b}>\alpha,\alpha>\frac{m}{n}\Rightarrow\frac{a}{b}>\frac{m}{n}\,.$$

При сравнении дробей полезны следующие теоремы.

Теорема.

Если числитель и знаменатель дроби положительны, то при их увеличении на одно и то же число неправильная дробь уменьшается, а правильная увеличивается, другими словами:

если $a>b>0$ и $c>0$, то $\dfrac{a}{b}>\dfrac{a+c}{b+c}$ и $\dfrac{b}{a}<\dfrac{b+c}{a+c}$.

Пример 6. Сравните числа $\dfrac{1222333}{1333222}$ и $\dfrac{2222333}{2333222}$.

Решение. Использовать для сравнения приведенное выше определение не хочется. Придется перемножать семизначные числа! Используя теорему, заметив, что поскольку дробь $\dfrac{1222333}{1333222}$ правильная и $\dfrac{2222333}{2333222}=\dfrac{1222333+1000000}{1333222+1000000}$, то $\dfrac{1222333}{1333222}<\dfrac{2222333}{2333222}$.

При сравнении чисел, имеющих вид степени (или выражения с радикалами), используют теоремы, выражающие свойства степеней и радикалов.

Теорема.

Если $a>0$, $b>0$, то $a>b \Leftrightarrow a^{\beta}>b^{\beta}$, где β — положительное число.

Теорема.

Если $a>1$ и $\alpha>\beta$, то $a^{\alpha}>a^{\beta}$; если $0<a<1$ и $\alpha>\beta$, то $a^{\alpha}<a^{\beta}$.

Теорема.

Если $a \geq b \geq 0$, то $\sqrt[n]{a^m} \geq \sqrt[n]{b^m}$, где n, m — натуральные числа.

Пример 7. Сравните числа 2^{300} и 3^{200}.

Решение. Поскольку $2^{300}=(2^3)^{100}$, а $3^{200}=(3^2)^{100}$, и $2^3<3^2$, то $2^{300}<3^{200}$.

Пример 8. Сравните числа $2^{\sqrt{3}}$ *и* $3^{\sqrt{2}}$.

Решение. Здесь более сложный случай. По свойству степеней с основанием, большим 1, имеем $3^{\sqrt{2}}>3^{1,4}$, а $2^{\sqrt{3}}<2^2$. Сравним теперь числа $3^{1,4}=(3^{0,7})^2$ и 2^2. Для этого достаточно сравнить $3^{0,7}$ и 2 или $(3^{0,7})^{10}$ и 2^{10}. Но $(3^{0,7})^{10}=3^7=2187$, а $2^{10}=1024$. Теперь получаем цепочку неравенств:

$$1024<2187 \Leftrightarrow 2^{10}<3^7 \Leftrightarrow 2<3^{0,7} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^2<3^{1,4} \Leftrightarrow 2^{\sqrt{3}}<2^2<3^{1,4}<3^{\sqrt{2}}.$$

Пример 9. Сравните числа $\sqrt[5]{5}$ и $\sqrt[6]{6}$.

Решение. Воспользуемся следующим свойством радикалов: если $a>0$, то $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n\cdot k]{a^k}$, где n, k — натуральные числа.

Получим $\sqrt[5]{5}=\sqrt[30]{5^6}$ и $\sqrt[6]{6}=\sqrt[30]{6^5}$. Теперь достаточно сравнить степени 5^6 и 6^5. Оценим их отношение:

$$\frac{5^6}{6^5}=\frac{5}{\left(\frac{6}{5}\right)^5}=\frac{5}{(1+0,2)^5}=\frac{5}{(1+0,2)^2(1+0,2)^3}=$$

$$=\frac{5}{(1+0,4+0,04)(1+0,6+0,12+0,008)}>\frac{5}{2\cdot 2}>1.$$

Таким образом, $\frac{5^6}{6^5} > 1 \Leftrightarrow 5^6 > 6^5$ и, значит, $\sqrt[5]{5} > \sqrt[6]{6}$.

Замечания.

1) В данном случае степени 5^6 и 6^5 невелики, а именно $5^6 = 15625$, $6^5 = 7776$, и их нетрудно вычислить «вручную», т.е. без калькулятора. Можно и без вычислений оценить степени:

$$5^6 = 5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5 = 125\cdot125 > 10000,$$

$$6^5 = 6\cdot6\cdot6\cdot6\cdot6 = 36\cdot36\cdot6 < 40\cdot40\cdot6 = 9600.$$

Поэтому $5^6 > 10000 > 9600 > 6^5$.

2) Если же степени действительно не поддаются вычислению (даже на калькуляторе), например, n^{n+1} и $(n+1)^n$, то можно использовать неравенство $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$, верное при любом натуральном *n,* и поступить так:

$$\frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > \frac{n}{3} \geq 1 \text{ при всех натуральных } n \geq 3.$$

Упражнение. Докажите самостоятельно неравенство

$$\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}.$$

При сравнении чисел, которые являются значениями тригонометрических или логарифмических функций, обычно используются свойства соответствующих функций.

Перечислим некоторые свойства тригонометрических функций, связанные с неравенствами.

Если $-\frac{\pi}{2} < a \leq b < \frac{\pi}{2}$, то $\sin a \leq \sin b$ и $\operatorname{tg} a \leq \operatorname{tg} b$ (свойство монотонности).

Если $0 < a \leq b < \pi$, то $\cos a \geq \cos b$ и $\operatorname{ctg} a \geq \operatorname{ctg} b$ (свойство монотонности).

Если $0 < a \leq b < \pi$, то $\frac{\sin a + \sin b}{2} \leq \sin\frac{a+b}{2}$ (свойство выпуклости).

Если $-\frac{\pi}{2} < a \leq b < \frac{\pi}{2}$, то $\frac{\cos a + \cos b}{2} \leq \cos\frac{a+b}{2}$ (свойство выпуклости).

Если $-1 \leq a \leq b \leq 1$, то $\arcsin a \leq \arcsin b$, но $\arccos a \geq \arccos b$ (свойство монотонности).

Если $a \le b$, то $\operatorname{arctg} a \le \operatorname{arctg} b$, но $\operatorname{arcctg} a \ge \operatorname{arcctg} b$ (свойство монотонности).

Пример 10. Найдите множество значений функции[1]

$$y=\sin(0,5\arccos(0,5+0,5\sqrt{1-0,5x}))\,.$$

Решение. Сначала установим область определения данной функции. Поскольку функция $\sin t$ определена при любом t, то область определения данной функции совпадает с областью определения функции $y=\arccos t$, где $t=0,5+0,5\sqrt{1-0,5x}$. По определению $\arccos t$ определен только на отрезке $-1\le t\le 1$. Решим неравенство

$$-1\le 0,5+0,5\sqrt{1-0,5x}\le 1\,.$$

Получим

$$-1\le 0,5+0,5\sqrt{1-0,5x}\le 1 \Leftrightarrow -2\le 1+\sqrt{1-0,5x}\le 2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3\le\sqrt{1-0,5x}\le 1\Leftrightarrow \begin{cases}1-0,5x\le 1,\\ 1-0,5x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 0\le x\le 2\,.$$

Итак, данная функция определена только на отрезке [0; 2]. При всех этих x имеем неравенство $0,5\le 0,5+0,5\sqrt{1-0,5x}\le 1$ и поэтому

$$\arccos 0,5\ge\arccos(0,5+0,5\sqrt{1-0,5x})\ge\arccos 1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0\le\arccos(0,5+0,5\sqrt{1-0,5x})\le\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0\le 0,5\arccos(0,5+0,5\sqrt{1-0,5x})\le\frac{\pi}{6}\,.$$

Следовательно,

$$0\le\sin(0,5\arccos(0,5+0,5\sqrt{1-0,5x}))\le\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\,.$$

Таким образом, множество значений данной функции есть отрезок $\frac{1}{2}$.

Перечислим некоторые свойства логарифмических функций, связанные с неравенствами.

---

[1] Другие задания на нахождение области значений функции см. в главе 2.

Если $0<a\le b$ и $c>1$, то $\log_c a\le\log_c b$ (свойство монотонности).

Если $1<a\le b$ и $c>1$, то $0<\log_b c\le\log_a c$ (свойство монотонности).

Пример 11. Сравните числа $\log_2 3$ и $\log_3 4$.

Решение. Здесь можно поступить так. Сравним числа

$$\log_2 3-1=\log_2\frac{3}{2} \text{ и } \log_3 4-1=\log_3\frac{4}{3}.$$

Рассмотрим следующую цепочку неравенств

$$\log_2\frac{3}{2}>\log_2\frac{4}{3}>\log_3\frac{4}{3}.$$

Отсюда следует, что $\log_2 3>\log_3 4$.

В данном случае возможен второй способ. Пусть $\log_2 3=a$. Тогда

$$\log_3 4=2\log_3 2=\frac{2}{\log_2 3}=\frac{2}{a}.$$

Рассмотрим функцию $y=x-\frac{2}{x}=\frac{x^2-2}{x}$. При $x>0$ значения этой функции положительны при $x>\sqrt{2}$, и отрицательны при $0<x<\sqrt{2}$. Поэтому сравним числа a и $\sqrt{2}$, *т.е.* $\log_2 3$ *и* $\sqrt{2}=\log_2 2^{\sqrt{2}}$. Для этого достаточно сравнить числа 3 и $2^{\sqrt{2}}$. Имеем цепочку неравенств $2^{\sqrt{2}}<2^{1,5}\le 2\sqrt{2}<2\cdot 1{,}5=3$. Отсюда $\log_2 3=a>\sqrt{2}$ и поэтому значение $y(a)=a-\frac{2}{a}>0$. Следовательно,

$$\log_2 3-\log_3 4>0\Leftrightarrow\log_2 3>\log_3 4.$$

Часто при решении задач повышенной сложности приходится выполнять тождественные преобразования для того, чтобы данное выражение стало удобно для исследования. В основе этих преобразований лежат различные формулы. Перечислим некоторые из них, которые встречаются наиболее часто.

§ 2. Формулы сокращенного умножения

1. $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.
2. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.
3. $a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$.

4. $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1})$, $n \in N$.
5. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
6. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
7. $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.
8. $(a+b)^n = a^n + na^{n-1} + \dfrac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + {}$
$+\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \ldots + nab^{n-1} + b^n, n \in Z$.
9. $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$.
10. $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$.
11. $x^4 + y^4 = (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 = ((x+y)^2 - 2xy)^2 - 2x^2y^2$.
12. $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 - 2$.
13. $x^3 + \dfrac{1}{x^3} = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$.
14. $x^4 + \dfrac{1}{x^4} = \left(\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 - 2\right)^2 - 2$.

Пример 1. Найдите все действительные значения параметра a, при каждом из которых выражение $\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^2$ принимает наименьшее значение, если числа x_1 и x_2 — действительные, необязательно различные, корни уравнения $\dfrac{1}{x} - \dfrac{\sqrt{5-2a}}{x^2} = \dfrac{a}{x^3}$.

Решение. Число $x=0$ не является корнем данного уравнения, которое поэтому можно переписать в виде равносильного уравнения

$$x^2 - x\sqrt{5-2a} - a = 0,$$

где $a \neq 0$. При каждом $a \leq 2{,}5$ и $a \neq 0$ это квадратное уравнение имеет действительные корни, если его дискриминант

$$D = (\sqrt{5-2a})^2 + 4a \geq 0 \Leftrightarrow 5 + 2a \geq 0 \Leftrightarrow a \geq -2{,}5.$$

Если $a > 2{,}5$, то данное уравнение не имеет действительных корней. Удобно воспользоваться теоремой Виета. Но