

Г.И. Левиев  
М.Р. Трунин

---

Учебное пособие

# Физика: научись решать задачи сам



Издательский дом  
Высшей школы экономики  
МОСКВА, 2022

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	7
Введение. Векторы в физике.....	9
Сложение векторов .....	9
О проекции вектора на ось.....	11
Умножение векторов.....	12

## ЧАСТЬ 1

### ЗАДАЧИ И ПОДСКАЗКИ 17

1. Механика .....	19
1.1. Основные формулы и определения .....	19
1.1.1. Кинематика .....	19
1.1.2. Динамика.....	24
1.1.3. Статика .....	28
1.1.4. Законы сохранения .....	31
1.1.5. Механические колебания и волны .....	34
1.2. Задачи .....	37
1.2.1. Кинематика .....	37
1.2.2. Динамика.....	53
1.2.3. Статика .....	62
1.2.4. Законы сохранения .....	74
1.2.5. Механические колебания и волны.....	81
1.3. Указания к решению задач.....	88
1.3.1. Кинематика .....	88
1.3.2. Динамика.....	95
1.3.3. Статика .....	99
1.3.4. Законы сохранения .....	107
1.3.5. Механические колебания и волны .....	112
2. Молекулярная физика и термодинамика .....	118
2.1. Основные формулы и определения .....	118
2.1.1. Молекулярная физика.....	118
2.1.2. Термодинамика.....	121

2.2. Задачи .....	124
2.2.1. Молекулярная физика .....	124
2.2.2. Термодинамика .....	130
2.3. Указания к решению задач .....	141
2.3.1. Молекулярная физика .....	141
2.3.2. Термодинамика .....	144
3. Электродинамика .....	149
3.1. Основные формулы и определения .....	149
3.1.1. Электрическое поле .....	149
3.1.2. Постоянный ток .....	153
3.1.3. Магнитное поле .....	157
3.1.4. Электромагнитная индукция .....	160
3.1.5. Электромагнитные колебания .....	162
3.1.6. Оптика .....	165
3.2. Задачи .....	169
3.2.1. Электрическое поле .....	169
3.2.2. Постоянный ток .....	183
3.2.3. Магнитное поле .....	201
3.2.4. Электромагнитная индукция .....	208
3.2.5. Электромагнитные колебания .....	215
3.2.6. Оптика .....	229
3.3. Указания к решению задач .....	244
3.3.1. Электрическое поле .....	244
3.3.2. Постоянный ток .....	252
3.3.3. Магнитное поле .....	259
3.3.4. Электромагнитная индукция .....	264
3.3.5. Электромагнитные колебания .....	268
3.3.6. Оптика .....	275
4. Основы специальной теории относительности .....	284
4.1. Основные формулы и определения .....	284
4.2. Задачи .....	286
4.3. Указания к решению задач .....	290
5. Квантовая физика и астрофизика .....	293
5.1. Основные формулы и определения .....	293
5.1.1. Корпускулярно-волновой дуализм .....	293

5.1.2. Физика атома .....	294
5.1.3. Физика атомного ядра .....	295
5.1.4. Элементы астрофизики .....	296
5.2. Задачи .....	297
5.2.1. Корпускулярно-волновой дуализм .....	297
5.2.2. Физика атома .....	303
5.2.3. Физика атомного ядра .....	306
5.2.4. Элементы астрофизики .....	309
5.3. Указания к решению задач .....	316
5.3.1. Корпускулярно-волновой дуализм .....	316
5.3.2. Физика атома .....	319
5.3.3. Физика атомного ядра .....	321
5.3.4. Элементы астрофизики .....	323

## ЧАСТЬ 2

### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

	325
6. Механика .....	327
6.1. Кинематика .....	327
6.2. Динамика .....	365
6.3. Статика .....	387
6.4. Законы сохранения .....	414
6.5. Механические колебания и волны .....	435
7. Молекулярная физика и термодинамика .....	453
7.1. Молекулярная физика .....	453
7.2. Термодинамика .....	465
8. Электродинамика .....	482
8.1. Электрическое поле .....	482
8.2. Постоянный ток .....	520
8.3. Магнитное поле .....	548
8.4. Электромагнитная индукция .....	567
8.5. Электромагнитные колебания .....	580
8.6. Оптика .....	606

9. Основы специальной теории относительности.....	650
10. Квантовая физика и астрофизика .....	661
10.1. Корпускулярно-волновой дуализм .....	661
10.2. Физика атома .....	671
10.3. Физика атомного ядра .....	678
10.4. Элементы астрофизики .....	682

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие «Физика: научись решать задачи сам» ориентировано на целенаправленную подготовку к Единому государственному экзамену (ЕГЭ) по физике в школе и дополнительному вступительному испытанию (ДВИ) при поступлении на физический факультет некоторых университетов. Серьезная самостоятельная работа с пособием позволит школьнику не только набрать высокие баллы на ЕГЭ и поступить в желаемый университет, но и плавно перейти к изучению там современного курса физики.

Ежегодно около 15–17% выпускников школ сдают ЕГЭ по физике. Встает вопрос о наиболее эффективной технологии подготовки к ЕГЭ и ДВИ в условиях ограниченного времени. Сегодня имеются рынок репетиторов, множество пособий для подготовки к ЕГЭ по физике, есть сайты в Интернете, где приведены тысячи задач с решениями. Это, безусловно, полезные ресурсы, и их можно использовать в процессе подготовки. Но как научиться самому решать задачи? Ведь умение самостоятельно работать и принимать обдуманные решения — ценное качество, обладатели которого обычно и достигают карьерного успеха. Взявшись за данное пособие, у вас появляется возможность преодолеть неуверенность в собственных силах и научиться быстро решать задачи, в том числе непростые, если следовать предложенной в пособии траектории решения.

Первая часть состоит из пяти глав, включающих 14 тематических блоков, которые охватывают все разделы школьного курса физики. Каждая глава начинается краткой сводкой основных формул и определений, используемых при решении задач по теме. Нумерация формул и определений соответствует порядку следования тем в блоках данной главы. В каждом тематическом блоке содержится несколько десятков стандартных и оригинальных задач, взятых из реальных ситуаций, что позволяет школьнику легко представить себе условие задачи. После каждой задачи приводится только численный ответ. Если этот ответ сразу не получается, нужно заглянуть в раздел «Указания к решению задач», который находится в конце каждой главы. В нем к каждой задаче разбирается физическая ситуация и приводится ссылка на необходимые для ее решения формулы в начале главы (например, «использовать 2-й закон Ньютона в импульсной форме (1.1.4.2)). Таким образом, сначала вы пробуете понять сюжет и физический смысл задачи, потом выстраиваете логику ее решения и переводите эту последовательность мысленных действий на математический язык, ну и в конечном итоге получаете ответ. Если он не сходится с приведенным ответом, сравните ход своих рассуждений и вычислений с предлагаемыми в указании. Такое «почти самостоятельное» решение задач особенно по-

лезно в начале подготовки, когда нужно преодолеть неуверенность в собственных силах. Поскольку в нынешних условиях школьник не может позволить себе роскошь обдумывать задачу слишком долго, если за 20–30 мин ему не удалось найти ответ даже с помощью подсказки в указаниях, тогда уже следует заглянуть во вторую часть пособия, где приведены подробные решения всех задач. Для закрепления полезно также отметить номер задачи, вызвавшей затруднения, и вернуться к ней через одну-две недели.

Для преподавателей физики в школе пособие может быть интересно тем, что в нем обращается внимание на некоторые распространенные ошибки в известных задачниках по физике для школы.

# ВВЕДЕНИЕ. ВЕКТОРЫ В ФИЗИКЕ

Векторы как удобная система обозначений и правила работы с ними появились в середине XIX в. Основатели физики — Ньютон, Галилей — не использовали векторы.

Для наших целей можно смотреть на векторы как на отрезки со стрелкой на одном конце, правила обращения с которыми придуманы, как придуманы правила игры в шахматы, например, конь ходит буквой «Г». Разница между этими «придумками» в том, что шахматные правила не используются нигде, кроме шахмат, а правила обращения с векторами отражают поведение физических величин — сил, скоростей, напряженностей полей и упрощают описание физической картины.

Вектор характеризуется длиной отрезка (модулем вектора) и направлением. Два вектора  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$  считаем равными и записываем  $\vec{A} = \vec{B}$ , если совпадают их модули  $A = B$  и направления. Буква со стрелкой обозначает вектор, а та же буква без стрелки — его модуль, положительное число. На рис. В1 модуль вектора  $\vec{C}$  равен модулю вектора  $\vec{A}$ , т.е.  $C = A$ . Но это не равные векторы,  $\vec{C} \neq \vec{A}$ , из-за того, что у них разные направления. Вектор  $\vec{D}$  направлен, как вектор  $\vec{A}$ , но его модуль больше, чем модуль вектора  $\vec{A}$ , и потому  $\vec{D} \neq \vec{A}$ . Вектор  $\vec{E}$ , модуль которого такой же, как у вектора  $\vec{A}$ , а направление противоположное, считаем связанным с  $\vec{A}$  соотношением  $\vec{E} = -\vec{A}$ .

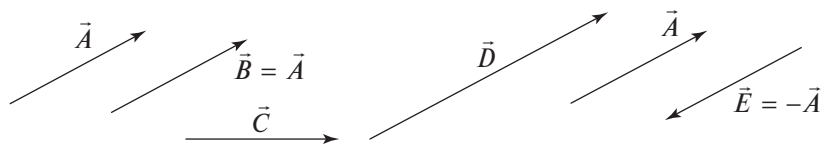


Рис. В1

## Сложение векторов

Сформулируем основное правило, благодаря которому векторы находят применение в физике. Вектор  $\vec{C}$  называется суммой вектора  $\vec{A}$  и вектора  $\vec{B}$ ,  $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ , если он построен, как на рис. В2, *a* (правило параллелограмма), или, что эквивалентно, как на рис. В2, *б* (правило треугольника).





Рис. В2

Вектор  $\vec{D}$ , равный разности вектора  $\vec{A}$  и вектора  $\vec{B}$ , определяется как сумма вектора  $\vec{A}$  и вектора  $(-\vec{B})$ :  $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$ . Он находится как вторая диагональ параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$  (рис. В3). Стрелка вектора разности ставится около вектора-уменьшаемого (правило «уколи уменьшаемое»).

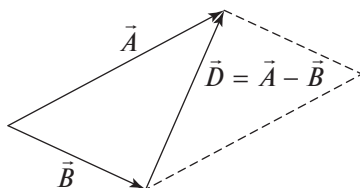


Рис. В3

Приведем пример использования векторов в физике. Два трактора равномерно перемещают по земле контейнер с помощью тросов. Угол между тросами  $\alpha = 60^\circ$ . В тросах имеются встроенные динамометры, которые показывают натяжения тросов 3 кН и 4 кН соответственно. Спрашивается, можно ли заменить два трактора одним, обеспечив такое же перемещение контейнера? И если можно, то как должен быть ориентирован единственный трос от одного трактора и каково натяжение этого троса? Ответ на поставленные физические вопросы дает эксперимент, который показывает, что «работает» правило сложения векторов. То есть нужно представить силы как векторы, направленные вдоль тросов, с модулями 3 кН и 4 кН. Дальше найти результирующий вектор по правилу сложения векторов, т.е. модуль их суммы, равный длине диагонали параллелограмма, и направление вдоль этой диагонали как направление движения троса. Динамометр, встроенный в этот трос, покажет величину натяжения, соответствующую длине диагонали, — около 6 кН, согласно теореме косинусов.

Этот пример показывает, что правило сложения векторов не только соответствует нашему воображению, как правила игры в шахматы, но

и подстроено и подогнано так, чтобы описывать реальные эксперименты. Удивительно, что описание с помощью векторов удобно для разных физических величин — сил, перемещений, скоростей, напряженностей электрического и магнитного полей.

### О проекции вектора на ось

Пусть имеются вектор  $\vec{A}$  и координатная ось  $x$  (рис. В4). Векторы, о которых мы говорим, свободные, т.е. их можно перемещать параллельно самим себе. Переместим вектор  $\vec{A}$  так, чтобы его начало оказалось на оси  $x$ , и опустим перпендикуляр из конца вектора на ось (рис. В5).



Рис. В4

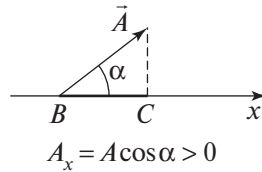


Рис. В5

Проекцией  $A_x$  вектора  $\vec{A}$  на ось  $x$  называют величину  $A_x = A \cos \alpha$ . Если угол  $\alpha$  острый, косинус положительный, величина проекции положительная и равна длине отрезка  $BC = A_x$ . В случае прямого угла  $\alpha = 90^\circ$  проекция вектора на ось обращается в ноль (рис. В6). При углах из интервала  $90^\circ < \alpha < 270^\circ$  косинус отрицательный и проекция тоже отрицательная (рис. В7). Во многих задачах приходится брать проекции вектора сразу на две оси, как правило, перпендикулярные друг другу, хотя и не всегда (рис. В8). Иногда удобнее вместо двух проекций, т.е. двух алгебраических чисел, соответствующих данному вектору, представить вектор как сумму двух взаимно перпендикулярных векторов — говорят «разложить вектор на две составляющие».

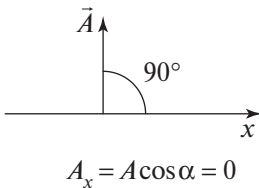


Рис. В6

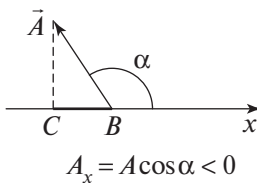


Рис. В7

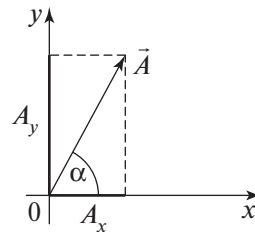


Рис. В8

Например, бывает полезно силу тяжести  $m\vec{g}$  тела, лежащего на наклонной плоскости, представить как сумму двух сил: скатывающей силы  $\vec{F}_{\text{ск}}$ , направленной вдоль наклонной плоскости вниз, и силы нормального давления  $\vec{N}$ , направленной перпендикулярно наклонной плоскости:  $m\vec{g} = \vec{F}_{\text{ск}} + \vec{N}$  (рис. В9).

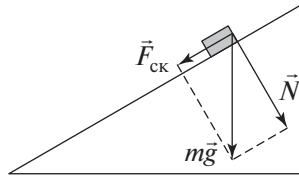


Рис. В9

## Умножение векторов

Векторы можно не только складывать и вычитать, но и умножать друг на друга. Мы рассмотрим два способа умножения векторов.

1. **Скалярное произведение векторов.** По определению скалярным произведением двух векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{C}$  называется число  $A$  (не вектор, а скаляр), равное произведению модулей векторов  $B$  и  $C$  и косинуса угла  $\alpha$  между векторами:

$$A = \vec{B} \cdot \vec{C} \equiv B \cdot C \cdot \cos\alpha.$$

Из определения видно, что скалярное произведение может быть положительным, отрицательным или равным нулю. В физике с помощью скалярного произведения определяют работу силы. Если при действии на тело постоянной силы  $\vec{F}$  оно переместилось на величину  $\vec{s}$ , то работа  $A$  силы при этом перемещении по определению равна  $A \equiv Fs \cos\alpha$ . Угол  $\alpha$  здесь — это угол между векторами  $\vec{F}$  и  $\vec{s}$ .

Скалярное произведение векторов можно выразить не через модули и угол, а через проекции векторов на оси прямоугольной (декартовой) системы координат:

$$A = \vec{B}\vec{C} = BC \cos\alpha = B_x C_x + B_y C_y + B_z C_z.$$

2. **Векторное произведение.** Векторным произведением  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$  называется вектор  $\vec{F} = \vec{v} \times \vec{B}$ , модуль которого равен произведению модулей  $v$  и  $B$  и синуса угла  $\alpha$  между этими векторами:  $F \equiv vB \sin\alpha$ . По определению вектор  $\vec{F}$  направлен перпендикулярно обоим векторам-сомножителям  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ . При этом, если смотреть со стороны конца вектора-произведения  $\vec{F}$ ,

ближайший поворот от первого сомножителя  $\vec{v}$  ко второму сомножителю  $\vec{B}$  должен проходить против часовой стрелки (рис. В10).

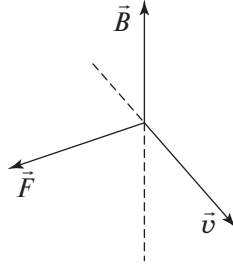


Рис. В10

В физике векторное произведение используется в механике, например, для описания моментов сил и импульсов, в электродинамике, например, для выражения силы Лоренца  $\vec{F}_L = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$ . Если при знакомстве с силой Лоренца не используется представление о векторном произведении векторов, то для указания направления силы Лоренца вводят правило левой руки. Любой вектор  $\vec{A}$  можно задать с помощью его проекций на заданную систему координатных осей. В общем случае нужно указать три проекции, но если вектор лежит в плоскости, проведенной через оси координат  $x, y$ , то для характеристики вектора хватает двух проекций —  $A_x, A_y$ .

В некоторых задачах удобно ввести единичные безразмерные векторы, направленные вдоль осей координат, — орты. Стандартные обозначения ортов:  $\vec{i}$  для единичного вектора вдоль оси  $x$  и  $\vec{j}$  для орта, направленного вдоль оси  $y$  (рис. В11). Если используется и третья ось координат  $z$ , орт вдоль этой оси обозначается  $\vec{k}$ .

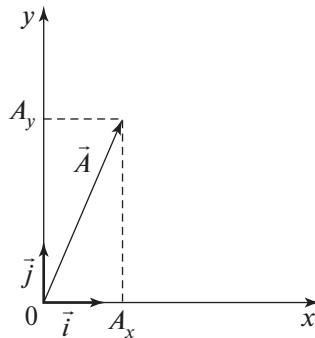


Рис. В11

Произвольные векторы  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  с помощью ортов можно записать так:

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j}, \quad \vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j}.$$

Найдем скалярное произведение  $\vec{A}\vec{B}$  векторов:

$$\vec{A}\vec{B} = (A_x \vec{i} + A_y \vec{j})(B_x \vec{i} + B_y \vec{j}) = A_x \vec{i} B_x \vec{i} + A_x \vec{i} B_y \vec{j} + A_y \vec{j} B_x \vec{i} + A_y \vec{j} B_y \vec{j}. \quad (1)$$

Ответ содержит скалярные произведения ортов  $\vec{i}\vec{i}$ ,  $\vec{j}\vec{j}$ ,  $\vec{i}\vec{j}$ . Орты перпендикулярны друг другу, поэтому скалярное произведение двух разных ортов равно нулю:

$$\vec{i}\vec{j} = ij \cos 90^\circ = 0. \quad (2)$$

Скалярные «квадраты» ортов, т.е. произведения одинаковых векторов, равны единице:

$$\vec{i}\vec{i} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0^\circ = 1, \quad \vec{j}\vec{j} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0^\circ = 1. \quad (3)$$

С учетом (2), (3) для скалярного произведения (1) имеем

$$\vec{A}\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y. \quad (1a)$$

*Вывод.* Для скалярного произведения векторов получено выражение через проекции векторов (1a). Зная проекции, можно найти скалярное произведение векторов, не рассматривая угол между ними.

### Примеры

1. Модули векторов  $A$ ,  $B$ ,  $C$  на рис. В12 равны 45, 90, 120 соответственно:

а) чему равен модуль вектора  $\vec{D}$ , равного сумме этих векторов  $\vec{D} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ ?

б) чему равны углы  $\alpha$  и  $\beta$ ?

в) чему равно скалярное произведение  $\vec{A}\vec{C}$  векторов  $\vec{A}$  и  $\vec{C}$ ?

г) чему равен модуль вектора  $\vec{F}$ , равного векторному произведению  $\vec{A} \times \vec{C} = \vec{F}$  векторов  $\vec{A}$  и  $\vec{C}$ ?

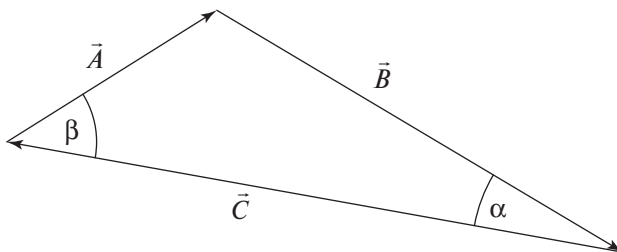


Рис. В12

д) чему равна площадь треугольника, построенного на векторах  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{C}$ ?

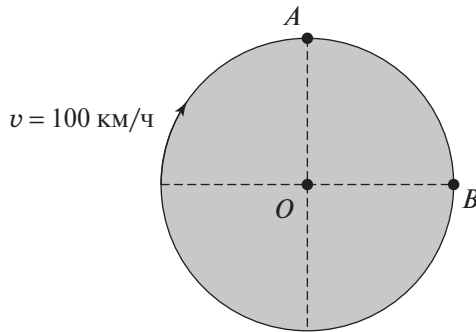


Рис. В13

2. Автомобиль едет по круговой дорожке вокруг стадиона со скоростью  $v = 100 \text{ км/ч}$  (рис. В13). Нарисовать вектор разности скоростей  $\vec{v}_B - \vec{v}_A$  в точках  $A$  и  $B$  и вычислить модуль этого вектора.

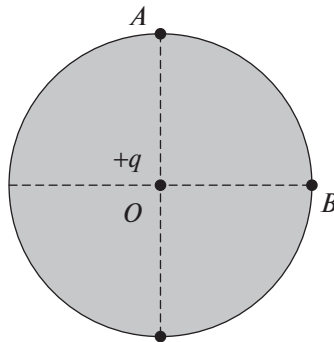
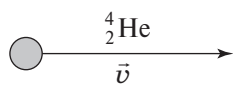
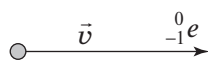


Рис. В14

3. На столе в точке  $O$  расположен точечный электрический заряд  $+q$  (рис. В14). Нарисовать векторы  $\vec{E}_A$ ,  $\vec{E}_B$ ,  $\vec{E}_C$  напряженности поля в точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и вектор суммы этих векторов.

4. Магнитное поле направлено перпендикулярно плоскости рисунка от нас (рис. В15). Электрон и альфа-частица влетают в поле с одинаковыми скоростями  $\vec{v}$  в плоскости рисунка. Изобразить векторы сил Лоренца, действующих на электрон и на альфа-частицу.



**Рис. В15**

# **Часть 1**

## **ЗАДАЧИ И ПОДСКАЗКИ**





# 1. МЕХАНИКА

## 1.1. Основные формулы и определения

### 1.1.1. Кинематика

**1.1.1.1.** Систему отсчета образуют тело отсчета, жестко связанная с ним система координатных осей и часы (рис. 1.1).

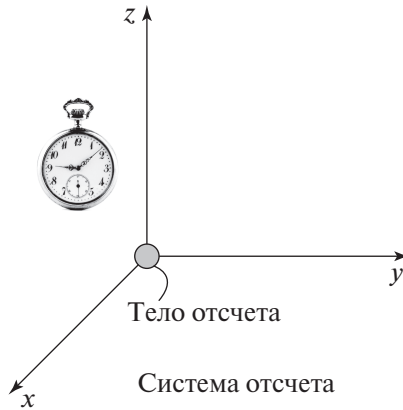


Рис. 1.1

**1.1.1.2.** Положение тела (материальной точки) в пространстве можно задавать координатами  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ , или радиус-вектором  $\vec{r}(t)$  (рис. 1.2). Разность  $\Delta\vec{r} \equiv \vec{s} \equiv \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$  называется *перемещением тела*  $\vec{s}$ .

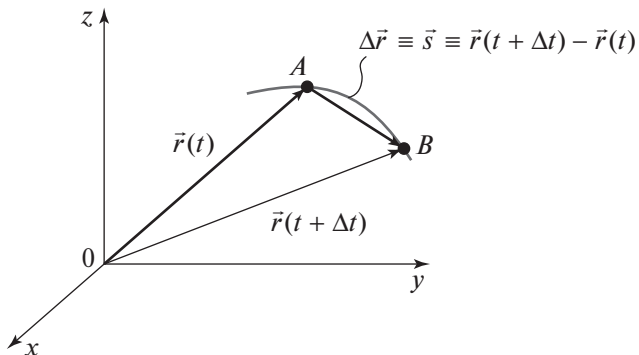


Рис. 1.2

Этой же буквой  $s$  часто обозначают *путь тела* — длину пройденного участка траектории. Путь — скалярная положительная величина, со временем может только возрастать или оставаться постоянной, в отличие от модуля вектора перемещения, который может и уменьшаться. Знак тождественности  $\equiv$  используется, когда соотношение вводится по определению. *Проекция радиус-вектора тела на оси координат* — это координаты тела  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ . При произвольном движении по прямой используется только одна координата, по плоскости — две координаты, в пространстве — три координаты. Зависимость координаты от времени называют *уравнением движения* или *законом движения*. Буквы  $r$ ,  $s$ ,  $v$ ,  $a$  без стрелочек над ними означают модули соответствующих векторов, т.е. положительные величины. Проекции векторов могут быть любого знака.

### 1.1.1.3.

А. *Вектор средней скорости* за промежуток времени  $\Delta t$ :

$$\vec{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

*Мгновенная скорость* в момент времени  $t$ :

$$\vec{v}(t) = \left. \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right|_{\Delta t \rightarrow 0} \equiv \vec{r}'(t).$$

*Средняя путевая скорость*, скаляр:

$$v_{\text{ср.путевая}} \equiv \frac{s}{t} = \frac{\text{Весь путь}}{\text{Все время}}.$$

Б. *Классический закон сложения скоростей*:

$$\vec{v}(t)_{\text{абс}} = \vec{v}(t)_{\text{пер}} + \vec{v}(t)_{\text{отн}},$$

где  $\vec{v}(t)_{\text{абс}}$  — скорость слона относительно неподвижного наблюдателя;  $\vec{v}(t)_{\text{отн}}$  — его скорость относительно подвижной системы (автомобиля);  $\vec{v}(t)_{\text{пер}}$  (переносная) — скорость подвижной системы (рис. 1.3). Три скорости связаны как радиус-векторы.

Подвижная система считается движущейся поступательно. Если подвижная система вращается, то за переносную скорость берем скорость той точки подвижной системы, через которую наблюдаемое тело проходит в данный момент времени.

1.1.1.4. *Среднее ускорение* за промежуток времени  $\Delta t$ :

$$\vec{a}_{\text{ср}} \equiv \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t};$$

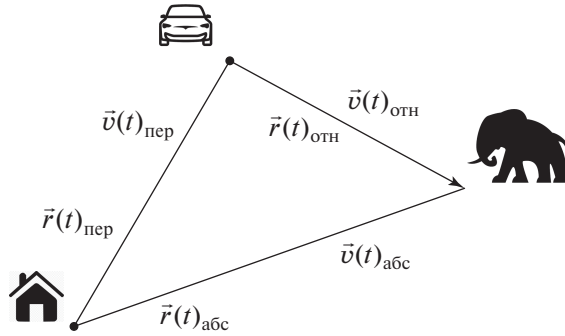


Рис. 1.3

Мгновенное ускорение в момент времени  $t$ :

$$\vec{a}(t) \equiv \left. \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \right|_{\Delta t \rightarrow 0} \equiv \vec{v}'(t).$$

Если ускорение  $\vec{a}$  не зависит от времени, для скорости  $\vec{v}(t)$  и вектора перемещения  $\Delta \vec{r}(t)$  справедливы соотношения

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t, \quad \Delta \vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}, \quad v^2 - v_0^2 = 2\vec{a} \cdot \Delta \vec{r}.$$

При движении по прямой в одну сторону

$$v^2 - v_0^2 = 2as,$$

где  $s$  — пройденный путь.

Сложение ускорений в случае, когда подвижная система движется поступательно:

$$\vec{a}_{\text{абс}} = \vec{a}_{\text{отн}} + \vec{a}_{\text{пер}}.$$

Если подвижная система вращается, то связь ускорений более сложная. В таком виде она применима для вращающейся системы в частном случае, когда  $\vec{v}_{\text{отн}} = 0$ .

**1.1.1.5.** *Равномерное прямолинейное движение* вдоль оси  $x$ :

$$x(t) = x_0 + v_x t, \quad v_x = \text{const}, \quad a_x = 0.$$

**1.1.1.6.**

А. *Прямолинейное движение с постоянным ускорением*  $a_x$  вдоль оси  $x$ :

$$x(t) = x_0 + v_{x_0} t + \frac{a_x t^2}{2}, \quad v_x(t) = v_{x_0} + a_x t,$$

$$v_x^2 - v_{0x}^2 = 2a_x(x - x_0), \quad v_{x_{\text{cp}}} = \frac{v_{1x} + v_{2x}}{2}.$$

Б. Произвольное прямолинейное движение вдоль оси  $x$ :

$$x = x(t), \quad v_x(t) = x'(t), \quad a_x(t) = v'_x(t) = x''(t).$$

### 1.1.1.7.

А. Движение тела, брошенного вертикально вверх или вниз с высоты  $h_0$ . Ось  $y$  направлена вверх, начало на земле:

$$y(t) = h_0 + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}, \quad v_y(t) = v_{0y} - gt,$$

$$v_y^2(h) - v_y^2(h_0) = 2g(h_0 - h), \quad s_n = g\tau^2 \frac{2n-1}{2} = 5 \cdot (2n-1).$$

Тело падает без начальной скорости.  $s_n = (5 \text{ м}, 15 \text{ м}, 25 \text{ м}, 35 \text{ м}, \dots)$  — путь, пройденный за  $n$ -ю секунду,  $\tau = 1 \text{ с}$ .

Б. Движение тела, брошенного со скоростью  $\vec{v}_0$  под углом  $\alpha$  к горизонту. Начало системы координат  $x, y$  в точке вылета тела:

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}, \quad \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g}t, \quad x(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t,$$

$$v_x = v_0 \cos \alpha, \quad y(t) = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}, \quad v_y = v_0 \sin \alpha,$$

где  $\tau = 2v_0 \frac{\sin \alpha}{g}$  — время полета тела;  $L = v_0^2 \frac{\sin 2\alpha}{g}$  — дальность полета тела;

$H = v_0^2 \frac{\sin^2 \alpha}{2g} = L \frac{\text{tg} \alpha}{4}$  — максимальная высота при полете.

Уравнение траектории полета (параболы):  $y(x) = x \text{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$ .

Дальность полета тела, брошенного на высоте  $H$ :

$$L = v_0^2 \frac{\sin 2\alpha}{2g} + v_0 \frac{\cos \alpha \sqrt{2gH + v_0^2 \sin^2 \alpha}}{g}.$$

### 1.1.1.8. Движение по окружности.

Угловая скорость  $\omega$  тела, движущегося по окружности:

$$\omega \equiv \frac{\Delta\varphi}{\Delta t},$$

где  $\Delta\varphi$  — дуга в радианах, которую проходит тело за промежуток времени  $\Delta t$ .

Связь угловой скорости  $\omega$  с периодом обращения  $T$  и частотой вращения  $\nu$ :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu.$$

Связь линейной скорости тела  $v_{\text{лин}}$  с угловой скоростью  $\omega$  (или периодом  $T$ ) и радиусом окружности  $R$ , по которой движется тело:

$$v_{\text{лин}} = \omega R = \frac{2\pi R}{T}.$$

Кинематическая формула центростремительного ускорения  $a_{\text{ц}}$  тела, движущегося по дуге окружности радиуса  $R$  со скоростью  $v$ :

$$a_{\text{ц}} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = v\omega.$$

Формула одинакова для спутника, камня на веревке, электрона в магнитном поле и т.д.

Модуль тангенциального ускорения  $a_{\text{т}}$ :

$$a_{\text{т}} = \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

где  $\Delta v$  — изменение модуля скорости тела, движущегося по окружности, за время  $\Delta t$ .

При равномерном движении по окружности тангенциальное ускорение отсутствует.

### 1.1.1.9. Движение твердого тела.

*Теорема о проекции Грасгофа.* Проекции скоростей двух произвольных точек твердого тела на ось, проходящую через эти точки, равны между собой (рис. 1.4).

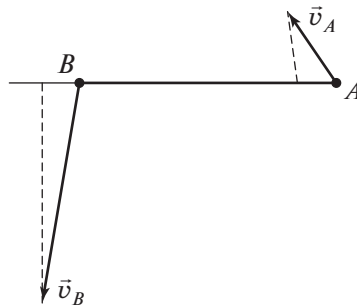


Рис. 1.4

### 1.1.2. Динамика

**1.1.2.1. Первый закон Ньютона.** Существуют системы отсчета, относительно которых тело, удаленное от всех тел, движется равномерно и прямолинейно.

Такие системы называются инерциальными. Во всех инерциальных системах механические явления протекают одинаково. Это утверждение составляет содержание *принципа относительности Галилея*.

**1.1.2.2.** Ускорения (модули) взаимодействующих тел обратно пропорциональны их массам:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Выбрав массу одного тела за эталон, можно по ускорениям определить массы других тел.

Отношение массы к объему по определению есть плотность вещества:

$$\frac{m}{V} \equiv \rho.$$

**1.1.2.3. Второй закон Ньютона.** Сила, действующая на тело, движущееся с ускорением:

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

**1.1.2.4.** Если на тело действуют несколько сил, то ускорение определяется их векторной суммой, называемой *равнодействующей силой*  $\vec{F}_p$ :  
 $m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \vec{F}_p.$

**1.1.2.5. Третий закон Ньютона.** Тела действуют друг на друга с силами, равными по модулю и противоположными по направлению:

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -\vec{F}_{1 \rightarrow 2}.$$

Согласно Ньютону, такой характер взаимодействия имеет место в любой момент времени.

**1.1.2.6. Закон всемирного тяготения Ньютона.** Два точечных тела (или два шара) притягиваются друг к другу с силой  $F_H$ , пропорциональной массам тел и обратно пропорциональной квадрату расстояния  $R$  между центрами тел:

$$F_H = \frac{Gm_1m_2}{R^2}.$$

Коэффициент  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$  называется *гравитационной постоянной*, а сама сила притяжения называется *гравитационной силой*.

Гравитационная сила со стороны Земли (и любой планеты) дает основную вклад в силу тяжести  $mg = \frac{GmM_3}{(R_3 + h)^2}$  на любой высоте  $h$ . Другой вклад в силу тяжести, обычно намного меньший, дает вращение планеты (центробежная сила).

Закон всемирного тяготения позволяет вывести из динамики *три закона Кеплера*, полученные до его открытия путем наблюдений за планетами.

*Первый закон.* Планеты движутся по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.

*Второй закон.* Радиус-вектор планеты за равные промежутки времени описывает равные площади.

*Третий закон.* Квадраты периодов обращений планет вокруг Солнца пропорциональны кубам больших полуосей их эллиптических орбит.

**1.1.2.7.** Связь ускорения свободного падения  $g$  на поверхности планеты с массой  $M$ , плотностью  $\rho$  и радиусом  $R$  планеты:

$$g = \frac{F_H}{m} = G \frac{M}{R^2} = G \frac{4}{3} \pi \rho R = G^* \rho R,$$

где  $G^* \equiv \frac{4}{3} \pi G = 2,7939 \cdot 10^{-10} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$ .

*Первая космическая скорость* на планете с ускорением свободного падения на поверхности  $g$ :

$$v_1 = \sqrt{Rg}.$$

Для Земли  $v_{13} \approx 8 \text{ км/с}$ .

*Вторая космическая скорость:*

$$v_2 = \sqrt{2Rg}.$$

Для Земли  $v_{23} \approx 11,2 \text{ км/с}$ .

**1.1.2.8.** *Закон Гука.* Сила упругости  $F_{\text{упр}}$  пропорциональна величине деформации  $x$ :

$$F_{\text{упр}} = -kx.$$

Коэффициент  $k$ , называемый *жесткостью*, зависит от материала тела и его размеров. Для длинного стержня приближенно жесткость пропорциональна площади сечения и обратно пропорциональна длине:  $k \propto \frac{S}{l}$  ( $\propto$  — знак пропорциональности).



Жесткость комбинированной пружины выражается через жесткости отдельных пружин (рис. 1.5):

$$k_{\text{пр}} = k_1 + k_2 \text{ при «параллельном» соединении пружин;}$$

$$\frac{1}{k_{\text{пс}}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \Rightarrow k_{\text{пс}} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \text{ при «последовательном»}.$$

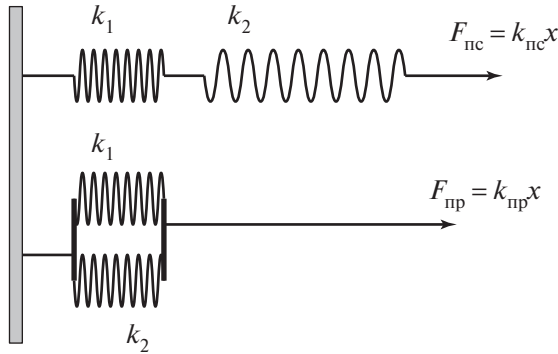


Рис. 1.5

**1.1.2.9.** Связь силы трения скольжения  $F_{\text{тр.ск}}$  и силы нормального давления  $N$ :

$$F_{\text{тр.ск}} = \mu N.$$

Коэффициент трения  $\mu$  не зависит от скорости скользящего тела.

Сила трения покоя:

$$F_{\text{тр.покоя}} \leq \mu N,$$

может быть любой в интервале от нуля до силы трения скольжения  $\mu N$ . В этих пределах сила трения покоя подстраивается под внешние силы, стараясь препятствовать скольжению.

**1.1.2.10.** Давление  $p$  при контактном взаимодействии двух тел:

$$p \equiv \frac{N}{S},$$

где  $N$  — сила, с которой тела действуют друг на друга по нормали к поверхности контакта;  $S$  — площадь поверхности контакта.

Сила, с которой тело давит на опору или растягивает подвес (вес тела) в лифте, движущемся с ускорением  $a$ :

$$\vec{N} = m(\vec{g} - \vec{a}).$$

**1.1.2.11.** На тело, помещенное на наклонную плоскость, действуют три силы: сила тяжести  $m\vec{g}$ , нормальная реакция плоскости  $\vec{N}$  и сила трения  $\vec{F}_{\text{тр}}$ . Проекции сил на оси  $x$ ,  $y$  (рис. 1.6, *a*):

$$(mg)_x = mg \sin \alpha, \quad (mg)_y = -mg \cos \alpha, \quad F_{\text{тр}x} \leq \mu mg \cos \alpha.$$

В некоторых случаях удобно представить силу тяжести в виде двух составляющих (рис. 1.6, *б*):

$$m\vec{g} = \vec{F}_{\text{ск}} + (-\vec{N}), \quad F_{\text{ск}} = mg \sin \alpha, \quad N = mg \cos \alpha,$$

где  $\vec{F}_{\text{ск}}$  — скатывающая сила, параллельная наклонной плоскости;  $(-\vec{N})$  — сила нормального давления тела на плоскость.

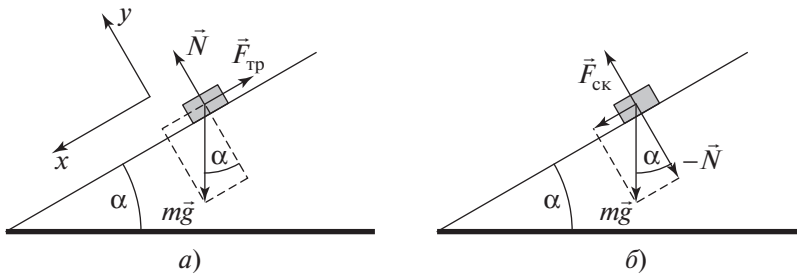


Рис. 1.6

Сила трения на наклонной плоскости:

$$F_{\text{тр}} \leq \mu mg \cos \alpha.$$

Если коэффициент трения  $m > \text{tg} \alpha$ , тело, помещенное на наклонную плоскость, не скользит вниз.

Ускорение тела, скатывающегося вниз по гладкой наклонной плоскости с углом при основании  $\alpha$ :

$$a = g \sin \alpha.$$

Сила, которую надо приложить вдоль наклонной плоскости, чтобы перемещать тело равномерно вверх по плоскости:

$$F_{\uparrow} = mg \sin \alpha + \mu mg \cos \alpha.$$

**1.1.2.12.** Сила инерции:  $\vec{F}_{\text{и}} = -m\vec{a}$ ,  $m\vec{a}_{\text{отн}} = \vec{F}_{\text{р}} + \vec{F}_{\text{и}}$ . Если система отсчета движется с ускорением  $a$  по отношению к инерциальной системе отсчета, то такая система является неинерциальной (например, поезд, идущий с ускорением). Чтобы описывать движение относительно такой системы с помощью 2-го закона Ньютона (например, маятника в поезде),

нужно считать, что на тело, кроме «обычной» равнодействующей силы  $\vec{F}_p$ , действует дополнительная сила инерции  $\vec{F}_и = -m\vec{a}$ .

### 1.1.3. Статика

**1.1.3.1.** *Равнодействующая сила* ( $\vec{F}_p$ ) — сумма сил, действующих на тело:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \vec{F}_p.$$

Если тело точечное, то под действием одной равнодействующей тело движется поступательно так, как под действием всех сил. В случае тела конечных размеров, кроме поступательного движения, возможно вращательное. Чтобы обеспечить правильное движение, включая вращательное, равнодействующая должна быть приложена в определенной точке протяженного тела.

Равнодействующая существует не для любой системы сил. Пару сил, т.е. две силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ , приложенных в разных точках тела, нельзя заменить одной так, чтобы воздействие на тело не изменилось.

**1.1.3.2.** *Условие равновесия материальной точки:*

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \vec{F}_p = 0.$$

**1.1.3.3.** *Момент  $M$  силы  $F$  относительно оси равен произведению модуля силы на расстояние  $l$  от оси до линии действия силы ( $l$  — плечо силы):*

$$M \equiv F \cdot l.$$

Если сила вращает против часовой стрелки, ее момент считают положительным, по часовой стрелке — отрицательным.

**1.1.3.4.** *Условия равновесия тела конечных размеров:*

- 1)  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = 0$ ;
- 2)  $M_1 + M_2 + \dots + M_n = 0$ .

Условие 1 обеспечивает отсутствие поступательного движения, условие 2 — вращательного. Предполагается, что все векторы сил лежат в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Если ось закреплена, то условие 1 выполнено автоматически за счет сил, приложенных к оси.

**1.1.3.5.** *Теорема о трех силах.* Если твердое тело конечных размеров находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке (рис. 1.7).

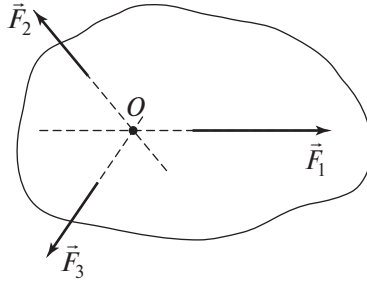


Рис. 1.7

**1.1.3.6.** Координата центра тяжести (ЦТ)  $x_{\text{ЦТ}}$  системы материальных точек массами  $m_1, m_2, \dots, m_n$ :

$$x_{\text{ЦТ}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n},$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — координаты точек. В ЦТ приложена равнодействующая всех сил тяжести, действующих на отдельные частицы системы.

Аналогичная формула для  $y$ -координаты ЦТ и  $z$ -координаты. Формулы применимы и для ЦТ системы шаров.

**1.1.3.7.** Давление жидкости  $p$  равно отношению силы давления  $F$ , действующей на поверхность со стороны жидкости, к площади  $S$  этой поверхности:

$$p = \frac{F}{S}.$$

*Закон Паскаля.* Давление, производимое на покоящуюся жидкость или газ, передается в любую точку жидкости одинаково по всем направлениям (рис. 1.8). То есть если в данной точке жидкости вращать манометр, из-

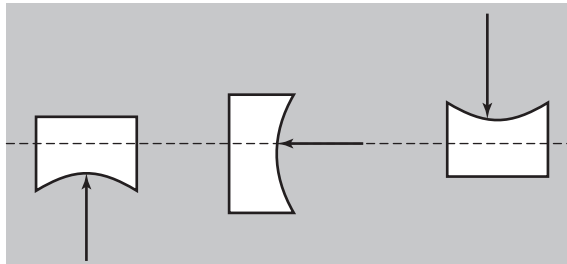


Рис. 1.8

меряя давление в разных направлениях, показания прибора будут одинаковыми.

**1.1.3.8.** Давление  $p$  столба жидкости под действием силы тяжести:

$$p = \rho gh,$$

где  $\rho$  — плотность жидкости;  $h$  — высота столба.

**1.1.3.9.** *Закон Архимеда.* На тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила Архимеда  $F_A$ , равная весу жидкости объема, равного объему погруженной в жидкость части тела:

$$F_A = \rho g V,$$

где  $\rho$  — плотность жидкости;  $V$  — объем погруженной части тела;  $g$  — ускорение свободного падения.

Закон применим и к газам.

**1.1.3.10.** *Условия плавания тел:*

$$1) F_A > mg, 2) F_A = mg, 3) F_A < mg,$$

где  $F_A$  — сила Архимеда при полном погружении тела в жидкость; 1 — тело плавает, частично погрузившись в жидкость; 2 — тело в равновесии на любой глубине; 3 — тело тонет.

**1.1.3.11.** Вес  $P$  тела массой  $m$  при погружении его в жидкость плотности  $\rho_{\text{ж}} < \rho_{\text{тела}}$ :

$$P = mg - F_A = (\rho_{\text{тела}} - \rho_{\text{ж}}) V g,$$

где  $V$  — объем погруженной части тела.

**1.1.3.12.** *Расход жидкости или газа:*

$$\Delta V = v S \Delta t, \Delta m = \rho v S \Delta t.$$

Жидкость (или газ) плотности  $\rho$  течет со скоростью  $v$  по трубе сечением  $S$ . За время  $\Delta t$  из трубы вытечет объем жидкости  $\Delta V$  массой  $\Delta m$ .

**1.1.3.13.** *Формула Торричелли:*

$$v^2 = 2gh.$$

Жидкость находится в тонкостенном сосуде. На глубине  $h$  от поверхности имеется небольшое отверстие. Жидкость вытекает из него со скоростью  $v$ , такой же, как у тела, падающего с высоты  $h$ .

### 1.1.4. Законы сохранения

**1.1.4.1. Определение импульса тела  $\vec{p}$ .** Вектор, модуль которого равен произведению массы тела на модуль скорости, а направление совпадает с направлением вектора скорости:

$$\vec{p} \equiv m\vec{v}.$$

**1.1.4.2. Второй закон Ньютона в импульсной форме:**

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t.$$

Изменение импульса тела  $\Delta\vec{p}$  равно импульсу приложенной силы  $\vec{F}$ .

*Импульсом силы* называется произведение  $\vec{F}\Delta t$ . При неизменной массе тела такая форма 2-го закона Ньютона совпадает с использованной ранее  $m\vec{a} = \vec{F}$ .

**1.1.4.3. Полным импульсом  $\vec{P}_{\text{пол}}$**  системы частиц называется вектор, равный сумме импульсов отдельных частиц:

$$\vec{P}_{\text{пол}} \equiv \sum \vec{p}_i \equiv \sum m_i \vec{v}_i.$$

**1.1.4.4. Изменение полного импульса** системы тел  $\Delta\vec{P}_{\text{пол}}$  за время  $\Delta t$  определяется импульсом только внешних сил  $\vec{F}_{\text{внш}}$ :

$$\Delta\vec{P}_{\text{пол}} = \vec{F}_{\text{внш}}\Delta t.$$

Если внешних сил нет, то полный импульс системы тел не изменяется со временем:

$$\vec{P}_{\text{пол}} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots + m_n\vec{v}_n = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2 + \dots + m_n\vec{v}'_n.$$

**1.1.4.5. Координата центра масс (ЦМ):**

$$x_{\text{ЦМ}} \equiv \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n},$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — координаты отдельных точечных тел (или шаров).

Координаты  $y_{\text{ЦМ}}, z_{\text{ЦМ}}$  находятся аналогично.

**1.1.4.6. Проекция скорости центра масс:**

$$v_{\text{ЦМ}x} \equiv \frac{m_1v_{1x} + m_2v_{2x} + \dots + m_nv_{nx}}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{P_{\text{пол}x}}{m_1 + m_2 + \dots + m_n},$$

где  $v_{1x}, v_{2x}, \dots, v_{nx}$  — проекции скоростей отдельных частиц массами  $m_1, m_2, \dots, m_n$ ;  $P_{\text{пол}x}$  — проекция полного импульса системы.

Если проекция внешней силы на ось  $x$  равна нулю, проекция  $v_{\text{ЦМ}x}$  не изменяется. В частности, если при отсутствии проекции внешней силы на ось  $x$  ЦМ в начальный момент покоился, то он остается неподвижным все время.

**1.1.4.7.** Механическая работа  $A$ , производимая постоянной силой  $\vec{F}$  над материальной точкой при ее перемещении  $\vec{s}$ :

$$A \equiv F s \cos \alpha = \vec{F} \cdot \vec{s} = \vec{F} \cdot \vec{v} \cdot \Delta t,$$

где  $\alpha$  — угол между вектором силы и вектором перемещения точки;  $\vec{v}$  — скорость точки.

Полная работа  $A_{\text{пол}}$  над системой материальных точек по определению равна сумме работ над отдельными точками:

$$A_{\text{пол}} \equiv \sum_i A_i.$$

**1.1.4.8.** Мощность  $N$  силы есть отношение работы силы к интервалу времени  $\Delta t$ , за которое эта работа была произведена:

$$N \equiv \frac{A}{\Delta t}.$$

**1.1.4.9.** Сила  $\vec{F}$ , действующая на тело в направлении вектора скорости  $\vec{v}$ , развивает мощность  $N$ :

$$N = F \cdot v.$$

**1.1.4.10.** Кинетическая энергия  $E_{\text{кин}}$  тела массы  $m$ , движущегося со скоростью  $\vec{v}$ :

$$E_{\text{кин}} \equiv \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{p^2}{2m},$$

где  $p = mv$  — модуль импульса тела.

Формула для кинетической энергии применима при поступательном движении тела, когда скорость у всех частиц тела одинаковая. Для нескольких поступательно движущихся тел общая кинетическая энергия равна сумме энергий отдельных тел:

$$E = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

**1.1.4.11.** *Теорема об изменении кинетической энергии.* Изменение кинетической энергии системы равно работе всех внутренних и внешних сил, действующих на тела системы:

$$E_{\text{кин1}} - E_{\text{кин0}} = \sum_i A_i.$$

**1.1.4.12.** Упругое центральное столкновение двух шаров массами  $m_1$ ,  $m_2$ :

$$u_{1x} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1x} + 2m_2v_{2x}}{m_1 + m_2}, \quad u_{2x} = \frac{(m_2 - m_1)v_{2x} + 2m_1v_{1x}}{m_1 + m_2},$$

где  $v_{1x}$ ,  $v_{2x}$  — проекции скоростей шаров до столкновения;  $u_{1x}$ ,  $u_{2x}$  — проекции после столкновения.

Если массы шаров одинаковые, т.е.  $m_1 = m_2$ , шары «обмениваются» скоростями:

$$u_{1x} = v_{2x}, \quad u_{2x} = v_{1x}.$$

**1.1.4.13.** Описание упругого центрального столкновения двух шаров массами  $m_1$ ,  $m_2$  в системе отсчета, где ЦМ покоится:

$$u'_{1x} = -u_{1x}, \quad u'_{2x} = -u_{2x},$$

где  $u_{1x}$ ,  $u_{2x}$  — проекции скоростей до удара;  $u'_{1x}$ ,  $u'_{2x}$  — проекции скоростей после удара.

В этой системе отсчета проекции скоростей частиц после удара изменяют знак, не изменяясь по модулю.

**1.1.4.14.** Потенциальная энергия  $E_{\text{упр}}$  упруго деформированного тела:

$$E_{\text{упр}} = \frac{kx^2}{2},$$

где  $k$  — жесткость;  $x$  — величина деформации.

Чаще всего формула используется в задачах с пружинами, резиновыми шнурами и т.д.

**1.1.4.15.** Потенциальная энергия  $E_{\text{п}}$  тела, поднятого над Землей на высоту  $h$ :

$$E_{\text{п}} = mgh = A.$$

Эта энергия равна работе  $A$ , совершаемой силой тяжести при падении тела с высоты  $h$ .

**1.1.4.16.** Сохранение полной механической энергии при падении тела с высоты  $h$  с начальной скоростью  $v_{\text{вверху}}$ :

$$E_{\text{к.внизу}} = E_{\text{полн.вверху}}, \quad \frac{mv_{\text{внизу}}^2}{2} = \frac{mv_{\text{вверху}}^2}{2} + mgh.$$



**1.1.4.17.** Подвешенный на нитке длиной  $l$  шарик, когда проходит положение равновесия после отклонения на угол  $\alpha$ , имеет скорость

$$v = \sqrt{2gl(1 - \cos\alpha)}.$$

**1.1.4.18.** Гравитационная потенциальная энергия взаимодействия двух точечных или сферически симметричных тел:

$$E_{\text{г}} = -\frac{GmM}{R},$$

где  $R$  — расстояние между центрами.

За нулевой уровень энергии принята энергия, соответствующая бесконечно большому расстоянию между телами.

**1.1.4.19.** *Закон сохранения энергии.* Изменение механической энергии  $\Delta E_{\text{мех}}$  системы происходит из-за работы сил трения между телами, входящими в систему  $A_{\text{тр.вн}}$ , и работы внешних сил (любых, не только трения)  $A_{\text{внш}}$ :

$$\Delta E_{\text{мех}} = A_{\text{тр.вн}} + A_{\text{внш}}.$$

**1.1.4.20.** КПД  $\eta_{\text{пл}}$  наклонной плоскости равен

$$\eta_{\text{пл}} \equiv \frac{\Delta E_{\text{пот}}}{A_{\text{под}}} \cdot 100\%,$$

где  $\Delta E_{\text{пот}}$  — прирост потенциальной энергии при подъеме тела по наклонной плоскости;  $A_{\text{под}}$  — затраченная на подъем работа.

### 1.1.5. Механические колебания и волны

**1.1.5.1.** *Второй закон Ньютона для пружинного маятника:*

$$ma = -kx \Rightarrow x'' + \frac{k}{m}x = 0, \quad x'' + \omega^2 x = 0, \quad \omega^2 = \frac{k}{m}.$$

Уравнение описывает гармонические колебания координаты — изменение со временем координаты тела при гармонических колебаниях

$$x(t) = x_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) = x_m \cdot \sin(2\pi\nu t + \varphi_0) = x_m \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_0\right),$$

где  $x_m$  — амплитуда колебаний;  $\nu$  — частота колебаний;  $T = \frac{1}{\nu}$  — период колебаний, т.е. наименьший промежуток времени, через который состояние повторяется;  $\omega = 2\pi\nu$  — циклическая частота;  $\varphi_0$  — начальная фаза колебаний.

**1.1.5.2.** Соотношения между периодом колебаний  $T$ , частотой  $\nu$ , циклической (угловой) частотой  $\omega$ , числом колебаний  $N$  за время  $\tau$ :

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\tau}{N}.$$

**1.1.5.3.** Изменение во времени скорости тела  $v(t)$  при гармонических колебаниях с циклической частотой  $\omega$ :

$$v(t) = x(t)' = \omega \cdot x_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) = v_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0), \quad v_m = \omega \cdot x_m,$$

где  $x_m$  — амплитуда координаты;  $v_m$  — амплитуда колебаний скорости;  $\varphi_0$  — начальная фаза колебаний.

**1.1.5.4.** Изменение со временем ускорения тела  $a(t)$  при гармонических колебаниях с циклической частотой  $\omega$ :

$$a(t) = v'(t) = x''(t) = -\omega^2 x_m \sin(\omega t + \varphi_0) = -a_m \sin(\omega t + \varphi_0), \\ a_m = \omega^2 x_m = \omega v_m,$$

где  $x_m$  — амплитуда координаты;  $v_m$  — амплитуда скорости;  $a_m$  — амплитуда колебаний ускорения;  $\varphi_0$  — начальная фаза колебаний.

**1.1.5.5.** *Формула Гюйгенса.* Период  $T$  малых колебаний математического маятника длиной  $l$  равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

где  $\nu$ ,  $\omega$  — соответственно частота и циклическая частота маятника.

**1.1.5.6.** Частота  $\nu$ , циклическая частота  $\omega$ , период  $T$  гармонических колебаний груза массы  $m$  на пружине жесткости  $k$  (пружинный маятник):

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega = 2\pi\nu = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

С такой частотой изменяются координата, скорость, ускорение груза. Кинетическая и потенциальная энергии изменяются с частотой, вдвое большей, —  $2\nu$ .

**1.1.5.7.** Полная энергия пружинного маятника ( $E$ ):

$$E = \frac{mv(t)^2}{2} + \frac{kx(t)^2}{2} = m \left[ \frac{v(t)^2}{2} + \frac{\omega^2 x(t)^2}{2} \right] = \text{const}$$

— сумма кинетической энергии и потенциальной упругой энергии. Координата  $x(t)$  и скорость  $v(t)$  изменяются со временем по гармоническим законам, полная энергия не изменяется (не зависит от времени).

Второе выражение для полной энергии (с частотой  $\omega$ ) применимо и для малых колебаний математического маятника. Максимальная кинетическая энергия равна максимальной потенциальной энергии:

$$\frac{mv_m^2}{2} = \frac{kx_m^2}{2}.$$

**1.1.5.8.** Плоская волна амплитуды  $y_m$  с периодом колебаний  $T$  и длиной волны  $\lambda$  движется в положительном направлении оси  $x$ . Отклонение от положения равновесия  $y(t, x)$  в точке с координатой  $x$  в момент времени  $t$  описывается уравнением бегущей волны:

$$y(t, x) = y_m \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) = y_m \cos\varphi(t, x).$$

Фазы колебаний в волне  $\varphi(t, x)$  в точках, отстоящих на расстояние  $\lambda$  друг от друга в один и тот же момент, отличаются на  $2\pi$ :

$$\varphi(t, x) = \frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda}.$$

**1.1.5.9.** Соотношение между частотой  $\nu$  колебаний в волне, длиной волны  $\lambda$  и скоростью волны  $c$ :

$$\lambda\nu = c.$$

Применимо для звуковых и электромагнитных волн.

**1.1.5.10.** «Набег» фазы:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta x}{\lambda}.$$

При распространении волны фаза колебаний в один и тот же момент времени в точках, отстоящих на расстояние  $\Delta x$  друг от друга, отличается на  $\Delta\varphi$ .

**1.1.5.11.** Суммарное колебание давления  $p(t, x)$  при возбуждении двух когерентных звуковых волн частоты  $\omega$  одинаковой амплитуды  $p_0$  с разностью хода  $\Delta s = s_2 - s_1$ :

$$p(t, x) = 2p_0 \cos\left(\pi \frac{s_2 - s_1}{\lambda}\right) \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x - \delta\right).$$

**1.1.5.12.** Условие на разность хода  $\Delta s$  двух когерентных волн для наблюдения минимума на интерференционной картине:

$$\Delta s = \frac{\lambda(2m + 1)}{2}, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где  $\lambda$  — длина волны в среде.

**1.1.5.13.** Условие на разность хода  $\Delta s$  двух когерентных волн для наблюдения максимума на интерференционной картине:

$$\Delta s = \lambda m, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где  $\lambda$  — длина волны в среде.

**1.1.5.14.** *Доплеровский сдвиг частоты.* Скорости  $v_{\text{пр}}$ ,  $v_{\text{ис}}$  приемника и источника меньше скорости звука  $c$ :

1) неподвижный источник частоты  $\nu$ . Приближающийся со скоростью  $v_{\text{пр}}$  приемник воспринимает частоту

$$\nu_p = \nu \cdot \left( 1 + \frac{v_{\text{пр}}}{c} \right);$$

2) движущийся к неподвижному приемнику источник. Приемник ловит частоту

$$\nu_i = \frac{\nu}{1 - \frac{v_{\text{ис}}}{c}}.$$

## 1.2. Задачи

### 1.2.1. Кинематика

**1.** В дорожной полиции раздался звонок: «Авария в двух километрах...». Тут связь прервалась. Какую важную информацию не успел передать звонивший? Что он не указал с точки зрения кинематики?

**2.** Поезд, не изменяя скорости, проезжал вечером мимо полустанка. Мальчик, лежащий в вагоне на верхней полке, нечаянно уронил телефон. Какую траекторию телефона увидел мальчик? Вагон был освещен, и падение телефона можно было наблюдать с платформы. Как выглядела траектория падавшего телефона для наблюдателя на платформе?

**3.** Мы говорим «Солнце всходит и заходит», т.е. рассуждаем о движении Солнца. Какое тело при таком разговоре подразумевается как тело отсчета?