СОДЕРЖАНИЕ

Раздел 1. ВЫРАЖЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ 8

1.1. Корень степени *n* 8
1.1.1. Понятие корня степени *n*. 8
1.1.2. Свойства корня степени *n* 9
1.1.3. Тождественные преобразования иррациональных выражений 13

Примеры заданий ЕГЭ по теме 1.1. «Корень степени *n*» 14

1.2. Степень с рациональным показателем 16
1.2.1. Понятие степени с рациональным показателем 16
1.2.2. Свойства степени с рациональным показателем . . . 17
1.2.3. Тождественные преобразования степенных выражений 21

Примеры заданий ЕГЭ по теме 1.2. «Степень с рациональным показателем» 22

1.3. Логарифм. 24
1.3.1. Понятие логарифма 24
1.3.2. Свойства логарифмов 24
1.3.3. Десятичные и натуральные логарифмы 28

Примеры заданий ЕГЭ по теме 1.3. «Логарифмы» 29

1.4. Синус, косинус, тангенс, котангенс 31
1.4.1. Понятие синуса, косинуса, тангенса и котангенса числового аргумента 31
1.4.2. Соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента 32
1.4.3. Формулы сложения 36
1.4.4. Следствия из формул сложения 38
1.4.5. Формулы приведения 40
1.4.6. Тождественные преобразования тригонометрических выражений 41

Примеры заданий ЕГЭ по теме 1.4. «Синус, косинус, тангенс, котангенс». 43

1.5. Прогрессии 45
1.5.1. Арифметическая прогрессия 45
1.5.2. Геометрическая прогрессия 49

Примеры заданий ЕГЭ по теме 1.5. «Прогрессии» 53
Тренировочные тестовые задания к разделу 1 «Выражения и преобразования». 55

Раздел 2. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА 57

2.1. Уравнения с одной переменной 57
2.2. Равносильность уравнений 58

Примеры заданий ЕГЭ по теме 2.1. «Уравнения с одной переменной». 61

2.3. Общие приемы решения уравнений. 63
2.3.1. Разложение на множители. 63
2.3.2. Замена переменной. 64
2.3.3. Использование свойств функций 68
2.3.4. Использование графиков 69

Примеры заданий ЕГЭ по теме 2.3. «Общие приемы решения уравнений» 71

2.4. Решение простейших уравнений . . . 73
2.4.1. Решение иррациональных, тригонометрических, показательных и логарифмических уравнений . . . 73
2.4.2. Использование нескольких приемов при решении уравнений . . . 80
2.4.3. Решение комбинированных уравнений (например, показательно-логарифмических, показательно-тригонометрических, логарифмически степенных, дробно-рациональных относительно степенной функции) . . . 88
2.4.4. Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля . . . 90
2.4.5. Уравнения с параметрами . . . 91

Примеры заданий ЕГЭ по теме 2.4. «Решение простейших уравнений» . . . 92

2.5. Системы уравнений с двумя переменными . . . 94
2.5.1. Системы, содержащие одно или два иррациональных уравнения . . . 95
2.5.2. Системы, содержащие одно или два тригонометрических уравнения . . . 96
2.5.3. Системы, содержащие одно или два показательных уравнения . . . 98
2.5.4. Системы, содержащие одно или два логарифмических уравнения . . . 99
2.5.5. Использование графиков при решении систем . . . 100
2.5.6. Системы, содержащие уравнения разного вида (иррациональные, тригонометрические, показательные, логарифмические) . . . 100
2.5.7. Системы уравнений с параметром . . . 101
2.5.8. Системы, содержащие одно или два рациональных уравнения . . . 102

Примеры заданий ЕГЭ по теме 2.5. «Системы уравнений с двумя переменными» . . . 104

2.6. Неравенства с одной переменной . . . 106
2.6.1. Рациональные неравенства . . . 107
2.6.2. Показательные неравенства . . . 110
2.6.3. Логарифмические неравенства . . . 111
2.6.4. Использование графиков при решении неравенства . . . 113
2.6.5. Неравенства, содержащие переменную под знаком модуля . . . 116
2.6.6. Неравенства с параметром . . . 120
2.6.7. Решение комбинированных неравенств . . . 120

Примеры заданий ЕГЭ по теме 2.6. «Неравенства с одной переменной» . . . 122

2.7. Системы неравенств . . . 124
2.8. Совокупность неравенств . . . 125

Примеры заданий ЕГЭ по теме 2.7. «Системы неравенств» . . . 126
Тренировочные тестовые задания к разделу 2 «Уравнения и неравенства» . . . 128

Раздел 3. ФУНКЦИИ . . . 130

3.1. Числовые функции и их свойства . . . 130
3.1.1. Область определения функции . . . 131
3.1.2. Множество значений функции . . . 133
3.1.3. Непрерывность функции . . . 135
3.1.4. Периодичность функции . . . 136
3.1.5. Четность (нечетность) функции . . . 139
3.1.6. Возрастание (убывание) функции . . . 139
3.1.7. Экстремумы функции . . . 141
3.1.8. Наибольшее (наименьшее) значение функции . . . 142
3.1.9. Ограниченность функции . . . 144
3.1.10. Сохранение знака функции . . . 145
3.1.11. Связь между свойствами функции и ее графиком . . . 146
3.1.12. Значения функции . . . 165
3.1.13. Свойства сложных функций . . . 167

Примеры заданий ЕГЭ по теме 3.1. «Функции» . . . 172

3.2. Производная функции . . . 176
3.2.1. Геометрический смысл производной . . . 177
3.2.2. Геометрический смысл производной и график функции . . . 178
3.2.3. Геометрический смысл производной и график производной . . . 179
3.2.4. Физический смысл производной . . . 179
3.2.5. Таблица производных . . . 179
3.2.6. Производная суммы двух функций . . . 180
3.2.7. Производная произведения двух функций . . . 181
3.2.8. Производная частного двух функций . . . 181
3.2.9. Производная функции вида $y = f(ax + b)$ . . . 181
3.2.10. Производная сложных функций . . . 181

Примеры заданий ЕГЭ по теме 3.2. «Производная функции» . . . 182

3.3. Исследование функций с помощью производной ... 186
3.3.1. Промежутки монотонности ... 186
3.3.2. Промежутки монотонности и график производной ... 187
3.3.3. Экстремумы функции ... 187
3.3.4. Точки экстремумов функции ... 189
3.3.5. Наибольшее и наименьшее значения функции ... 190
3.3.6. Точки, в которых функция достигает наибольшего или наименьшего значения и график производной ... 191
3.3.7. Построение графиков функций ... 191
3.3.8. Решение текстовых задач на нахождение наибольшего (наименьшего) значения величины с помощью производной ... 192

Примеры заданий ЕГЭ по теме 3.3. «Исследование функции с помощью производной» ... 194

3.4. Первообразная ... 196
3.4.1. Первообразная суммы функций ... 197
3.4.2. Первообразная произведения функции на число ... 198
3.4.3. Задача о площади криволинейной трапеции ... 198

Примеры заданий ЕГЭ по теме 3.4. «Первообразная» ... 200
Тренировочные тестовые задания к разделу 3 «Функции» ... 202

Раздел 4. ЧИСЛА И ВЫРАЖЕНИЯ ... 204

4.1. Проценты ... 204
4.1.1. Основные задачи на проценты ... 204

4.2. Пропорции ... 206
4.2.1. Основное свойство пропорции ... 206
4.2.2. Прямо пропорциональные величины ... 207
4.2.3. Обратно пропорциональные величины ... 208

4.3. Решение текстовых задач ... 208
4.3.1. Задачи на движение ... 208
4.3.2. Задачи на работу ... 210
4.3.3. Задачи на сложные проценты ... 211
4.3.4. Задачи на десятичную форму записи числа ... 212

Примеры заданий ЕГЭ по теме 4.1. «Проценты» ... 213
Примеры заданий ЕГЭ по теме 4.2. «Пропорции» ... 215
Примеры заданий ЕГЭ по теме 4.3. «Решение текстовых задач» ... 217
Тренировочные тестовые задания к разделу 4 «Числа и выражения» ... 219

Раздел 5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ И ИХ СВОЙСТВА ... 221

5.1. Признаки равенства и подобия треугольников. Решение треугольников. Сумма углов треугольника. Неравенство треугольников. Теорема Пифагора. Теорема синусов и теорема косинусов. Площадь треугольника ... 221
5.1.1. Равенство треугольников ... 221
5.1.2. Подобие треугольников ... 222
5.1.3. Неравенство треугольника ... 225
5.1.4. Решение треугольников ... 226
5.1.5. Площадь треугольника ... 230

Примеры заданий ЕГЭ по теме 5.1. «Треугольник» ... 231

5.2. Многоугольники ... 235
5.2.1. Параллелограмм, его виды. Площадь параллелограмма ... 237
5.2.2. Прямоугольник. Площадь прямоугольника ... 238
5.2.4. Квадрат. Площадь квадрата ... 239
5.2.5. Трапеция. Средняя линия трапеции. Площадь трапеции ... 240
5.2.6. Правильные многоугольники ... 242

Примеры заданий ЕГЭ по теме 5.2. «Многоугольники» ... 244

5.3. Окружность ... 246
5.3.1. Касательная к окружности и ее свойства. Центральный и вписанный углы. Длина окружности. Площадь круга ... 246
5.3.2. Окружность, описанная около треугольника ... 250
5.3.3. Окружность, вписанная в треугольник ... 251
5.3.4. Комбинация окружностей, описанных и вписанных в треугольник ... 251

Примеры заданий ЕГЭ по теме 5.3. «Окружность» ... 252

5.4. Равные векторы. Координаты вектора. Сложение векторов. Умножение вектора на число. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов 254
5.4.1. Скалярные и векторные величины 254
5.4.2. Равенство векторов 254
5.4.3. Координаты вектора 255
5.4.4. Сложение векторов 255
5.4.5. Умножение вектора на число.................... 256
5.4.6. Скалярное произведение векторов. Угол между векторами 257

Примеры заданий ЕГЭ по теме 5.4. «Векторы» 258

5.5. Многогранники 260
5.5.1. Призма 260
5.5.2. Пирамида...................................... 270
5.5.3. Правильные многогранники. Сечение плоскостью. Площадь боковой и полной поверхностей. Объем........................... 276

Примеры заданий ЕГЭ по теме 5.5. «Многогранники» 278

5.6. Тела вращения.................................... 282
5.6.1. Прямой круговой цилиндр...................... 282
5.6.2. Прямой круговой конус 287
5.6.3. Шар и сфера. Площадь поверхности. Объем шара.................................... 293

Примеры заданий ЕГЭ по теме 5.6. «Тела вращения».................................... 296

5.7. Комбинации тел 302
5.7.1. Комбинации многогранников.................... 302
5.7.2. Комбинации тел вращения 302
5.7.3. Комбинации многогранников и тел вращения 306

Примеры заданий ЕГЭ по теме 5.7. «Комбинации тел».................................... 312
Тренировочные тестовые задания к разделу 5 «Геометрические фигуры, их свойства. Измерение геометрических величин» 314

Раздел 6. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ,СТАТИСТИКИ, ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ..................... 316

6.1. Простейшие комбинаторные задачи 316
6.1.1. Множества и операции над ними 316
6.1.2. Элементы комбинаторики 319

Примеры заданий ЕГЭ по теме 6.1. «Простейшие комбинаторные задачи» 326

6.2. Вероятность событий: вычисление вероятности событий на основе подсчета числа исходов 328
6.2.1. Основные понятия теории вероятностей 328
6.2.2. Классическое определение вероятности.......... 329
6.2.3. Использование формул комбинаторики для вычисления вероятности событий 329
6.2.4. Операции над событиями........................ 330
6.2.5. Вероятность сложных событий 332
6.2.6. Независимые события........................... 333
6.2.7. Зависимые события 335
6.2.8. Независимые испытания. Схема Бернулли 336
6.2.9. Статистическое определение вероятности 337
6.2.10. Закон больших чисел.......................... 338

Примеры заданий ЕГЭ по теме 6.2. «Вероятность событий» 340

6.3. Решение практических задач: анализ диаграмм и графиков, анализ информации статистического характера 342
6.3.1. Понятие о статистике и ее методах. Статистические таблицы 342
6.3.2. Ряд распределения. Наглядное изображение статистического распределения 344
6.3.3. Мода и медиана. Средние значения 345

Тренировочные тестовые задания к разделу 6 «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей»............................. 346
Ответы к примерам заданий ЕГЭ...................... 348
Ответы к тренировочным тестовым заданиям 351

Тренировочное тестовое задание

Тренировочный тест №1..............................354
Ответы к тренировочному тесту № 1..................359
Тренировочный тест № 2.............................362
Ответы к тренировочному тесту № 2..................367

МАТЕМАТИКА

Теоретический курс с примерами заданий ЕГЭ

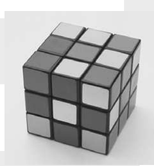
Выражения и преобразования

Уравнения и неравенства

Функции

Числа и выражения

Геометрические фигуры и их свойства



Элементы комбинаторики, статистики, теории вероятностей

Раздел 1.
Выражения и преобразования

1.1. Корень степени *n*

1.1.1. Понятие корня степени *n*

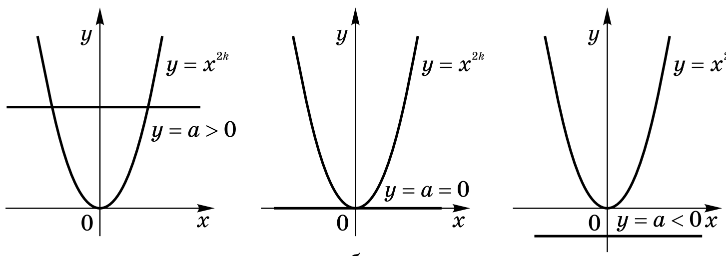
Корнем степени n из числа a называется такое число, n–я степень которого равна a; a — действительное число.

Например, корень третьей степени из 8 равен 2, поскольку 23 = 8; корень четвертой степени из числа 16 равен 2 или -2, поскольку 24 = 16 и $(-2)^4 = 16$; корень десятой степени из 0 равен 0, поскольку $0^{10} = 0$.

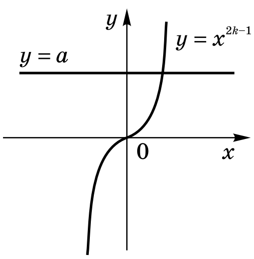
Согласно этому определению, корень степени n — это корень уравнения $x^n = a$. Число корней этого уравнения зависит от n и a.

Если n — четное, то есть $n = 2k$, $k \in N$, то уравнение $x^{2k} = a$ имеет два корня, если $a > 0$; один корень, если $a = 0$; не имеет корней, если $a < 0$.

Если n — нечетное, то есть $n = 2^{k-1}$, $k \in N$, то уравнение $x^{2k-1} = a$ всегда имеет только один корень.



а *б* *в*



Неотрицательный корень уравнения $x^n = a$ называют арифметическим корнем n-й степени из числа a.

Арифметическим корнем степени n из неотрицательного числа a называется такое неотрицательное число, n-я степень которого равна a.

Арифметический корень степени n из числа а обозначают так: $\sqrt[n]{a}$. Число n называют показателем корня, число a — подкоренным выражением.

Если $n = 2$, то вместо $\sqrt[2]{a}$ пишут $\sqrt{a}$ и называют арифметическим квадратным корнем.

Арифметический корень третьей степени называют кубическим корнем.

В тех случаях, когда понятно, что речь идет об арифметическом корне степени n, коротко говорят «корень степени n» или «корень n-й степени».

Пример 1. Найдите значение:

а) $\sqrt[3]{8}$; б) $\sqrt[4]{81}$; в) $\sqrt[5]{1}$; г) $\sqrt[100]{0}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{8} = 2$, поскольку $2^3 = 8$ и $2 > 0$;

б) $\sqrt[4]{81} = 3$, поскольку $3^4 = 81$ и $3 > 0$;

в) $\sqrt[5]{1} = 1$, поскольку $1^5 = 1$ и $1 > 0$;

г) $\sqrt[100]{0} = 0$, поскольку $0^{100} = 0$ и $0 = 0$.

Арифметический корень четной степени существует только из неотрицательных чисел: $\sqrt[2k]{a} = x$, $a > 0$, $x \in N$.

Арифметический корень нечетной степени существует из любого числа, поскольку $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$, $k \in N$.

Пример 2. Найдите значение:

а) $\sqrt[3]{-8}$; б) $\sqrt[5]{-243}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$;

б) $\sqrt[5]{-243} = -\sqrt[5]{243} = -3$.

Непосредственно из определения арифметического корня степени n следует:

1. Если $\sqrt[n]{a}$ существует, то $(\sqrt[n]{a})^n = a$.
2. $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0; \\ -a, \text{ если } a < 0, \text{ где } k \in N. \end{cases}$
3. $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$, где $k \in N$.

Пример 3. Найдите арифметический корень

$\sqrt[8]{(a-b)^8}$ при а) $a \geq b$; б) $a < b$.

Решение.

$\sqrt[8]{(a-b)^8} = |a - b|$.

а) если $a \geq b$, то $a - b \geq 0$ и $|a - b| = a - b$, следовательно, $\sqrt[8]{(a-b)^8} = a - b$;

б) если $a < b$, то $a - b < 0$ и $|a - b| = -(a - b) = b - a$, следовательно, $\sqrt[8]{(a-b)^8} = b - a$.

1.1.2. Свойства корня степени *n*

Корень из произведения и произведение корней

Корень из произведения неотрицательных множителей равен произведению корней из этих множителей:

$$\textbf{если } a \geq 0,\ b \geq 0, \textbf{ то } \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

Поменяв местами в последнем равенстве левую и правую части, получим равенство, выражающее правило умножения арифметических корней n-й степени:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, \text{ где } a \geq 0,\ b \geq 0.$$

Пример 1. Найдите значения выражений:

а) $\sqrt[3]{0,027 \cdot 125}$; б) $\sqrt[4]{256 \cdot 0,0081}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{0,027 \cdot 125} = \sqrt[3]{0,027} \cdot \sqrt[3]{125} = 0,3 \cdot 5 = 1,5$;

б) $\sqrt[4]{256 \cdot 0,0081} = \sqrt[4]{256} \cdot \sqrt[4]{0,0081} = 4 \cdot 0,3 = 1,2$.

П р и м е р 2. Вычислите:

а) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{500}$; б) $\sqrt[4]{324}\cdot\sqrt[4]{4}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{500}=\sqrt[3]{1000}=10$; б) $\sqrt[4]{324}\cdot\sqrt[4]{4}=\sqrt[4]{324\cdot 4}=\sqrt[4]{18^2\cdot 2^2}=\sqrt[4]{\left(2\cdot 3^2\right)^2\cdot 2^2}=\sqrt[4]{3^4\cdot 2^4}=6.$

П р и м е р 3. Упростите выражение:

$\left(\sqrt{7+2\sqrt{10}}+\sqrt{7-2\sqrt{10}}\right)^2.$

Решение.

$$\left(\sqrt{7+2\sqrt{10}}+\sqrt{7-2\sqrt{10}}\right)^2=\left(\sqrt{7+2\sqrt{10}}\right)^2+2\sqrt{7+2\sqrt{10}}\cdot\sqrt{7-2\sqrt{10}}+\left(\sqrt{7-2\sqrt{10}}\right)^2=$$

$$=7+2\sqrt{10}+2\sqrt{7^2-(2\sqrt{10})^2}+7-2\sqrt{10}=14+2\sqrt{49-4\cdot 10}=14+2\cdot 3=20.$$

П р и м е р 4. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[3]{4+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{4-2\sqrt{2}}$.

Решение.

$$\sqrt[3]{4+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{4-2\sqrt{2}}=\sqrt[3]{(4+2\sqrt{2})(4-2\sqrt{2})}=\sqrt[3]{4^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt[3]{16-8}=\sqrt[3]{8}=2.$$

Корень из частного и частное корней

Корень из частного, делимое которого неотрицательное, а делитель положительный, равен частному корню из делимого, деленному на корень из делителя:

$$\textbf{если } a\ge 0 \textbf{ и } b>0\textbf{, то } \sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Поменяв местами в последнем равенстве левую и правую части, получим равенство, выражающее правило деления арифметических корней n-й степени:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \text{ где } a\ge 0,\ b>0.$$

П р и м е р 1. Найдите значения выражений:

а) $\sqrt[3]{\frac{125}{1000}}$; б) $\sqrt[4]{\frac{625}{16}}$; в) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{\frac{125}{1000}}=\frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{1000}}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$; б) $\sqrt[4]{\frac{625}{16}}=\frac{\sqrt[4]{625}}{\sqrt[4]{16}}=\frac{5}{2}=2,5$; в) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}=\sqrt[3]{\frac{27}{8}}=\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}}=\frac{3}{2}=1,5.$

П р и м е р 2. Вычислите:

а) $\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}$; б) $\frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}$.

Решение.

а) $\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{\frac{54}{2}}=\sqrt[3]{27}=3$; б) $\frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}=\sqrt[4]{\frac{80}{5}}=\sqrt[4]{16}=2.$

Корень из степени и степень корня

При возведении корня в степень нужно возвести в эту степень подкоренное выражение, оставив тот же показатель корня:

$$\textbf{если } a > 0, \textbf{ то } (\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}, \textbf{ где } n \in N,\ n \geq 2.$$

Если показатель корня и показатель степени подкоренного выражения умножить или разделить на одно и то же натуральное число то значение корня не изменится:

$$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}, \textbf{ где } a \geq 0,\ n \in N,\ n \geq 2.$$

Пример 1. Упростите:

а) $\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\right)^2$; б) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$.

Решение.

а) $\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\right)^2 = \sqrt[3]{(1+\sqrt{2})^2} = \sqrt[3]{1+2\sqrt{2}+2} = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}$.

б) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^2\cdot 2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^3}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$.

Пример 2. Вычислите:

а) $\sqrt[3]{5^9}$; б) $\sqrt[5]{0,3^{10}}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{5^9} = \sqrt[3]{(5^3)^3} = 5^3 = 125$; б) $\sqrt[5]{0,3^{10}} = \sqrt[5]{(0,3^2)^5} = 0,3^2 = 0,09$.

Пример 3. Упростите:

а) $\sqrt[3]{a^6}$; б) $\sqrt[4]{a^{20}}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{a^6} = \sqrt[3]{(a^2)^3} = a^2$; б) $\sqrt[4]{a^{20}} = \sqrt[4]{(a^5)^4} = \left|a^5\right| = |a|^5$.

Корень степени *m* из корня степени *n*

Чтобы извлечь корень из корня, нужно из подкоренного выражения извлечь корень с показателем, который равен произведению двух данных показателей:

$$\textbf{если } a \geq 0, \textbf{ то } \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a},\ m \geq 2,\ n \geq 2.$$

Пример 1. Упростите выражение:

а) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{3}}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$; в) $\sqrt[4]{4\cdot\sqrt[3]{4}}$.

Решение.

а) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[12]{3}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$; в) $\sqrt[4]{4\cdot\sqrt[3]{4}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{4^3\cdot 4}} = \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[3]{4}$.

Пример 2. Вычислите:

а) $\sqrt[4]{4096}$; б) $\sqrt[4]{1296}$; в) $\sqrt[6]{729}$.

Решение.

а) $\sqrt[4]{4096} = \sqrt{\sqrt{4096}} = \sqrt{64} = 8$;

б) $\sqrt[4]{1296} = \sqrt{\sqrt{1296}} = \sqrt{36} = 6$;

в) $\sqrt[6]{729} = \sqrt[3]{\sqrt{729}} = \sqrt[3]{27} = 3$.

Корень из произведения и частного степеней

П р и м е р 1. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[5]{\dfrac{3^{10}\cdot 5^5}{7^{10}}}$; б) $\sqrt[6]{\dfrac{9^9}{2^{12}\cdot 5^6}}$.

Решение.

а) $\sqrt[5]{\dfrac{3^{10}\cdot 5^5}{7^{10}}}=\dfrac{\sqrt[5]{3^{10}}\cdot\sqrt[5]{5^5}}{\sqrt[5]{7^{10}}}=\dfrac{\sqrt[5]{(3^2)^5}\cdot\sqrt[5]{5^5}}{\sqrt[5]{(7^2)^5}}=\dfrac{3^2\cdot 5}{7^2}=\dfrac{45}{49}$;

б) $\sqrt[6]{\dfrac{9^9}{2^{12}\cdot 5^6}}=\dfrac{\sqrt[6]{9^9}}{\sqrt[6]{2^{12}}\cdot\sqrt[6]{5^6}}=\dfrac{\sqrt[6]{3^{18}}}{\sqrt[6]{2^{12}}\cdot\sqrt[6]{5^6}}=\dfrac{\sqrt[6]{(3^3)^6}}{\sqrt[6]{(2^2)^6}\cdot\sqrt[6]{5^6}}=\dfrac{3^3}{2^2\cdot 5}=\dfrac{27}{20}=1\dfrac{7}{20}$.

Корень из произведения и частного корней

П р и м е р 1. Упростите:

$\sqrt[7]{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{ab^2}\cdot\sqrt[6]{a^5b}:\sqrt[8]{a^7b^3}}$.

Решение.

$$\sqrt[7]{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{ab^2}\cdot\sqrt[6]{a^5b}:\sqrt[8]{a^7b^3}}=\sqrt[7]{\sqrt[12]{(a^2)^4}\cdot\sqrt[12]{(ab^2)^3}\cdot\sqrt[12]{(a^5b)^2}:\sqrt[8]{a^7b^3}}=\sqrt[7]{\sqrt[12]{a^8a^3b^6a^{10}b^2}:\sqrt[8]{a^7b^3}}=$$

$$=\sqrt[7]{\sqrt[12]{a^{21}b^8}:\sqrt[8]{a^7b^3}}=\sqrt[7]{\sqrt[24]{(a^{21}b^8)^2}:\sqrt[24]{(a^7b^3)^3}}=\sqrt[7]{\sqrt[24]{\dfrac{a^{42}b^{16}}{a^{21}b^9}}}=\sqrt[7]{\sqrt[24]{a^{21}b^7}}=\sqrt[24]{\sqrt[7]{a^{21}b^7}}=\sqrt[24]{a^3b}$$

Другие комбинации свойств корней степени *n*

П р и м е р 1. Упростите:

а) $\sqrt[3]{2\sqrt{6}}$; б) $\sqrt[3]{4\sqrt{5}}$; в) $\sqrt{2\sqrt{x}}$; г) $\sqrt[4]{2\cdot\sqrt[4]{2}}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{2\sqrt{6}}=\sqrt[3]{\sqrt{4}\cdot\sqrt{6}}=\sqrt[3]{\sqrt{24}}=\sqrt[6]{24}$;

б) $\sqrt[3]{4\sqrt{5}}=\sqrt[3]{\sqrt{16}\cdot\sqrt{5}}=\sqrt[3]{\sqrt{80}}=\sqrt[6]{80}$;

в) $\sqrt{2\sqrt{x}}=\sqrt{\sqrt{4}\cdot\sqrt{x}}=\sqrt{\sqrt{4x}}=\sqrt[4]{4x}$;

г) $\sqrt[4]{2\cdot\sqrt[4]{2}}=\sqrt[4]{\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{2}}=\sqrt[4]{\sqrt[4]{32}}=\sqrt[16]{32}$.

П р и м е р 2. Найдите значение выражения:

$\dfrac{5+2\sqrt{2}}{5-2\sqrt{2}}+\dfrac{5-2\sqrt{2}}{5+2\sqrt{2}}$.

Решение.

$$\frac{5+2\sqrt{2}}{5-2\sqrt{2}}+\frac{5-2\sqrt{2}}{5+2\sqrt{2}}=\frac{(5+2\sqrt{2})^2}{(5-2\sqrt{2})(5+2\sqrt{2})}+\frac{(5-2\sqrt{2})^2}{(5+2\sqrt{2})(5-2\sqrt{2})}=\frac{25+20\sqrt{2}+8}{25-8}+\frac{25-20\sqrt{2}+8}{25-8}=\frac{66}{17}=3\frac{15}{17}.$$

П р и м е р 3. Найдите значение выражения:

$\sqrt{4+\sqrt{7}}\cdot\sqrt[4]{23-8\sqrt{7}}$.

Решение.

$$\sqrt{4+\sqrt{7}}\cdot\sqrt[4]{23-8\sqrt{7}}=\sqrt[4]{(4+\sqrt{7})^2}\cdot\sqrt[4]{23-8\sqrt{7}}=\sqrt[4]{16+8\sqrt{7}+7}\cdot\sqrt[4]{23-8\sqrt{7}}=\sqrt[4]{23+8\sqrt{7}}\cdot\sqrt[4]{23-8\sqrt{7}}=$$

$$=\sqrt[4]{23^2-(8\sqrt{7})^2}=\sqrt[4]{529-448}=\sqrt[4]{81}=3$$

1.1.3. Тождественные преобразования иррациональных выражений

Вынесение множителя из-под корня

Если показатель степени множителя под корнем больше, чем показатель корня, то рациональный множитель можно вынести из–под знака корня:

$$\sqrt[n]{a^{n+m}}=\sqrt[n]{a^n\cdot a^m}=\sqrt[n]{a^n}\cdot\sqrt[n]{a^m}=a\sqrt[n]{a^m},\ a>0,\ n\in N,\ n\geq 2.$$

Пример. Вынести множитель из-под корня.

а) $\sqrt[5]{2^7}$; б) $\sqrt{24}$; в) $\sqrt[4]{2500}$; г) $\sqrt[3]{a^{11}\cdot b^4}$.

Решение.

а) $\sqrt[5]{2^7}=\sqrt[5]{2^5\cdot 2^2}=\sqrt[5]{2^5}\cdot\sqrt[5]{2^2}=2\sqrt[5]{4}$ б) $\sqrt{24}=\sqrt{4\cdot 6}=\sqrt{2^2\cdot 6}=\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{6}=2\sqrt{6}$;

в) $\sqrt[4]{2500}=\sqrt[4]{625\cdot 4}=\sqrt[4]{625}\cdot\sqrt[4]{4}=5\cdot\sqrt[4]{2^2}=5\sqrt{2}$;

г) $\sqrt[3]{a^{11}\cdot b^4}=\sqrt[3]{a^9\cdot a^2\cdot b^3\cdot b}=\sqrt[3]{a^9\cdot b^3}\cdot\sqrt[3]{a^2\cdot b}=a^3\cdot b\cdot\sqrt[3]{a^2\cdot b}$.

Ответ: а) $2\sqrt[5]{4}$; б) $2\sqrt{6}$; в) $5\sqrt{2}$; г) $a^3\cdot b\cdot\sqrt[3]{a^2\cdot b}$.

Внесение множителя под корень

Если рациональный множитель стоит перед корнем, то его можно внести под корень. Для этого нужно этот множитель возвести в степень корня:

$$a\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^nb},\ \text{если } a\geq 0,\ b\geq 0,\ n\in N,\ n\geq 2.$$

Для корней четной степени в зависимости от знака a имеем: $a\cdot\sqrt[2n]{b}=\sqrt[2n]{a^{2n}b}$, если $a\geq 0$, $b\geq 0$; $a\sqrt[2n]{b}=-\sqrt[2n]{a^{2n}b}$, если $a\leq 0$, $b\geq 0$.

В частности, для квадратных корней: $a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}$, если $a\geq 0$, $b\geq 0$; $a\sqrt{b}=-\sqrt{a^2b}$, если $a\leq 0$, $b\geq 0$.

Пример. Внести множитель под корень:

а) $3\sqrt[3]{6}$; б) $a^2\cdot\sqrt[5]{b}$ в) $-5a\sqrt{\dfrac{8}{25}}$, $a<0$.

Решение.

а) $3\sqrt[3]{6}=\sqrt[3]{3^3\cdot 6}=\sqrt[3]{27\cdot 6}=\sqrt[3]{162}$; б) $a^2\cdot\sqrt[5]{b}=\sqrt[5]{a^{10}}\cdot\sqrt[5]{b}=\sqrt[5]{a^{10}b}$; в) $-5a\sqrt{\dfrac{b}{25}}=\sqrt{\dfrac{25a^2b}{25}}=\sqrt{a^2b}$.

Ответ: а) $\sqrt[3]{162}$; б) $\sqrt[5]{a^{10}b}$; в) $\sqrt{a^2b}$.

Приведение подкоренного выражения к целому виду

Привести подкоренное выражение к целому виду — это значит освободить подкоренное выражение от знаменателя (если он есть):

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b^k}}=\sqrt[n]{\frac{a\cdot b^{n-k}}{b^k\cdot b^{n-k}}}=\sqrt[n]{\frac{a\cdot b^{n-k}}{b^n}}=\frac{\sqrt[n]{a\cdot b^{n-k}}}{\sqrt[n]{b^n}}=\frac{1}{b}\sqrt[n]{a\cdot b^{n-k}},\ \text{если } a\geq 0,\ b>0.$$

Пример. $\sqrt[3]{\dfrac{3}{5^2}}=\sqrt[3]{\dfrac{3\cdot 5}{5^2\cdot 5}}=\dfrac{\sqrt[3]{3\cdot 5}}{\sqrt[3]{5^3}}=\dfrac{\sqrt[3]{15}}{5}=\dfrac{1}{5}\sqrt[3]{15}$.

Ответ: $\dfrac{1}{5}\sqrt[3]{15}$.

Примеры заданий ЕГЭ по теме 1.1. «Корень степени *n*»

Ответом на задания 1–18 должно быть целое число или конечная десятичная дробь.

1. Вычислите $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$.

Ответ: ________________________.

2. Вычислите $\sqrt[5]{81\cdot 96}$.

Ответ: ________________________.

3. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{4+\sqrt{7}}\right)^2$.

Ответ: ________________________.

4. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$.

Ответ: ________________________.

5. Найдите значение выражения $\sqrt[3]{4+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{4-2\sqrt{2}}$.

Ответ: ________________________.

6. Вычислите $\sqrt{3}\left(\sqrt{12}-2\sqrt{27}\right)$.

Ответ: ________________________.

7. Вычислите $\sqrt{48}-2\sqrt{3}\left(2-5\sqrt{12}\right)$.

Ответ: ________________________.

8. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{6+4\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}\right)^2$.

Ответ: ________________________.

9. Вычислите $\sqrt[3]{\sqrt{52}-5}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{52}+5}$.

Ответ: ________________________.

10. Вычислите $\sqrt[7]{\sqrt[3]{\sqrt{10}-3}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{10}+3}}$.

Ответ: ______________________________.

11. Вычислите $\sqrt[3]{0,027\cdot 125}+\sqrt[4]{256\cdot 0,0081}$.

Ответ: ______________________________.

12. Вычислите $\sqrt[3]{\dfrac{125}{1000}}-\sqrt[4]{\dfrac{625}{16}}$.

Ответ: ______________________________.

13. Вычислите $\sqrt[3]{3\dfrac{3}{8}}-\dfrac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}$.

Ответ: ______________________________.

14. Вычислите $\sqrt[4]{324}\cdot\sqrt[4]{4}+\dfrac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}$.

Ответ: ______________________________.

15. Найдите значение выражения $\sqrt[5]{0,3^{10}\cdot 2^{15}}$.

Ответ: ______________________________.

16. Найдите значение выражения $\sqrt[10]{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{20}\cdot 4^{30}}$.

Ответ: ______________________________.

17. Найдите значение выражения $\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{7+4\sqrt{3}}$.

Ответ: ______________________________.

18. Найдите значение выражения $\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}$.

Ответ: ______________________________.

1.2. Степень с рациональным показателем

1.2.1. Понятие степени с рациональным показателем

Степень с натуральным показателем

n–й натуральной степенью действительного числа a называется действительное число b, получаемое в результате умножения числа а самого на себя n раз:

$$a^n = b = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}.$$

n-ю степень числа a обозначают a^n и пишут

$$b = a^n.$$

Число a называется основанием степени, а число n — показателем степени ($n \geq 2$, $n \in Z$).

$$0^n = 0,\ 1^n = 1,\ a^1 = a.$$

Например:

$5^1 = 5$; $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$; $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$.

Степень с целым показателем

При $a \neq 0$ по определению $a^0 = 1$, 0^0 — не определено.

При $a \neq 0$ по определению $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ (n — натуральное число).

Например:

$8^{-1} = \dfrac{1}{8}$; $5^{-3} = \dfrac{1}{5^3} = \dfrac{1}{125}$; $(-3)^{-2} = \dfrac{1}{(-3)^2} = \dfrac{1}{9}$;

0^{-5} — не определено.

Степень с рациональным показателем

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n},$$

где $a > 0$, $m \in N$, $m > 2$, $n \in Z$.

Например:

$25^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{25^1} = \sqrt{25} = 5$; $4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{16}$; $2^{-\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^{-3}} = \sqrt[5]{\dfrac{1}{8}}$.

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, $a \geq 0$, n — натуральное число, $n \geq 2$.

Например:

$27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$; $2^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{2}$; $(-5)^{\frac{1}{3}}$ — не определено.