ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1
ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1.1. ФУНКЦИИ

1.1.1. Определение функции, числовых промежутков и окрестности точек

Одним из основных математических понятий является понятие функции, устанавливающее зависимость между элементами двух множеств.

Определение. Пусть X, Y — некоторые множества, элементами которых являются некоторые числа. Если каждому числу $x \in X$ по некоторому закону или правилу f ставится в соответствие число $y \in Y$, то говорят, что на множестве X задана числовая функция f, и записывают эту функциональную зависимость формулой $y = f(x)$ или, более наглядно, в виде диаграммы:

$$X \xrightarrow{f} Y. \tag{1.1}$$

Переменная x называется *независимой переменной* или *аргументом*, а переменная y — *зависимой переменной* (от x) или *функцией*.

Множество X — область изменения аргумента — называется *областью определения функции* (ООФ). Множество Y, содержащее все значения, которые принимает y, *называется областью изменения функции*.

При дальнейшем изложении множества X и Y часто оказываются конечными или бесконечными промежутками.

Конечные промежутки:

- открытый интервал, или просто интервал $(a; b)$ — множество вещественных чисел, удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$, или $(a; b) \Leftrightarrow (a < x < b)$, где $\Leftrightarrow$ — знак эквивалентности;
- замкнутый интервал (или отрезок) $[a; b]$: $[a; b] \Leftrightarrow (a \leqslant x \leqslant b)$;
- полуоткрытые интервалы $(a; b]$ и $[a; b)$: $(a; b] \Leftrightarrow (a < x \leqslant b)$ и $[a; b) \Leftrightarrow (a \leqslant x < b)$ соответственно.

Бесконечные промежутки:

- $(-\infty, +\infty) = R$ — множество всех вещественных чисел, т. е. $R \Leftrightarrow (-\infty < x < +\infty)$; аналогично, $(a; +\infty) \Leftrightarrow (a < x < +\infty)$ и т. д.

Числа a, b называются соответственно *левым* и *правым концами* этих промежутков.

Символы $-\infty$ и $+\infty$ — не числа, а обозначение процесса неограниченного удаления точек числовой оси влево и вправо от начала 0.

Пусть x_0 — любое действительное число (точка на числовой прямой). *Окрестностью точки* x_0 называется любой интервал $(a; b)$, содержащий точку x_0, интервал $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, симметричный относительно x_0, называется ε-*окрестностью точки* x_0 (рис. 1.1).

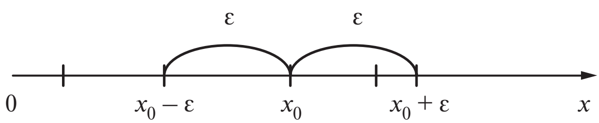


Рис. 1.1. ε-окрестность точки x_0

Если $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$, то справедливы неравенства

$$x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon,$$

что равносильно

$$|x - x_0| < \varepsilon.$$

Частное значение функции $f(x)$ при $x = a$ можно найти, подставив a вместо аргумента: $f(a)$. При этом a может быть как буквенным выражением, числом, так и некоторой функцией, например $\varphi(t)$. В последнем случае $f(\varphi(t))$ будет сложной функцией, с ней мы ознакомимся в п. 1.1.3.

Пример 1. Найти область определения и область значений функции

$$y = \sqrt{1 - x^2}.$$

Решение. Область определения этой функции состоит из всех x, для которых она имеет смысл. Таким образом, $X = \{|x| \leqslant 1\} \Leftrightarrow [-1; 1]$, $Y = [0; 1]$, т. е. $\left[-1; 1\right] \xrightarrow{f} [0; 1]$.

Пример 2. Найти область определения и область значений функции

$$y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Решение. Здесь независимая переменная n принимает целые положительные значения $n \in N = \{1, 2, ...\}$, следовательно, y является функцией натурального аргумента и вычисляется по заданной формуле $Y = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \left(\frac{1}{2}\right)^n, \ldots\right\}$, $\mathbf{N} \xrightarrow{f} Y$.

Пример 3. При $\varepsilon = 0{,}1$ построить ε-окрестность точки $x_0 = 2$.

Решение. По определению ε-окрестностью точки $x_0 = 2$ будет интервал $|x - 2| < 0{,}1$ или $-0{,}1 < x - 2 < 0{,}1 \Rightarrow 1{,}9 < x < 2{,}1$ (рис. 1.2).

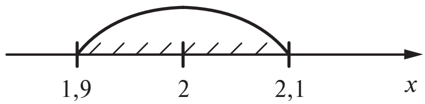


Рис. 1.2. Интервал $|x - 2| < 0{,}1$

Самостоятельная работа

1. Построить интервалы изменения переменной x, удовлетворяющей неравенствам:

1) $|x| < 4$;
2) $x^2 \leqslant 9$;
3) $|x - 4| < 1$;
4) $-1 < x - 3 \leqslant 2$;
5) $x^2 > 9$;
6) $(x - 2)^2 \leqslant 4$.

2. Найти области определения функций:

1) $y = \sqrt{x+2}$;
2) $y = \sqrt{9 - x^2}$;
3) $y = \sqrt{4x - x^2}$;
4) $y = \sqrt{-x} + \sqrt{4 + x}$;
5) $y = \arcsin\frac{x-1}{2}$;
6) $y = -\sqrt{2\sin x}$;
7) $y = -\frac{x\sqrt{16 - x^2}}{2}$;
8) $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{3 - x}$.

3. Вычислить значения функций в заданных точках:

1) $f(x) = x^2 - x + 1$; $f(2)$, $f(a+1)$;

2) $\varphi(x) = \frac{2x - 3}{x^2 + 1}$; $\varphi\left(\frac{3}{2}\right)$, $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{\varphi(x)}$;

3) $F(x) = x^2$; $\frac{F(b) - F(a)}{b - a}$, $F\left(\frac{a+h}{2}\right) - F\left(\frac{a-h}{2}\right)$.

1.1.2. Некоторые свойства функций и их графиков

Пусть задана функция $f: X \to Y$. Правило, по которому можно находить y, зная x, может быть задано графиком функции.

Определение. *Графиком функции* в декартовой прямоугольной системе координат называется множество всех точек, абсциссы которых являются значениями аргумента, а ординаты — соответствующими значениями функции.

Пример 1. Графиком функции $y = x^2$ является парабола, ось симметрии которой совпадает с положительной полуосью ординат, а вершина — с началом координат (рис. 1.3).

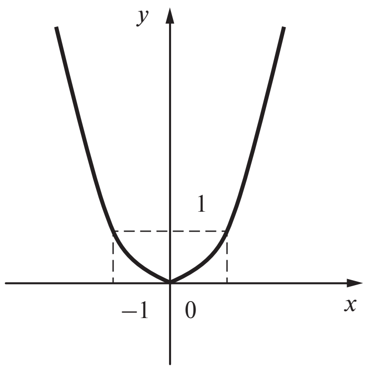


Рис. 1.3. График функции $y = x^2$

Часто графики автоматически вычерчиваются самопишущими приборами или изображаются на экране дисплея. Преимуществом такого представления функции является наглядность, а недостатком — неточность.

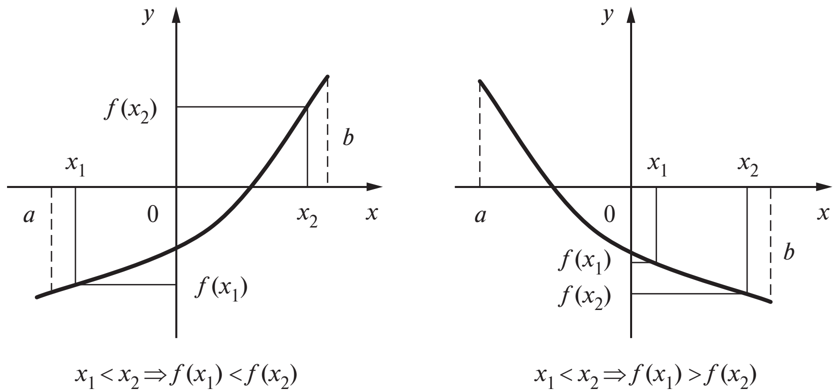
Функцию можно задавать также с помощью таблицы или формулы (аналитически). *Табличный способ* применяется на практике при обработке результатов наблюдений приближенных значений функции. *Аналитический способ* задания функции является наиболее удобным для полного исследования функции при помощи методов математического анализа.

Отметим основные характеристики функции: монотонность, ограниченность, четность (нечетность), периодичность.

Определение. Функция называется *возрастающей* (*убывающей*) в интервале, если большему значению аргумента из этого интервала соответствует большее (меньшее) значения функции.

График возрастающей на интервале (a; b) функции, если его рассматривать слева направо, поднимается вверх (рис. 1.4, *а*), а для убывающей функции — опускается вниз (рис. 1.4, *б*).

Определение. Интервал независимой переменной, в котором функция возрастает (убывает), называется *интервалом возрастания* (*убывания*). Как интервал возрастания, так и интервал убывания называют *интервалами монотонности* функции, а функцию в этом интервале — *монотонной функцией*.



а *б*

Рис. 1.4. График: *а* — возрастающей функции на интервале (a; b); *б* — убывающей функции на интервале (a; b)

Определение. Значение аргумента, при котором функция обращается в ноль, называется *нулем функции*.

Если функция задана формулой $y = f(x)$, то для нахождения нуля (или нулей) функции следует решить уравнение $f(x) = 0$.

При графическом задании нулями функции являются точки пересечения ее графиком оси абсцисс.

Пример 2. Найти нули функции $y = 2x + 1$.

Решение.

$$2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ (рис. 1.5).}$$

Определение. Функция называется *четной*, если при изменении знака допустимого аргумента значение функции не изменяется. Функция называется *нечетной*, если при изменении знака допустимого аргумента значение функции меняет знак на противоположный.

Таким образом, если функция $f(x)$ — четная, то для всех x из ее

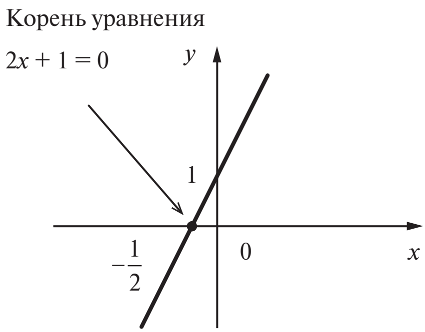


Рис. 1.5. График функции $y = 2x + 1$

области определения должно выполняться равенство $f(-x) = f(x)$, как это происходит, например, при $f(x) = x^2$, а если $f(x)$ — нечетная, то $f(-x) = -f(x)$ для любого x из области определения функции, как, например, в случае $f(x) = x^3$.

Обратите внимание на то, что четные или нечетные функции должны быть обязательно определены в области, симметричной относительно начала координат.

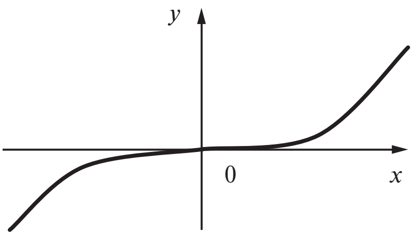


Рис. 1.6. График функции $y = x^3$

При этом график четной функции симметричен относительно оси ординат (как на рис. 1.3), а график нечетной функции симметричен относительно начала координат (как на рис. 1.6).

Заметим, что не все функции являются четными либо нечетными; такие функции (не являющиеся ни четными, ни нечетными) будем называть функциями *общего вида*.

Определение. Функция $f(x)$, определенная на множестве X, называется *ограниченной* на этом множестве, если существует такое число $M > 0$, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant M$.

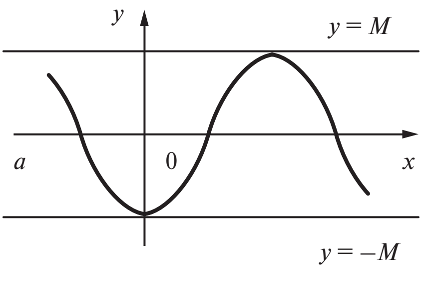


Рис. 1.7. График ограниченной функции

График ограниченной функции лежит между прямыми $y = M$ и $y = -M$ (рис. 1.7).

Определение. Функция $f(x)$ называется *периодической*, если существует такое положительное число a, что $f(x + a) = f(x) = f(x - a)$ для любого x из ООФ (точек x, $x + a$, $x - a$, принадлежащих области определения функции). При этом наименьшее положительное a с таким свойством (если таковое существует) называется *периодом* функции.

График периодической функции получается путем повторения части графика, соответствующего интервалу оси абсцисс, равному по длине периоду функции.

Примером периодической функции служит определенная на всей оси функция $y = \cos x$, период которой равен 2π (рис. 1.8).

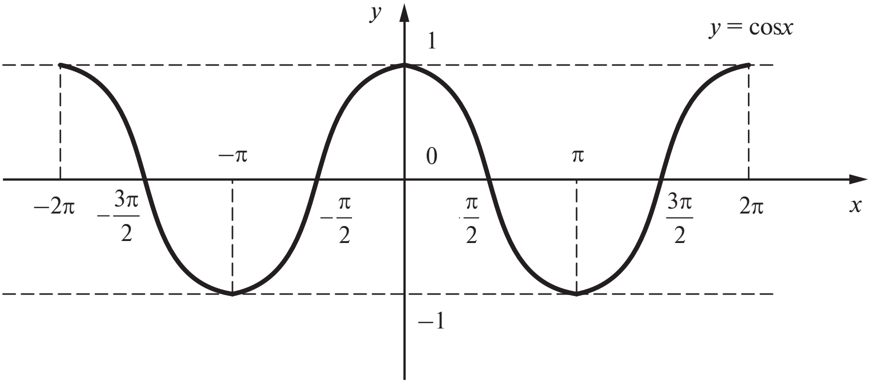


Рис. 1.8. График функции $y = \cos x$

Таким образом, сдвиг графика периодической функции вдоль оси абсцисс на интервал, длина которого кратна периоду, не приводит к изменению этого графика. В частности область определения периодической функции не ограничена.

Самостоятельная работа

1. Указать, какие из следующих функций четные и какие нечетные:

1) $\dfrac{\sin x}{x}$; 2) $\dfrac{a^x - 1}{a^x + 1}$;

3) $a^x + \dfrac{1}{a^x}$; 4) $a^x - \dfrac{1}{a^x}$;

5) $x\sin^2 x - x^3$; 6) $x + x^2$;

7) $|x|$; 8) $\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x}$.

2. Найти нули функции:

1) $y = ax + b$; 2) $y = x^2 + px + q$;
3) $y = x^4 + px^2 + q$; 4) $y = 2\lg(x + 1)$;
5) $y = a^{2x} - a^2$ $(a > 0)$; 6) $y = 2\sin x - 1$;
7) $y = \operatorname{tg} x + 1$.

3. Найти период функции:

1) $y = \operatorname{tg} 2x$; 2) $y = \sin\dfrac{x}{2}$; 3) $y = \dfrac{\operatorname{ctg} x}{\cos 2x}$.

4. Воспользовавшись свойствами графиков четных/нечетных функций и результатами п. 1.1.2, построить графики функций:

1) $y = \lvert x\rvert$;	2) $y = -x + \lvert x\rvert$;
3) $y = -\lvert x - 2\rvert$;	4) $y = x - 4 + \lvert x - 2\rvert,\ x \in [-2; 5]$;
5) $y = \lg(x + 2)$;	6) $y = 2^{-x}$;
7) $y = x^2 + 2x + 2$;	8) $y = -x^2 + 4x$.

1.1.3. Сложная функция. Обратная функция

Определение. *Сложной функцией* (рис. 1.9) называется функция, аргумент которой также является функцией, т. е. $F(x) = f(\varphi(x))$, или, в виде диаграммы, аналогично формуле (1.1).

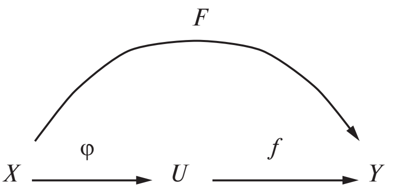


Рис. 1.9. Сложная функция

Иначе говоря, чтобы сосчитать значение в точке x сложной функции $f(\varphi(x))$, составленной из функций f и φ, следует сначала найти частное значение $u = \varphi(x)$ внутренней функции φ, а затем подставить его в качестве аргумента во внешнюю функцию f.

При этом область определения функции $F(x)$ следует выбирать таким образом, чтобы промежуточное множество U, с одной стороны, было областью значений функции $\varphi(x)$, а с другой стороны, являлось областью определения функции $f(u)$.

Пример 1. Рассмотрим сложную функцию $y = \lg(1 - x^2)$. Здесь $y = f(u) = \lg u$, в то время как $u = \varphi(x) = 1 - x^2$. Областью определения функции y является интервал $(-1, 1)$, в котором как функция $\varphi(x)$, так и функция $\left. f(u)\right|_{u=\varphi(x)}$ имеют смысл.

Рассмотрим функцию с областью определения X и областью значений Y. Предположим, что каждому значению $y \in Y$ соответствует одна определенная точка $x \in X$, такая, что $y = f(x)$. Тогда существует функция $\varphi\colon Y \to X$, переводящая любое $y \in Y$ в $x \in X$, удовлетворяющее вышеуказанному свойству $y = f(x)$.

Функции f и φ с вышеперечисленными свойствами называются *взаимно-обратными*, а функция φ называется *обратной* по отношению к f. С учетом того, что символ x соответствует, как правило, независимой переменной, обычно вместо записи $x = \varphi(y)$ используют запись $y = \varphi(x)$.

Из определения обратной функции вытекает, что любая строго монотонная функция имеет обратную.

Между графиками функций $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ имеется простая связь: график обратной функции $y = \varphi(x)$ симметричен графику данной функции $y = f(x)$ относительно биссектрисы I и III координатных углов.

Отметим, что взаимно-обратные функции f и φ удовлетворяют соотношению и могут с помощью него вычисляться:

$$f(\varphi(x)) = \varphi(f(x)) = x. \tag{1.2}$$

Пример 2. Пусть $y = f(x) = x^3$. Тогда $f(\varphi(x)) = \varphi^3(x)$ и равенство (1.2) дает $\varphi^3(x) = x$, или $\varphi(x) = x^{1/3}$, что, впрочем, легко следует непосредственно из соотношения $y = x^3$ (рис. 1.10).

Важно иметь в виду, что функция $f(x)$, возрастающая или убывающая на X, заведомо имеет обратную функцию (определение возрастания и убывания функции дано в п. 1.1.2).

В противоположном случае однозначность соответствия между X и Y нарушается, и обратной функции не существует. Однако, как правило, область определения X можно разбить на участки возрастания и убывания функции $f(x)$, на каждом из которых обратная функция уже может быть определена.

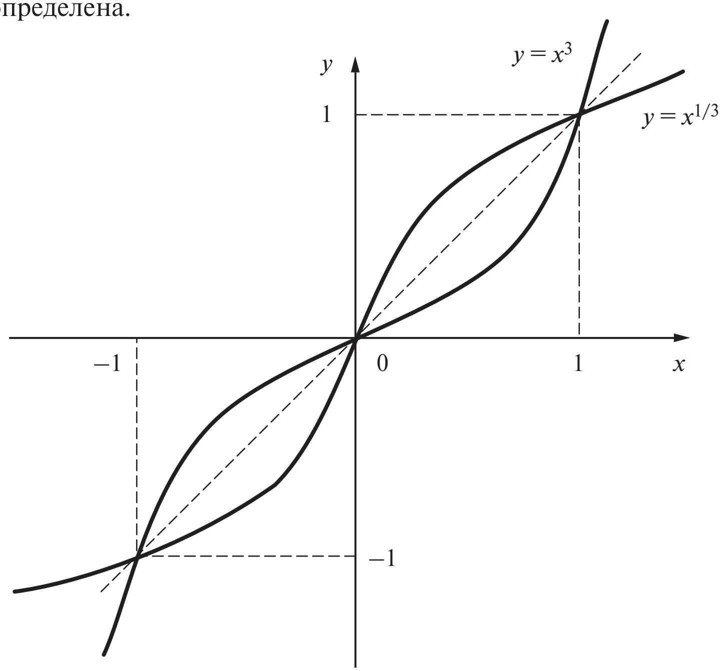


Рис. 1.10. Графики взаимно-обратных функций $y = x^3$ и $y = x^{1/3}$

Пример 3. Пусть $y = x^2$. Тогда $X = (-\infty;\ \infty)$, а $Y = [0;\ +\infty)$. Таким образом, взаимно однозначного соответствия между X и Y нет (каждому $y \neq 0$ соответствуют два значения x, отличающиеся знаками), следовательно, нет и обратной функции (рис. 1.11).

Если же разбить X на $(-\infty;\ 0]$ и $[0;\ +\infty)$, то на каждой полупрямой зависимость $y = x^2$ является взаимно-однозначной, и, следовательно, на $(-\infty;\ 0]$ функция $y = x^2$ имеет обратную функцию $y = -\sqrt{x}$, а на $[0;\ +\infty)$ обратной к ней является функция $y = \sqrt{x}$.

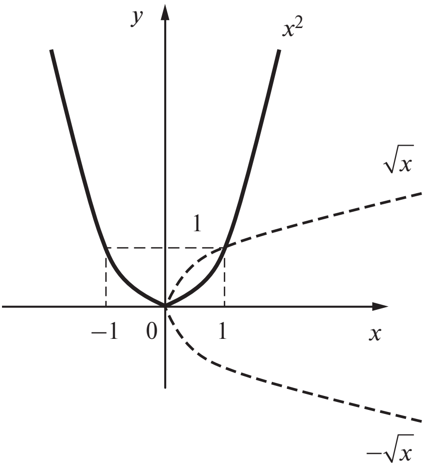


Рис. 1.11. Пример функции, не имеющей взаимно-обратной

Пример 4. Пусть функция y связана с независимой переменной x линейной зависимостью $3x + 2y - 6 = 0$. Найти обратную функцию и построить графики прямой и обратной функций.

Решение. Для нахождения обратной функции в общей с прямой функцией системе координат достаточно в соответствующем уравнении поменять обозначения x и y местами.

Таким образом, в нашем примере обратная зависимость выражается соотношением $3y + 2x - 6 = 0$ и также является линейной.

При построении графиков (рис. 1.12) принималось во внимание то, что прямая линия однозначно определяется любой парой различных лежащих на ней точек. В частности прямая $3x + 2y - 6 = 0$ определяется точками (0; 3) и (2; 0).

Заметим, что в соответствии со свойствами взаимно-обратных функций прямые на рис. 1.12 симметричны относительно биссектрисы I и III координатных углов.

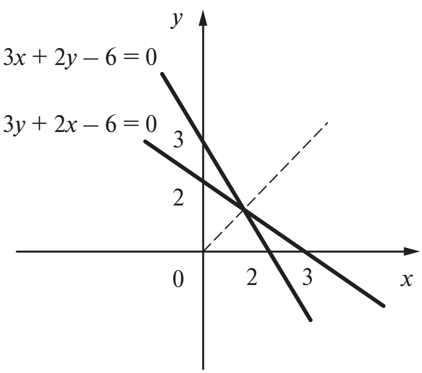


Рис. 1.12. Графики взаимно-обратных линейных функций

1.1.4. Элементарные функции

Определение. Основными элементарными функциями называются:

1) степенная функция: $y = x^n$, где n — действительное число, $x > 0$ (в некоторых случаях, в частности при натуральном n, степенная функция определена на всей оси);
2) показательная функция: $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, и $X = R$;
3) логарифмическая функция: $y = \log_a x$, где основание логарифмов $a > 0$, $a \neq 1$, и $X = (0; +\infty)$;
4) тригонометрические функции: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$;
5) обратные тригонометрические функции: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$.

К множеству *элементарных функций* относятся все основные элементарные функции и постоянные, а также все функции, получающиеся из них с помощью четырех арифметических действий и операции взятия функции от функции, примененных последовательно конечное число раз.

Так, элементарными являются функции $y = \lg\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$, $y = \operatorname{arctg}\dfrac{2x^4}{1-x^2}$ и $y = \operatorname{tg} x - \sqrt{x}$. Функция

$$y = \begin{cases} x, & x \le 1; \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$$

элементарной не является.

Областью определения элементарной функции являются все значения аргумента, при котором эта функция имеет смысл.

Например, областью определения функции $y = \sqrt{x^2 - 1}$ является множество $X = (-\infty < x \leqslant -1 \cup 1 \leqslant x < +\infty)$. Здесь символ $\cup$ обозначает объединение.

Рассмотрим степенную и показательную функции.

Степенная функция $y = x^n$ при целом n определена на всей оси; четная, если n — четное, и нечетная, если n — нечетное (см. рис. 1.2 и 1.5).

При произвольном n функция рассматривается в области $x > 0$. Если $n > 0$, то графики функции $y = x^n$ возрастают от нуля до бесконечности в интервале $(0; +\infty)$, проходят через точки $(0; 0)$ и $(1; 1)$ и разделяются прямой $y = x$ на кривые, обращенные выпуклостью вниз при $n > 1$ и вверх при $0 < n < 1$ (рис. 1.13, *а*).

Если $n < 0$, то график функции $y = x^n = \left(\dfrac{1}{x}\right)^{|n|}$ убывает от бесконечности до нуля (рис. 1.13, *б*).