ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел.

$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел.

$\mathbb{Z}_0 = \mathbb{N} \bigcup \{0\}$.

$\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел.

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел.

$\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел.

$[a;b]$, $(a;b)$ — отрезок, интервал с концами a и b.

$|a;b|$ — промежуток с концами a и b (здесь может подразумеваться отрезок, интервал или один из полуинтервалов $[a;b)$ или $(a;b]$).

$\forall$ — квантор всеобщности ($\forall x \in A$ — для всех x из множества A; $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ — для любых действительных x, не равных нулю).

$\exists$ — квантор существования ($\exists y \in A$ — существует y, принадлежащее множеству A; $\exists y$, $y > 1$ — найдется y, большее 1).

$\equiv$ — равно по определению (синоним $\stackrel{\text{def}}{=}$).

$=::$ — обозначим через.

$:=$ — положим равным.

$\Rightarrow$, $\Leftarrow$ — знаки логического следования.

$\Leftrightarrow$ — знак равносильности.

$f : X \to Y$ — функция f, заданная на множестве X со значениями во множестве Y.

$f \circ g$ — композиция функций (сложная функция, суперпозиция), т. е. $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

$|\cdot|$ — модуль; $|a| = \begin{cases} a, & a \geqslant 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$

$\ln(x)$, $\ln x$ — натуральный логарифм; $\ln x = \log_e x$.

e — основание натурального логарифма, математическая константа, иррациональное и трансцендентное число. Приблизительно равно 2,71828.

$\exp(x)$ — экспонента; $\exp(x) = e^x$.

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ — факториал числа $n \in \mathbb{Z}_0$ $(0! = 1)$.
$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdots 2n$ — двойной факториал, $(2n)!! = 2^n \cdot n!$.
$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$ — двойной факториал:

$$(2n-1)!! = \frac{(2n)!}{(2n)!!} = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!} = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{2^n}.$$

$A \vdots m$ — A кратно m, A делится на m нацело.

$\sum$ — сигма, знак суммирования: $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$; k — индекс суммирования. Значение суммы не зависит от того, какой буквой обозначают индекс суммирования:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{s=1}^{n} a_s = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}.$$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ — бесконечная сумма, ряд.
$\prod\limits_{k=1}^{n} b_k = b_1 \cdot b_2 \cdots b_n$ — произведение.
$\prod\limits_{k=1}^{\infty} b_k = b_1 \cdot b_2 \cdots b_n \cdots$ — бесконечное произведение.
$\displaystyle\int f(x)\,dx$ — неопределенный интеграл (совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на рассматриваемом числовом промежутке).

$\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,dx$ — определенный интеграл Римана от функции f по отрезку $[a;b]$, где число a — нижний, а b — верхний предел интегрирования.

$= \Big[\ldots \Big] =$ — прерывание математических вычислений, в скобках указываются логические пояснения, формулы или свойства, используемые для дальнейших действий.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В пособии рассматриваются классические понятия математического анализа: метод математической индукции, формула бинома Ньютона, числовые последовательности, предел, непрерывность и дифференцируемость функций, неопределенный и определенный интегралы. С одной стороны, эти понятия являются базовыми для всего курса математического анализа и широко используются в других дисциплинах математического цикла и приложениях. С другой стороны, с изучения этих вопросов начинается курс математического анализа, и пособие призвано способствовать адаптации студентов к самостоятельной работе.

Цель пособия — помочь студентам в изучении числовых последовательностей, функций, графиков функций, неопределенных и определенных интегралов, научить их решать типовые задачи на эти темы.

В настоящем пособии даются требуемые определения, приводятся теоретические положения, отмечаются основные свойства рассматриваемых объектов. Все это иллюстрируется подробным решением типовых задач и примеров. Для усвоения и закрепления пройденного материала предлагается значительное количество упражнений, снабженных ответами, что даст возможность быстро составить любые варианты контрольных заданий с учетом специальности и уровня подготовки студентов.

Данное учебное пособие написано на базе учебного пособия Альсевич Л.А., Красовского С.Г., Наумовича Н.А. «Математический анализ. Последовательности и функции. Практикум» (Минск: Вышэйшая школа, 2019). Авторы выражают глубокую благодарность рецензентам — профессору А.И. Астровскому, профессору И.П. Мартынову и доценту А.А. Гриню за внимательное прочтение рукописи и ценные советы, позволившие улучшить пособие, а также сотрудникам кафедры высшей математики Белорусского государственного университета.

По написанию данного учебного пособия была проделана огромная предварительная работа авторами совместно с доцентами Нилом Федоровичем Наумовичем и Адольфом Федоровичем Наумовичем, безвременно ушедшими из жизни. Авторы выражают им особую признательность.

Авторы

ГЛАВА 1. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

Утверждение $T(n)$ будет истинным для всех значений натуральной переменной n, если выполняются условия:

1) утверждение $T(n)$ истинно при $n = 1$;

2) из предположения, что $T(n)$ истинно при $n = k$, $k \in \mathbb{N}$, следует, что $T(n)$ истинно и при $n = k + 1$.

Пример 1.1. Пользуясь методом математической индукции, доказать равенство

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1) + n = \frac{(n + 1)n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Решение.

1. $n = 1 \Rightarrow 1 = \dfrac{(1 + 1) \cdot 1}{2}$, т. е. равенство верно.

2. Предположим, что равенство верно при $n = k$, т. е. $1 + 2 + \ldots$ $\ldots + k = \dfrac{(k + 1)k}{2}$.

Проверим истинность равенства при $n = k + 1$, т. е. покажем, что $1 + 2 + \ldots + k + (k + 1) = \dfrac{(k + 2)(k + 1)}{2}$.

Рассмотрим левую часть последнего равенства и преобразуем ее к правой:

$$1 + 2 + \ldots + k + (k + 1) = \Big[\text{на основании условия 2)}\Big] =$$

$$= \frac{(k + 1)k}{2} + (k + 1) = (k + 1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}.$$

Следовательно, $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{(n + 1)n}{2}$ верно $\forall n \in \mathbb{N}$.

Пример 1.2. Пользуясь методом математической индукции, доказать равенство

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Р е ш е н и е.

1. $n=1 \Rightarrow 1^2 = \dfrac{1(1+1)(1+2)}{6}$.

2. Предположим, что равенство верно при $n=k$:

$$1^2+2^2+\,\ldots\,+k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Покажем истинность при $n=k+1$, т. е. что

$$1^2+2^2+\,\ldots\,+k^2+(k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Преобразуем левую часть:

$$1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2 = \Big[\text{см. п. } 2\Big] = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2 =$$

$$= (k+1)\left(\frac{k(2k+1)}{6}+k+1\right) = (k+1)\frac{k(2k+1)+6k+6}{6} =$$

$$= (k+1)\frac{2k^2+7k+6}{6} = \Big[\text{так как } 2k^2+7k+6=(k+2)(2k+3)\Big] =$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Получили правую часть. Следовательно, равенство верно $\forall n \in \mathbb{N}$.

Пример 1.3. Пользуясь методом математической индукции, доказать, что $(7^{2n}-1)\,\vdots\,48 \;\; \forall n\in\mathbb{N}$, т. е. $7^{2n}-1$ делится нацело на 48.

Р е ш е н и е. Покажем, что $7^{2n}-1=48q$.

1. $n=1 \Rightarrow 7^2-1=48=48\cdot 1$.

2. Предположим, что $7^{2k}-1=48q_1$ при $n=k$.

Покажем справедливость утверждения при $n=k+1$:

$$7^{2(k+1)}-1=7^{2k+2}-1=7^{2k}\cdot 7^2-1=7^{2k}(48+1)-1=7^{2k}\cdot 48+7^{2k}-1=$$

$$= \Big[(7^{2k}-1)\,\vdots\,48, \;\; \text{см. п. } 2\Big] = 7^{2k}\cdot 48+48\cdot q_1 = 48(7^{2k}+q_1)\,\vdots\,48.$$

Следовательно, утверждение верно $\forall n\in\mathbb{N}$.

Пример 1.4. Пользуясь методом математической индукции, доказать неравенство $|\sin(n\alpha)| \leqslant n|\sin\alpha|$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Решение.

1. $n = 1 \Rightarrow |\sin\alpha| \leqslant |\sin\alpha|$.

2. Предположим, что неравенство верно при $n = k$:

$$|\sin(k\alpha)| \leqslant k|\sin\alpha|.$$

Докажем, что неравенство истинно при $n = k+1$, т. е. покажем, что $|\sin((k+1)\alpha)| \leqslant (k+1)|\sin\alpha|$. Имеем

$$|\sin((k+1)\alpha)| = |\sin(k\alpha+\alpha)| = |\sin(k\alpha)\cos\alpha + \cos(k\alpha)\sin\alpha| \leqslant$$

$$\leqslant \Big[|a+b| \leqslant |a|+|b|\Big] \leqslant |\sin(k\alpha)\cos\alpha| + |\cos(k\alpha)\sin\alpha| = \Big[|ab| = |a||b|\Big] =$$

$$= |\sin(k\alpha)||\cos\alpha| + |\cos(k\alpha)||\sin\alpha| \leqslant \Big[|\cos\alpha| \leqslant 1;\ |\cos(k\alpha)| \leqslant 1\Big] \leqslant$$

$$\leqslant |\sin(k\alpha)|\cdot 1 + 1\cdot|\sin\alpha| = \Big[\text{см. п. 2}\Big] \leqslant k|\sin\alpha| + |\sin\alpha| = (k+1)|\sin\alpha|,$$

что и требовалось доказать. Следовательно, неравенство верно $\forall n \in \mathbb{N}$.

Пример 1.5. Доказать неравенство $\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Решение. Применим метод математической индукции.

1. $n = 1 \Rightarrow \dfrac{1!!}{2!!} = \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sqrt{3} < 2$ — истинно.

2. Предположим, что неравенство справедливо при $n = k$, т. е. $\dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!} < \dfrac{1}{\sqrt{2k+1}}$.

Покажем, что неравенство истинно при $n = k+1$:

$$\frac{(2k+1)!!}{(2k)!!} = \frac{(2k-1)!!(2k+1)}{(2k)!!(2k+2)} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{2k+1}{2k+2} < \Big[\text{см. п. 2}\Big] <$$

$$< \frac{1}{\sqrt{2k+1}}\frac{2k+1}{2k+2} = \frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2} < \Bigg[\text{убедимся, что } \frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}},$$

для этого построим цепочку равносильных неравенств:

$$\sqrt{2k+1}\cdot\sqrt{2k+3} < 2k+2 \Leftrightarrow (2k+1)(2k+3) < (2k+2)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4k^2+8k+3 < 4k^2+8k+4 \Leftrightarrow 0<1\Big] < \frac{1}{\sqrt{2k+3}},$$

что и требовалось доказать.

Пример 1.6. Вывести формулу для суммы $S_n = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n!$.

Решение. Вычислим несколько сумм и попробуем найти закономерность:

$S_1 = 1\cdot 1! = 1 \Rightarrow S_1 = 2!-1;$

$S_2 = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! = 5 \Rightarrow S_2 = 3!-1;$

$S_3 = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! = 23 \Rightarrow S_3 = 4!-1.$

Следовательно, можно предположить, что $S_n = (n+1)!-1$.

Докажем это, используя метод математической индукции.

1. $n=1$ — верно.

2. $n=k \Rightarrow S_k = (k+1)!-1$, т. е. $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + k\cdot k! = (k+1)!-1$.

Покажем справедливость формулы для $n=k+1$:

$$S_{k+1} = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + k\cdot k! + (k+1)\cdot(k+1)! = \Big[\text{см. п. 2}\Big] =$$

$$= (k+1)!-1+(k+1)(k+1)! = (k+1)!(1+k+1)-1 =$$

$$= (k+1)!(k+2)-1 = (k+2)!-1.$$

Следовательно, $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)!-1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$.

Отметим, что обобщением метода математической индукции является следующее высказывание.

Если:

1) *утверждение* $T(n)$ *истинно при* $n=m$, $m\in\mathbb{Z}$;

2) *из предположения, что утверждение* $T(n)$ *верно при* $n=k$ $(k\in\mathbb{Z},\ k\geqslant m)$, *следует, что* $T(n)$ *истинно при* $n=k+1$, *то* $T(n)$ *истинно для всех* n, $n\in\mathbb{Z}$, $n\geqslant m$.

Пример 1.7. Доказать неравенство

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ \ldots\ +\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n},\quad n\in\mathbb{N},\quad n\geqslant 2.$$

Р е ш е н и е. Воспользуемся методом математической индукции.

1. $n=2\Rightarrow 1+(1/\sqrt{2})>\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{2}+1>(\sqrt{2})^2\Leftrightarrow\sqrt{2}+1>$ $>2\Leftrightarrow\sqrt{2}>1$ — верно.

2. $n=k\Rightarrow 1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ \ldots\ +\dfrac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k}.$

Для $n=k+1\Rightarrow 1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ \ldots\ +\dfrac{1}{\sqrt{k}}+\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}>$ $>\Big[\text{см. п. 2}\Big]>\sqrt{k}+\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$. Покажем далее, что $\sqrt{k}+\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}>$ $>\sqrt{k+1}$. Действительно,

$$\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}\Leftrightarrow\sqrt{k(k+1)}+1>k+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{k(k+1)}>k\Leftrightarrow k(k+1)>k^2\Leftrightarrow k>0.$$

Следовательно, $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ \ldots\ +\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}>\sqrt{n+1}$ при $n\geqslant 2$, что и требовалось доказать.

Пример 1.8. Выяснить, при каких $n\in\mathbb{N}$ верно неравенство $2^n>n^2+n+1$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим несколько первых значений n:

$n=1\Rightarrow 2<3;$

$n=2\Rightarrow 2^2<7;$

$n=3\Rightarrow 2^3<3^2+3+1;$

$n=4\Rightarrow 2^4<4^2+4+1;$

$n=5\Rightarrow 2^5>5^2+5+1\Leftrightarrow 32>31.$

Из проведенных вычислений следует, что при $n=1,2,3,4$ неравенство не выполняется, а при $n=5$ выполняется.

Справедливость неравенства для натуральных чисел $n\geqslant 5$ проверим с помощью метода математической индукции.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Основные обозначения 3

Предисловие 5

Глава 1. Метод математической индукции 6

Глава 2. Сочетания 14

Глава 3. Формула Ньютона 18

Глава 4. Предел последовательности 25

4.1. Бесконечно малые последовательности 26
4.2. Сходящиеся последовательности 27
4.3. Бесконечно большие последовательности 29
4.4. Эталонные пределы 30
4.5. Нахождение предела по определению 30
4.6. Примеры вычисления пределов с использованием эталонных пределов 33
4.7. Подпоследовательности 34
4.8. Эквивалентные последовательности 35
4.9. Раскрытие неопределенностей 36
4.10. Число e 44
4.11. Критерий Коши сходимости последовательности 46

Задачи для индивидуальных и контрольных заданий 50

Глава 5. Функция. Предел функции 60

5.1. Отображение множеств 60
5.2. Числовые функции 62
5.3. Обратная функция 70
5.4. Композиция функций 71
5.5. График функции 71
5.6. Графики некоторых функций 76
5.6.1. Линейная функция 76
5.6.2. Квадратичная функция 76
5.6.3. Степенная функция 77

5.6.4. Показательная функция ... 78
5.6.5. Логарифмическая функция ... 79
5.6.6. Тригонометрические функции ... 79
5.6.7. Обратные тригонометрические функции ... 82
5.6.8. Гиперболические функции ... 86
5.6.9. Обратные гиперболические функции ... 88
5.7. Элементарные функции ... 92
5.8. Определение предела функции ... 93
5.9. Основные свойства пределов функции ... 97
5.10. Односторонние пределы ... 101
5.11. Сравнение функций ... 103
5.12. Замечательные пределы ... 105
5.13. Эквивалентные функции ... 108

Задачи для индивидуальных и контрольных заданий ... 119

Глава 6. Непрерывность функций ... 128

6.1. Непрерывные функции ... 128
6.2. Классификация точек разрыва ... 130
6.3. Локальные свойства непрерывных функций ... 135

Задачи для индивидуальных и контрольных заданий ... 150

Глава 7. Дифференцируемость функций ... 166

7.1. Дифференцируемые функции ... 166
7.2. Дифференциал функции ... 167
7.3. Производная функции ... 168
7.4. Правила дифференцирования ... 170
7.4.1. Производные арифметических комбинаций ... 170
7.4.2. Дифференцирование композиции ... 172
7.4.3. Дифференцирование обратной функции ... 174
7.4.4. Производные основных элементарных функций ... 176
7.4.5. Бесконечные и односторонние производные ... 180
7.5. Производные и дифференциалы высших порядков ... 187
7.5.1. Производные высших порядков элементарных функций ... 189
7.5.2. Дифференциалы высших порядков ... 191

7.5.3. Производные и дифференциалы высших порядков арифметических комбинаций . . . 192
7.6. Производные функций, заданных неявно . . . 197
7.7. Производные функций, заданных параметрически . . . 200
7.8. Приложения производной . . . 203
7.8.1. Геометрические приложения производной . . . 203
7.8.2. Правило Лопиталя вычисления пределов функций . . . 210
7.9. Формула Тейлора . . . 220
7.9.1. Представление функций по формуле Тейлора . . . 220
7.9.2. Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора — Пеано . . . 226

Задачи для индивидуальных и контрольных заданий . . . 235

Глава 8. Исследование функций с помощью производных . . . 278

8.1. Стационарные точки функции . . . 278
8.2. Монотонные функции . . . 281
8.3. Локальный экстремум функции . . . 283
8.4. Глобальный экстремум функции . . . 289
8.4.1. Глобальный экстремум функции на отрезке . . . 289
8.4.2. Глобальный экстремум функции на интервале . . . 290
8.5. Выпуклые функции. Точки перегиба . . . 292
8.6. Асимптоты функции . . . 295
8.7. Построение схемы графика функции . . . 299

Задачи для индивидуальных и контрольных заданий . . . 311

Глава 9. Неопределенный интеграл . . . 324

9.1. Первообразная. Неопределенный интеграл . . . 324
9.2. Основные методы интегрирования . . . 328
9.2.1. Введение множителя под знак дифференциала . . . 328
9.2.2. Внесение функции под знак дифференциала . . . 332
9.2.3. Выделение множителя из-под знака дифференциала . . . 334
9.2.4. Интегрирование по частям . . . 336
9.3. Интегрирование рациональных функций . . . 345
9.3.1. Простейшие рациональные функции . . . 345

9.3.2. Вычисление коэффициентов разложения рациональной функции на простейшие ... 347
9.3.3. Различные подходы к отысканию коэффициентов в разложении рациональной функции на простейшие ... 353
9.3.4. Вычисление неопределенных интегралов от рациональных функций ... 360
9.3.5. Метод Остроградского для выделения рациональной части ... 366
9.4. Интегрирование иррациональных функций ... 371
9.4.1. Интегрирование выражений вида $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)$ ... 371
9.4.2. Интегрирование выражений вида $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$. Подстановки Эйлера ... 375
9.4.3. Интегрирование биномиальных дифференциалов. Подстановки Чебышева ... 384
9.5. Интегрирование рационально-тригонометрических функций 387
9.5.1. Интегрирование выражений вида $R(\sin x, \cos x)$ ... 387
9.5.2. Интегрирование выражений вида $\sin^m x \cos^n x$ ... 393
9.5.3. Интегрирование выражений вида $\sin ax \cos bx$, $\sin ax \sin bx$, $\cos ax \cos bx$ ... 395

Задачи для индивидуальных и контрольных заданий ... 396

Глава 10. Определенный интеграл ... 406

10.1. Интегральные суммы. Определение интеграла Римана ... 406
10.2. Свойства определенных интегралов ... 412
10.2.1. Линейность интеграла ... 412
10.2.2. Аддитивность интеграла ... 412
10.2.3. Монотонность интеграла (почленное интегрирование неравенств) ... 413
10.2.4. Оценки интегралов ... 414
10.2.5. Интегральная теорема о среднем ... 415
10.3. Вычисление определенных интегралов ... 417
10.3.1. Интеграл с переменным верхним пределом ... 417
10.3.2. Формула Ньютона — Лейбница ... 421
10.3.3. Замена переменной в определенном интеграле ... 426

10.3.4. Интегрирование по частям в определенном интеграле 429
10.3.5. Понятие несобственных интегралов 430
10.4. Приложения определенного интеграла 437
10.4.1. Площадь плоских фигур 437
10.4.2. Длина дуги кривой 442
10.4.3. Вычисление объемов тел 446
10.4.4. Вычисление площадей поверхностей вращения 452

Задачи для индивидуальных и контрольных заданий 455

Рекомендуемая литература 466