



# ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение .....	7
<b>Глава 1. Введение в математический анализ .....</b>	<b>9</b>
1.1. Функции .....	9
1.1.1. Определение функции, числовых промежутков и окрестности точек .....	9
1.1.2. Некоторые свойства функций и их графиков .....	12
1.1.3. Сложная функция. Обратная функция .....	16
1.1.4. Элементарные функции .....	19
1.1.5. Тригонометрические функции .....	22
1.1.6. Обратные тригонометрические функции .....	24
1.2. Пределы .....	26
1.2.1. Предел функции .....	26
1.2.2. Основные теоремы о пределах .....	29
1.2.3. Специальные пределы .....	30
1.2.4. Примеры нахождения некоторых пределов .....	31
1.3. Непрерывность функций .....	38
1.3.1. Основные понятия и определения .....	38
1.3.2. Основные теоремы непрерывности .....	39
1.3.3. Точки разрыва функции .....	40
1.3.4. Классификация точек разрыва .....	41
<b>Глава 2. Дифференциальное исчисление .....</b>	<b>45</b>
2.1. Производная функции .....	45
2.1.1. Задачи, приводящие к понятию производной .....	45
2.1.2. Понятие производной .....	48
2.1.3. Правила дифференцирования .....	51
2.1.4. Производные от основных элементарных функций .....	54
2.1.5. Логарифмическое дифференцирование .....	57
2.2. Дифференциал функции .....	60
2.2.1. Определение .....	60
2.2.2. Приближенные вычисления с помощью дифференциала .....	62
2.2.3. Производные и дифференциалы высших порядков .....	64
2.3. Приложения производной .....	66
2.3.1. Касательная и нормаль к плоской кривой .....	66
2.3.2. Скорость изменения переменной величины .....	67
2.3.3. Правило Лопиталя .....	68
2.3.4. Отыскание асимптот плоских кривых .....	74
2.4. Применение производной к исследованию функции .....	77
2.4.1. Признак постоянства функции. Признаки возрастания и убывания функций .....	77

2.4.2. Экстремумы функции. Необходимое условие экстремума . . . . .	78
2.4.3. Достаточное условие экстремума (по первой производной) . . . . .	80
2.4.4. Выпуклость и вогнутость кривых . . . . .	82
2.4.5. Точки перегиба графика функции . . . . .	84
2.4.6. Полная схема исследования функций с помощью производных и построения графиков . . . . .	85
<b>Глава 3. Функция двух переменных . . . . .</b>	<b>91</b>
3.1. Понятие функции двух переменных . . . . .	91
3.2. Область определения функции . . . . .	92
3.3. Частные производные и полный дифференциал . . . . .	96
3.3.1. Частные производные . . . . .	96
3.3.2. Полный дифференциал. . . . .	98
3.3.3. Применение дифференциала к приближенным вычислениям . . . . .	99
3.4. Производные и дифференциалы высших порядков. . . . .	102
<b>Глава 4. Неопределенный интеграл . . . . .</b>	<b>106</b>
4.1. Простейшие методы интегрирования . . . . .	106
4.1.1. Понятие неопределенного интеграла . . . . .	106
4.1.2. Свойства неопределенных интегралов . . . . .	109
4.1.3. Непосредственное интегрирование . . . . .	110
4.1.4. Метод разложения . . . . .	110
4.1.5. Метод подведения под знак дифференциала . . . . .	111
4.1.6. Метод выделения полного квадрата из квадратичного трехчлена. . . . .	115
4.1.7. Основные методы интегрирования . . . . .	116
<b>Глава 5. Определенный интеграл . . . . .</b>	<b>128</b>
5.1. Понятие определенного интеграла . . . . .	128
5.1.1. Вычисление площади криволинейной трапеции . . . . .	128
5.1.2. Определение пути. . . . .	129
5.1.3. Количество вещества, образовавшегося в результате химической реакции . . . . .	130
5.1.4. Определенный интеграл. Теорема существования. . . . .	130
5.2. Свойства определенного интеграла. . . . .	132
5.3. Формула Ньютона–Лейбница . . . . .	135
5.4. Методы вычисления определенных интегралов . . . . .	136
5.4.1. Метод замены переменной. . . . .	136
5.4.2. Метод интегрирования по частям . . . . .	140
5.5. Несобственные интегралы . . . . .	144
5.5.1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования . . . . .	144
5.5.2. Интегралы от разрывных функций . . . . .	146

5.6. Геометрические приложения определенных интегралов . . . . .	148
5.6.1. Вычисление площади плоской фигуры . . . . .	148
5.6.2. Вычисление длины дуги плоской кривой . . . . .	150
5.6.3. Вычисление объема тела вращения. . . . .	151
<b>Глава 6. Дифференциальные уравнения. . . . .</b>	<b>155</b>
6.1. Основные понятия и определения . . . . .	155
6.2. Дифференциальные уравнения первого порядка. . . . .	156
6.2.1. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными. . . . .	157
6.2.2. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка . . . . .	160
6.2.3. Некоторые приложения дифференциальных уравнений первого порядка. . . . .	164
6.3. Дифференциальные уравнения второго порядка . . . . .	166
6.3.1. Основные понятия . . . . .	166
6.3.2. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами . . . . .	168
<b>Глава 7. Основы теории вероятностей . . . . .</b>	<b>172</b>
7.1. Случайные события и их вероятности . . . . .	172
7.1.1. Элементы комбинаторики . . . . .	172
7.1.2. Случайные события и их свойства . . . . .	175
7.1.3. Классическое определение вероятностей . . . . .	178
7.1.4. Свойства вероятностей . . . . .	183
7.1.5. Статистическое определение вероятностей. . . . .	186
7.1.6. Условные вероятности. Независимость событий. . . . .	187
7.1.7. Формула полной вероятности . . . . .	190
7.1.8. Формулы Бернулли и Пуассона. . . . .	192
7.2. Случайные величины и их законы распределения . . . . .	197
7.2.1. Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины. . . . .	198
7.2.2. Функция распределения и плотность вероятности непрерывной случайной величины . . . . .	201
7.2.3. Числовые характеристики случайных величин. . . . .	205
7.2.4. Нормальный закон распределения . . . . .	209
7.2.5. Совместный закон распределения и числовые характеристики двух случайных величин . . . . .	211
<b>Глава 8. Элементы математической статистики. . . . .</b>	<b>223</b>
8.1. Выборочный метод. . . . .	223
8.1.1. Генеральная совокупность. Выборка . . . . .	223
8.1.2. Статистическое распределение выборки . . . . .	225
8.1.3. Эмпирическая функция распределения. . . . .	228

8.1.4. Статистический интервальный ряд распределения. Гистограмма . . . . .	229
8.2. Оценки характеристик распределения по данным выборки. . . . .	232
8.2.1. Точечные оценки . . . . .	233
8.2.2. Интервальные оценки . . . . .	235
8.2.3. Статистические оценки случайных погрешностей измерений . . . . .	239
8.3. Метод наименьших квадратов и сглаживание экспериментальных зависимостей . . . . .	241
8.4. Элементы корреляционно-регрессионного анализа . . . . .	246
8.4.1. Линейная и полиномиальная регрессии . . . . .	247
8.4.2. Построение выборочной линии регрессии . . . . .	249
8.5. Проверка статистических гипотез . . . . .	258
8.5.1. Выбор из двух гипотез. Введение. . . . .	258
8.5.2. Проверка значимости коэффициента корреляции . . . . .	261
8.5.3. Сравнение средних двух нормально распределенных генеральных совокупностей с неизвестными одинаковыми дисперсиями . . . . .	262
8.5.4. Критерий равенства двух дисперсий. . . . .	264
8.5.5. Критерий согласия Пирсона ( $\chi^2$ -критерий) . . . . .	266
8.6. Временные ряды. Основные понятия. . . . .	272
8.6.1. Оценки вероятностных характеристик временных рядов. . . . .	274
8.6.2. Сглаживание временных рядов . . . . .	275
<b>Глава 9. Введение в теорию массового обслуживания. Формулы Эрланга . . . . .</b>	<b>280</b>
<b>Ответы к самостоятельным работам . . . . .</b>	<b>288</b>
Глава 1 . . . . .	288
Глава 2 . . . . .	290
Глава 3 . . . . .	296
Глава 4 . . . . .	298
Глава 5 . . . . .	298
Глава 6 . . . . .	299
Глава 7 . . . . .	299
Глава 8 . . . . .	301
<b>Приложения. Статистические таблицы . . . . .</b>	<b>304</b>
Приложение 1. . . . .	304
Приложение 2. . . . .	306
Приложение 3. . . . .	308
Приложение 4. . . . .	312
Литература . . . . .	316
Предметный указатель . . . . .	317

# Глава 1

## ВВЕДЕНИЕ

### В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

#### 1.1. ФУНКЦИИ

##### 1.1.1. Определение функции, числовых промежутков и окрестности точек

Одним из основных математических понятий является понятие функции, устанавливающее зависимость между элементами двух множеств.

**Определение.** Пусть  $X, Y$  — некоторые множества, элементами которых являются некоторые числа. Если каждому числу  $x \in X$  по некоторому закону или правилу  $f$  ставится в соответствие число  $y \in Y$ , то говорят, что на множестве  $X$  задана числовая функция  $f$ , и записывают эту функциональную зависимость формулой  $y = f(x)$  или, более наглядно, в виде диаграммы:

$$X \xrightarrow{f} Y. \quad (1.1)$$

Переменная  $x$  называется *независимой переменной* или *аргументом*, а переменная  $y$  — *зависимой переменной* (от  $x$ ) или *функцией*.

Множество  $X$  — область изменения аргумента — называется *областью определения функции* (ООФ). Множество  $Y$ , содержащее все значения, которые принимает  $y$ , называется *областью изменения функции*.

При дальнейшем изложении множества  $X$  и  $Y$  часто оказываются конечными или бесконечными промежутками.

*Конечные промежутки:*

- открытый интервал, или просто интервал  $(a; b)$  — множество вещественных чисел, удовлетворяющих неравенствам  $a < x < b$ , или  $(a; b) \Leftrightarrow (a < x < b)$ , где  $\Leftrightarrow$  — знак эквивалентности;
- замкнутый интервал (или отрезок)  $[a; b]$ :  $[a; b] \Leftrightarrow (a \leq x \leq b)$ ;
- полуоткрытые интервалы  $(a; b]$  и  $[a; b)$ :  $(a; b] \Leftrightarrow (a < x \leq b)$  и  $[a; b) \Leftrightarrow (a \leq x < b)$  соответственно.

*Бесконечные промежутки:*

- $(-\infty, +\infty) = R$  — множество всех вещественных чисел, т. е.  $R \Leftrightarrow (-\infty < x < +\infty)$ ; аналогично,  $(a; +\infty) \Leftrightarrow (a < x < +\infty)$  и т. д.

Числа  $a, b$  называются соответственно *левым* и *правым концами* этих промежутков.

Символы  $-\infty$  и  $+\infty$  — не числа, а обозначение процесса неограниченного удаления точек числовой оси влево и вправо от начала 0.

Пусть  $x_0$  — любое действительное число (точка на числовой прямой). *Окрестностью точки  $x_0$*  называется любой интервал  $(a; b)$ , содержащий точку  $x_0$ , интервал  $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ , где  $\varepsilon > 0$ , симметричный относительно  $x_0$ , называется  $\varepsilon$ -*окрестностью точки  $x_0$*  (рис. 1.1).

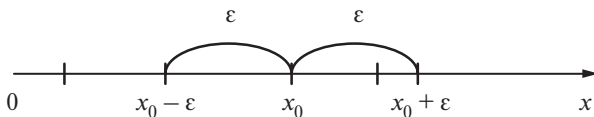


Рис. 1.1.  $\varepsilon$ -окрестность точки  $x_0$

Если  $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ , то справедливы неравенства

$$x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon,$$

что равносильно

$$|x - x_0| < \varepsilon.$$

*Частное значение функции  $f(x)$  при  $x = a$*  можно найти, подставив  $a$  вместо аргумента:  $f(a)$ . При этом  $a$  может быть как буквенным выражением, числом, так и некоторой функцией, например  $\varphi(t)$ . В последнем случае  $f(\varphi(t))$  будет сложной функцией, с ней мы ознакомимся в п. 1.1.3.

**Пример 1.** Найти область определения и область значений функции

$$y = \sqrt{1 - x^2}.$$

*Решение.* Область определения этой функции состоит из всех  $x$ , для которых она имеет смысл. Таким образом,  $X = \{x \mid x \leq 1\} \Leftrightarrow [-1; 1]$ ,  $Y = [0; 1]$ , т. е.  $[-1; 1] \xrightarrow{f} [0; 1]$ .

**Пример 2.** Найти область определения и область значений функции

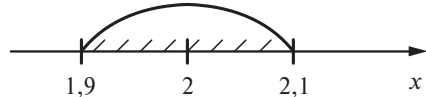
$$y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

*Решение.* Здесь независимая переменная  $n$  принимает целые положительные значения  $n \in N = \{1, 2, \dots\}$ , следовательно,  $u$  является функцией натурального аргумента и вычисляется по заданной формуле

$$Y = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \left(\frac{1}{2}\right)^n, \dots \right\}, \quad \mathbf{N} \xrightarrow{f} Y.$$

**Пример 3.** При  $\varepsilon = 0,1$  построить  $\varepsilon$ -окрестность точки  $x_0 = 2$ .

*Решение.* По определению  $\varepsilon$ -окрестности точки  $x_0 = 2$  будет интервал  $|x - 2| < 0,1$  или  $-0,1 < x - 2 < 0,1 \Rightarrow 1,9 < x < 2,1$  (рис. 1.2).



**Рис. 1.2.** Интервал  $|x - 2| < 0,1$

### Самостоятельная работа

**1.** Построить интервалы изменения переменной  $x$ , удовлетворяющей неравенствам:

1)  $|x| < 4$ ;

2)  $x^2 \leq 9$ ;

3)  $|x - 4| < 1$ ;

4)  $-1 < x - 3 \leq 2$ ;

5)  $x^2 > 9$ ;

6)  $(x - 2)^2 \leq 4$ .

**2.** Найти области определения функций:

1)  $y = \sqrt{x+2}$ ;

2)  $y = \sqrt{9-x^2}$ ;

3)  $y = \sqrt{4x-x^2}$ ;

4)  $y = \sqrt{-x} + \sqrt{4+x}$ ;

5)  $y = \arcsin \frac{x-1}{2}$ ;

6)  $y = -\sqrt{2\sin x}$ ;

7)  $y = -\frac{x\sqrt{16-x^2}}{2}$ ;

8)  $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{3-x}$ .

**3.** Вычислить значения функций в заданных точках:

1)  $f(x) = x^2 - x + 1$ ;  $f(2)$ ,  $f(a+1)$ ;

2)  $\varphi(x) = \frac{2x-3}{x^2+1}$ ;  $\varphi\left(\frac{3}{2}\right)$ ,  $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ ,  $\frac{1}{\varphi(x)}$ ;

3)  $F(x) = x^2$ ;  $\frac{F(b)-F(a)}{b-a}$ ,  $F\left(\frac{a+h}{2}\right) - F\left(\frac{a-h}{2}\right)$ .



### 1.1.2. Некоторые свойства функций и их графиков

Пусть задана функция  $f: X \rightarrow Y$ . Правило, по которому можно найти  $y$ , зная  $x$ , может быть задано графиком функции.

**Определение.** *Графиком функции* в декартовой прямоугольной системе координат называется множество всех точек, абсциссы которых являются значениями аргумента, а ординаты — соответствующими значениями функции.

**Пример 1.** Графиком функции  $y = x^2$  является парабола, ось симметрии которой совпадает с положительной полуосью ординат, а вершина — с началом координат (рис. 1.3).

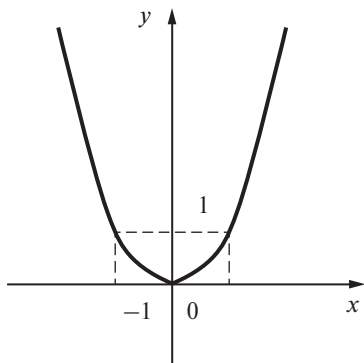


Рис. 1.3. График функции  $y = x^2$

Часто графики автоматически вычерчиваются самопишущими приборами или изображаются на экране дисплея. Преимуществом такого представления функции является наглядность, а недостатком — неточность.

Функцию можно задавать также с помощью таблицы или формулы (аналитически). *Табличный способ* применяется на практике при обработке результатов наблюдений приближенных значений функции. *Аналитический способ*

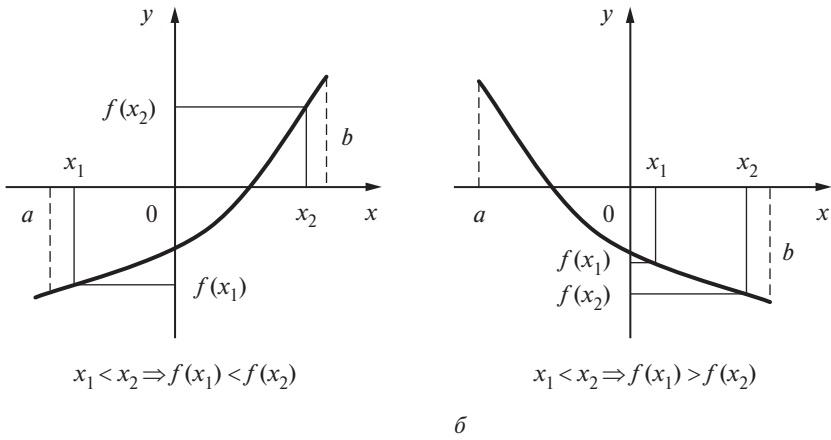
задания функции является наиболее удобным для полного исследования функции при помощи методов математического анализа.

Отметим основные характеристики функции: монотонность, ограниченность, четность (нечетность), периодичность.

**Определение.** Функция называется *возрастающей* (*убывающей*) в интервале, если большему значению аргумента из этого интервала соответствует большее (меньшее) значения функции.

График возрастающей на интервале  $(a; b)$  функции, если его рассматривать слева направо, поднимается вверх (рис. 1.4, а), а для убывающей функции — опускается вниз (рис. 1.4, б).

**Определение.** Интервал независимой переменной, в котором функция возрастает (убывает), называется *интервалом возрастания* (*убывания*). Как интервал возрастания, так и интервал убывания называют *интервалами монотонности* функции, а функцию в этом интервале — *монотонной функцией*.



**Рис. 1.4.** График: *a* — возрастающей функции на интервале  $(a; b)$ ; *б* — убывающей функции на интервале  $(a; b)$

**Определение.** Значение аргумента, при котором функция обращается в ноль, называется *нулем функции*.

Если функция задана формулой  $y = f(x)$ , то для нахождения нуля (или нулей) функции следует решить уравнение  $f(x) = 0$ .

При графическом задании нулями функции являются точки пересечения ее графиком оси абсцисс.

**Пример 2.** Найти нули функции  $y = 2x + 1$ .

*Решение.*

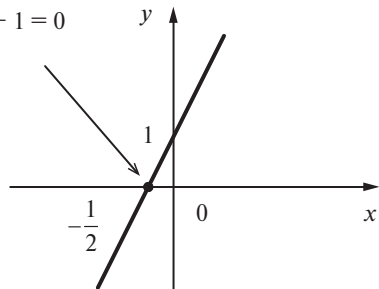
$$2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ (рис. 1.5).}$$

**Определение.** Функция называется *четной*, если при изменении знака допустимого аргумента значение функции не изменяется. Функция называется *нечетной*, если при изменении знака допустимого аргумента значение функции меняет знак на противоположный.

Таким образом, если функция  $f(x)$  — четная, то для всех  $x$  из ее

Корень уравнения

$$2x + 1 = 0$$



**Рис. 1.5.** График функции  $y = 2x + 1$

области определения должно выполняться равенство  $f(-x) = f(x)$ , как это происходит, например, при  $f(x) = x^2$ , а если  $f(x)$  — нечетная, то  $f(-x) = -f(x)$  для любого  $x$  из области определения функции, как, например, в случае  $f(x) = x^3$ .

Обратите внимание на то, что четные или нечетные функции должны быть обязательно определены в области, симметричной относительно начала координат.

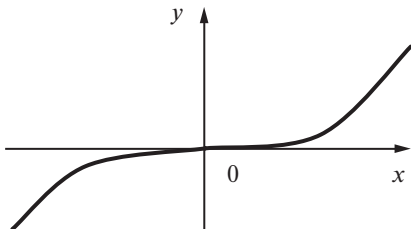


Рис. 1.6. График функции  $y = x^3$

**Определение.** Функция  $f(x)$ , определенная на множестве  $X$ , называется *ограниченной* на этом множестве, если существует такое число  $M > 0$ , что для всех  $x \in X$  выполняется неравенство  $|f(x)| \leq M$ .

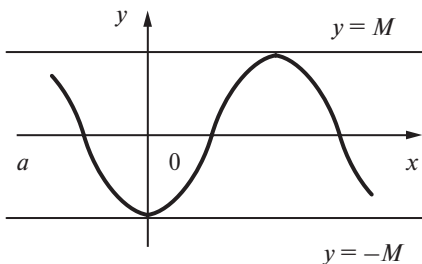


Рис. 1.7. График ограниченной функции

График периодической функции получается путем повторения части графика, соответствующего интервалу оси абсцисс, равному по длине периоду функции.

Примером периодической функции служит определенная на всей оси функция  $y = \cos x$ , период которой равен  $2\pi$  (рис. 1.8).

При этом график четной функции симметричен относительно оси ординат (как на рис. 1.3), а график нечетной функции симметричен относительно начала координат (как на рис. 1.6).

Заметим, что не все функции являются четными либо нечетными; такие функции (не являющиеся ни четными, ни нечетными) будем называть функциями *общего вида*.

График ограниченной функции лежит между прямыми  $y = M$  и  $y = -M$  (рис. 1.7).

**Определение.** Функция  $f(x)$  называется *периодической*, если существует такое положительное число  $a$ , что  $f(x + a) = f(x) = f(x - a)$  для любого  $x$  из ООФ (точек  $x$ ,  $x + a$ ,  $x - a$ , принадлежащих области определения функции). При этом наименьшее положительное  $a$  с таким свойством (если таковое существует) называется *периодом* функции.

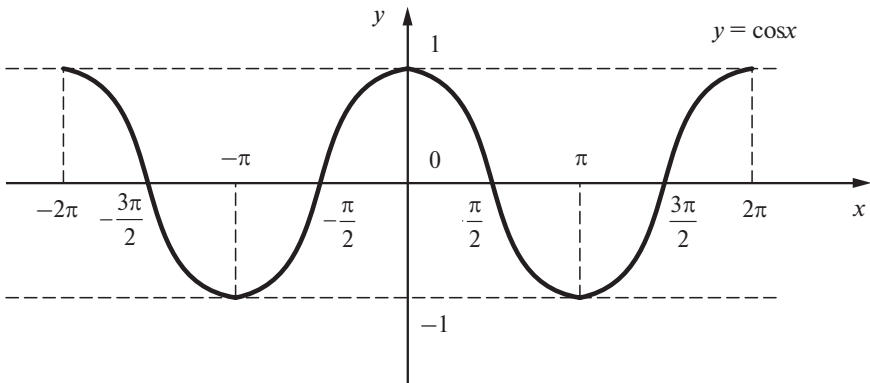


Рис. 1.8. График функции  $y = \cos x$

Таким образом, сдвиг графика периодической функции вдоль оси абсцисс на интервал, длина которого кратна периоду, не приводит к изменению этого графика. В частности область определения периодической функции не ограничена.

### Самостоятельная работа

1. Указать, какие из следующих функций четные и какие нечетные:

- |                            |  |
|----------------------------|--|
| 1) $\frac{\sin x}{x}$ ;    | 2) $\frac{a^x - 1}{a^x + 1}$ ;             |
| 3) $a^x + \frac{1}{a^x}$ ; | 4) $a^x - \frac{1}{a^x}$ ;                 |
| 5) $x \sin^2 x - x^3$ ;    | 6) $x + x^2$ ;                             |
| 7) $ x $ ;                 | 8) $\frac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x}$ . |

2. Найти нули функции:

- |                                    |                         |
|------------------------------------|-------------------------|
| 1) $y = ax + b$ ;                  | 2) $y = x^2 + px + q$ ; |
| 3) $y = x^4 + px^2 + q$ ;          | 4) $y = 2 \lg(x + 1)$ ; |
| 5) $y = a^{2x} - a^2$ ( $a > 0$ ); | 6) $y = 2 \sin x - 1$ ; |
| 7) $y = \operatorname{tg} x + 1$ . |                         |

3. Найти период функции:

- |                                 |                             |   |
|---------------------------------|-----------------------------|---|
| 1) $y = \operatorname{tg} 2x$ ; | 2) $y = \sin \frac{x}{2}$ ; | 3) $y = \frac{\operatorname{ctg} x}{\cos 2x}$ . |
|---------------------------------|-----------------------------|---|

4. Воспользовавшись свойствами графиков четных/нечетных функций и результатами п. 1.1.2, построить графики функций:

1)  $y = |x|$ ;

2)  $y = -x + |x|$ ;

3)  $y = -|x - 2|$ ;

4)  $y = x - 4 + |x - 2|, x \in [-2; 5]$ ;

5)  $y = \lg(x + 2)$ ;

6)  $y = 2^{-x}$ ;

7)  $y = x^2 + 2x + 2$ ;

8)  $y = -x^2 + 4x$ .

### 1.1.3. Сложная функция. Обратная функция

**Определение.** *Сложной функцией* (рис. 1.9) называется функция, аргумент которой также является функцией, т. е.  $F(x) = f(\varphi(x))$ , или, в виде диаграммы, аналогично формуле (1.1).

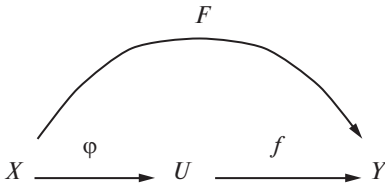


Рис. 1.9. Сложная функция

Иначе говоря, чтобы сосчитать значение в точке  $x$  сложной функции  $f(\varphi(x))$ , составленной из функций  $f$  и  $\varphi$ , следует сначала найти частное значение  $u = \varphi(x)$  внутренней функции  $\varphi$ , а затем подставить его в качестве аргумента во внешнюю функцию  $f$ .

При этом область определения функции  $F(x)$  следует выбирать таким образом, чтобы промежуточное множество  $U$ , с одной стороны, было областью значений функции  $\varphi(x)$ , а с другой стороны, являлось областью определения функции  $f(u)$ .

**Пример 1.** Рассмотрим сложную функцию  $y = \lg(1 - x^2)$ . Здесь  $y = f(u) = \lg u$ , в то время как  $u = \varphi(x) = 1 - x^2$ . Областью определения функции  $y$  является интервал  $(-1, 1)$ , в котором как функция  $\varphi(x)$ , так и функция  $f(u)|_{u=\varphi(x)}$  имеют смысл.

Рассмотрим функцию с областью определения  $X$  и областью значений  $Y$ . Предположим, что каждому значению  $y \in Y$  соответствует одна определенная точка  $x \in X$ , такая, что  $y = f(x)$ . Тогда существует функция  $\varphi: Y \rightarrow X$ , переводящая любое  $y \in Y$  в  $x \in X$ , удовлетворяющее вышеуказанному свойству  $y = f(x)$ .

Функции  $f$  и  $\varphi$  с вышеперечисленными свойствами называются *взаимно-обратными*, а функция  $\varphi$  называется *обратной* по отношению к  $f$ . С учетом того, что символ  $x$  соответствует, как правило, независимой переменной, обычно вместо записи  $x = \varphi(y)$  используют запись  $y = \varphi(x)$ .

Из определения обратной функции вытекает, что любая строго монотонная функция имеет обратную.

Между графиками функций  $y = f(x)$  и  $y = \varphi(x)$  имеется простая связь: график обратной функции  $y = \varphi(x)$  симметричен графику данной функции  $y = f(x)$  относительно биссектрисы I и III координатных углов.

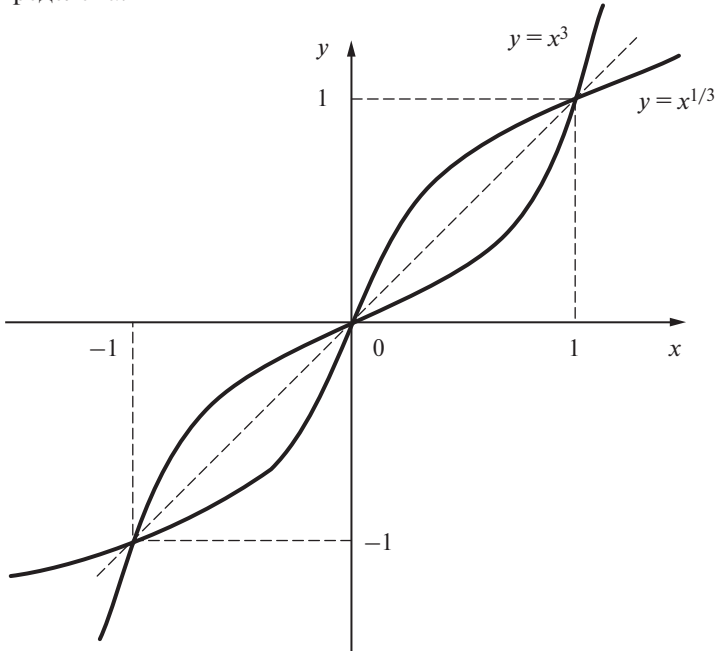
Отметим, что взаимно-обратные функции  $f$  и  $\varphi$  удовлетворяют соотношению и могут с помощью него вычисляться:

$$f(\varphi(x)) = \varphi(f(x)) = x. \quad (1.2)$$

**Пример 2.** Пусть  $y = f(x) = x^3$ . Тогда  $f(\varphi(x)) = \varphi^3(x)$  и равенство (1.2) дает  $\varphi^3(x) = x$ , или  $\varphi(x) = x^{1/3}$ , что, впрочем, легко следует непосредственно из соотношения  $y = x^3$  (рис. 1.10).

Важно иметь в виду, что функция  $f(x)$ , возрастающая или убывающая на  $X$ , заведомо имеет обратную функцию (определение возрастания и убывания функции дано в п. 1.1.2).

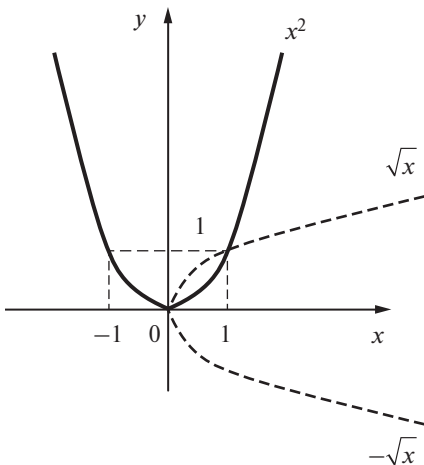
В противоположном случае однозначность соответствия между  $X$  и  $Y$  нарушается, и обратной функции не существует. Однако, как правило, область определения  $X$  можно разбить на участки возрастания и убывания функции  $f(x)$ , на каждом из которых обратная функция уже может быть определена.



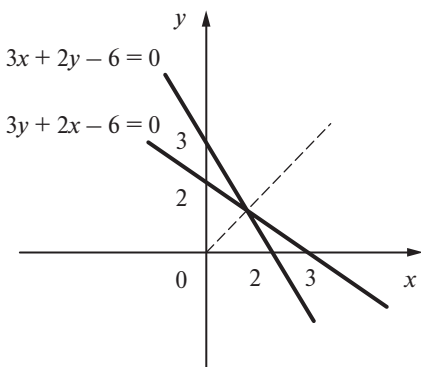
**Рис. 1.10.** Графики взаимно-обратных функций  $y = x^3$  и  $y = x^{1/3}$

**Пример 3.** Пусть  $y = x^2$ . Тогда  $X = (-\infty; \infty)$ , а  $Y = [0; +\infty)$ . Таким образом, взаимно однозначного соответствия между  $X$  и  $Y$  нет (каждому  $y \neq 0$  соответствуют два значения  $x$ , отличающиеся знаками), следовательно, нет и обратной функции (рис. 1.11).

Если же разбить  $X$  на  $(-\infty; 0]$  и  $[0; +\infty)$ , то на каждой полупрямой зависимость  $y = x^2$  является взаимно-однозначной, и, следовательно, на  $(-\infty; 0]$  функция  $y = x^2$  имеет обратную функцию  $y = -\sqrt{x}$ , а на  $[0; +\infty)$  обратной к ней является функция  $y = \sqrt{x}$ .



**Рис. 1.11.** Пример функции, не имеющей взаимно-обратной



**Рис. 1.12.** Графики взаимно-обратных линейных функций

**Пример 4.** Пусть функция  $y$  связана с независимой переменной  $x$  линейной зависимостью  $3x + 2y - 6 = 0$ . Найти обратную функцию и построить графики прямой и обратной функций.

*Решение.* Для нахождения обратной функции в общей с прямой функцией системе координат достаточно в соответствующем уравнении поменять обозначения  $x$  и  $y$  местами.

Таким образом, в нашем примере обратная зависимость выражается соотношением  $3y + 2x - 6 = 0$  и также является линейной.

При построении графиков (рис. 1.12) принималось во внимание то, что прямая линейно однозначно определяется любой парой различных лежащих на ней точек. В частности прямая  $3x + 2y - 6 = 0$  определяется точками  $(0; 3)$  и  $(2; 0)$ .

Заметим, что в соответствии со свойствами взаимно-обратных функций прямые на рис. 1.12 симметричны относительно биссектрисы I и III координатных углов.

### 1.1.4. Элементарные функции

**Определение.** Основными элементарными функциями называются:

- 1) степенная функция:  $y = x^n$ , где  $n$  — действительное число,  $x > 0$  (в некоторых случаях, в частности при натуральном  $n$ , степенная функция определена на всей оси);
- 2) показательная функция:  $y = a^x$ , где  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , и  $X = R$ ;
- 3) логарифмическая функция:  $y = \log_a x$ , где основание логарифмов  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , и  $X = (0; +\infty)$ ;
- 4) тригонометрические функции:  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \operatorname{tg} x$  и  $y = \operatorname{ctg} x$ ;
- 5) обратные тригонометрические функции:  $y = \operatorname{arcsin} x$ ,  $y = \operatorname{arccos} x$ ,  $y = \operatorname{arctg} x$  и  $y = \operatorname{arctg} x$ .

К множеству *элементарных функций* относятся все основные элементарные функции и постоянные, а также все функции, получающиеся из них с помощью четырех арифметических действий и операции взятия функции от функции, примененных последовательно конечное число раз.

Так, элементарными являются функции  $y = \lg(x + \sqrt{1 + x^2})$ ,  $y = \operatorname{arctg} \frac{2x^4}{1 - x^2}$  и  $y = \operatorname{tg} x - \sqrt{x}$ . Функция

$$y = \begin{cases} x, & x \leq 1; \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$$

элементарной не является.

Областью определения элементарной функции являются все значения аргумента, при котором эта функция имеет смысл.

Например, областью определения функции  $y = \sqrt{x^2 - 1}$  является множество  $X = (-\infty < x \leq -1 \cup 1 \leq x < +\infty)$ . Здесь символ  $\cup$  обозначает объединение.

Рассмотрим степенную и показательную функции.

Степенная функция  $y = x^n$  при целом  $n$  определена на всей оси; четная, если  $n$  — четное, и нечетная, если  $n$  — нечетное (см. рис. 1.2 и 1.5).

При произвольном  $n$  функция рассматривается в области  $x > 0$ . Если  $n > 0$ , то графики функции  $y = x^n$  возрастают от нуля до бесконечности в интервале  $(0; +\infty)$ , проходят через точки  $(0; 0)$  и  $(1; 1)$  и разделяются прямой  $y = x$  на кривые, обращенные выпуклостью вниз при  $n > 1$  и вверх при  $0 < n < 1$  (рис. 1.13, а).

Если  $n < 0$ , то график функции

$y = x^n = \left(\frac{1}{x}\right)^{|n|}$  убывает от бесконечности до нуля (рис. 1.13, б).