ГЛАВА I

ГРУППОВАЯ И ГАМИЛЬТОНОВА СТРУКТУРЫ ДИНАМИКИ ЖИДКОСТИ

Группа, с которой мы чаще всего будем иметь дело в гидродинамике — это бесконечномерная группа диффеоморфизмов области течения, сохраняющих элемент объема. Можно также связать интересные системы с другими группами, в частности, конечномерными. Например, обычная теория твердого тела с неподвижной точкой соответствует группе вращений SO(3), в то время как геометрия Лобачевского имеет дело с группой сдвигов и растяжений векторного пространства. Наши конструкции равным образом применимы и к калибровочным группам, используемым в физике. Последние занимают промежуточное положение между группой вращений твердого тела и группами диффеоморфизмов. Эти группы уже бесконечномерны, но еще слишком просты, чтобы служить моделью для гидродинамики.

В этой главе мы изучим геодезические односторонне инвариантных метрик на группах Ли. Принцип наименьшего действия утверждает, что движение таких физических систем, как твердые тела и идеальные жидкости, описывается геодезическими этих метрик, заданных кинетической энергией.

§ 1. Группы симметрий твердого тела и идеальной жидкости

Определение 1.1. Множество G гладких преобразований многообразия M в себя называется *группой*, если:

1) вместе с любыми двумя преобразованиями $g, h \in G$ композиция $g \circ h$ принадлежит G (символ $g \circ h$ означает, что первым применяется h, а затем g);

2) вместе с любым $g \in G$ обратное преобразование g^{-1} также принадлежит G.

Из 1) и 2) следует, что каждая группа содержит тождественное преобразование (единицу) e.

Группа называется *группой Ли*, если G имеет гладкую структуру и операции 1) и 2) являются гладкими.

Пример 1.2. Все вращения твердого тела вокруг начала координат образуют группу Ли SO(3).

Пример 1.3. Диффеоморфизмы некоторой области M, сохраняющие элемент объема, образуют группу Ли. Мы обозначим эту группу $S\mathrm{Diff}(M)$.

Группа $S\mathrm{Diff}(M)$ может рассматриваться как конфигурационное пространство идеальной несжимаемой жидкости, заполняющей область M. Действительно, течение жидкости определяет в каждый момент времени t отображение g^t области течения на себя (начальное положение любой частицы жидкости переносится в конечное ее положение в момент t). Все конечные положения, т. е. конфигурации системы (или «перестановки частиц»), образуют «бесконечномерное многообразие» $S\mathrm{Diff}(M)$.

Здесь и далее мы рассматриваем только диффеоморфизмы M, которые могут быть связаны непрерывным семейством диффеоморфизмов с тождественным преобразованием. Соответственно, $S\mathrm{Diff}(M)$ обозначает связную компоненту единицы группы всех диффеоморфизмов области M, сохраняющих объемы.

Кинетическая энергия жидкости (в предположении, что ее плотность равна 1) является интегралом (по области течения) от половины квадрата скорости частиц. Так как жидкость несжимаема, интегрирование может производиться как по элементу объема, состоящему из начальных положений частиц, так и по элементу объема dx, занимаемому частицами в момент t:

$$E = \frac{1}{2} \int\limits_M v^2\, dx,$$

где v является скоростью частицы жидкости: $v(x,t) = \dfrac{\partial}{\partial t} g^t(y)$, $x = g^t(y)$ (y является начальной позицией той частицы, которая в момент t находится в точке x), см. рис. 1.

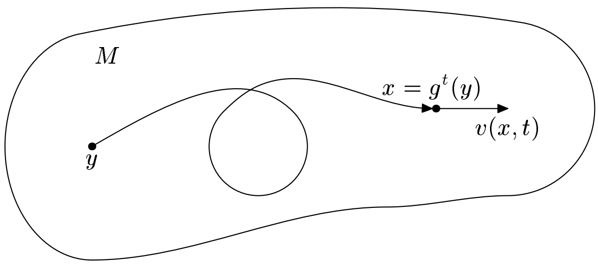

Рис. 1. Движение частицы жидкости в области M

Предположим, что конфигурация g изменяется со скоростью $\dot{g}$. Вектор $\dot{g}$ принадлежит касательному пространству T_gG группы $G = S\mathrm{Diff}(M)$ в точке g. Кинетическая энергия является квадратичной формой на векторном пространстве скоростей.

Т е о р е м а 1.4. *Кинетическая энергия несжимаемой жидкости инвариантна по отношению к правым переносам на группе* $G = S\mathrm{Diff}(M)$ (*т. е. по отношению к отображениям* $R_h\colon G \to G$ *вида* $R_h(g) = gh$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Умножение всех групповых элементов на h *справа* означает, что диффеоморфизм h (сохраняющий элемент объема) действует первым, прежде диффеоморфизма g, меняющегося со скоростью $\dot{g}$. Такой диффеоморфизм h может рассматриваться как (сохраняющая объем) перенумерация частиц в начальном положении $y = h(z)$. Скорость частицы, занимающей определенное положение в заданный момент времени, не меняется при такой перенумерации, и, следовательно, кинетическая энергия сохраняется. □

Аналогично, кинетическая энергия твердого тела, имеющего неподвижную точку, является квадратичной формой на касательном пространстве к конфигурационному пространству твердого тела, т. е. к многообразию $G = \mathrm{SO}(3)$.

Теорема 1.5. *Кинетическая энергия твердого тела является инвариантной по отношению к левым сдвигам на группе $G = \mathrm{SO}(3)$, т. е. по отношению к преобразованиям $L_h \colon G \to G$, имеющим вид $L_h(g) = hg$.*

Доказательство. Умножение на групповой элемент h *слева* означает, что вращение h применяется *после* вращения g, меняющегося со скоростью $\dot{g}$. Такое вращение h может рассматриваться как поворот всего пространства вместе с вращающимся телом. Этот поворот не меняет длины вектора скорости любой точки тела, и, следовательно, не меняет суммарной кинетической энергии. □

Замечание 1.6. На группе SO(3) (или, в более общем виде, на любой компактной группе) существует двусторонне инвариантная метрика. На бесконечномерных группах, наиболее интересных для гидродинамики, такой римановой метрики не существует. Отметим, однако, что для двух- и трехмерной гидродинамики на соответствующих группах диффеоморфизмов, сохраняющих элемент объема, существуют двусторонне инвариантные невырожденные квадратичные формы на касательных пространствах (см. гл. IV, § 8 для двумерного случая, и гл. III, § 4 и гл. IV, п. 8.4 для трехмерного, где этой квадратичной формой является «спиральность»).

§ 2. Группы Ли, алгебры Ли и присоединенное представление

В этом параграфе мы приведем основные факты из теории групп и алгебр Ли в удобной для нас форме.

Линейная замена координат C переводит матрицу линейного оператора B в матрицу CBC^{-1}. Подобная конструкция существует и для произвольной группы Ли G.

Определение 2.1. Композиция $A_g = R_g^{-1} L_g \colon G \to G$ левого и правого сдвигов, которая переводит любой элемент $h \in G$ в ghg^{-1}, называется *внутренним автоморфизмом* группы G. (Произведение $R_{g^{-1}}$ и L_g может быть взято в любом порядке: все левые сдвиги коммутируют со всеми правыми.) Это произведение действительно является автоморфизмом, так как

$$A_g(fh) = (A_g f)(A_g h).$$

Отображение, переводящее g во внутренний автоморфизм A_g, является групповым гомоморфизмом, так как $A_{gh} = A_g A_h$.

Внутренний автоморфизм A_g оставляет на месте единицу группы. Следовательно, его производная в единице переводит в себя касательное пространство к группе в единице.

Определение 2.2. Касательное пространство к группе Ли в единице называется *векторным пространством алгебры Ли*, соответствующей этой группе.

Алгебра Ли группы G обычно обозначается готической буквой $\mathfrak{g}$.

П р и м е р 2.3. Для группы Ли $G = S\mathrm{Diff}(M)$, образованной диффеоморфизмами области течения M, сохраняющими элемент объема, соответствующая алгебра Ли состоит из бездивергентных векторных полей на M.

П р и м е р 2.4. Алгебра Ли $\mathfrak{so}(n)$ группы вращений $\mathrm{SO}(n)$ состоит из кососимметрических $n \times n$ матриц. Для $n = 3$ векторное пространство кососимметрических матриц является трехмерным. Векторы этого трехмерного пространства называются *угловыми скоростями*.

О п р е д е л е н и е 2.5. Дифференциал внутреннего автоморфизма A_g в единице группы e называется *оператором* Ad_g *присоединенного действия* (или *присоединенным оператором*) *группы*:

$$\mathrm{Ad}_g \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \quad \mathrm{Ad}_g a = (A_{g*}|_e)a, \quad a \in \mathfrak{g} = T_e G.$$

(Здесь и ниже мы обозначаем через $T_x M$ касательное пространство многообразия M в точке x, а через $F_*|_x \colon T_x M \to T_{F(x)} M$ производную отображения $F \colon M \to M$ в x. Производная F_* отображения F в x является линейным оператором.)

Операторы присоединенного действия задают представление группы в пространстве своей алгебры Ли, так как

$$\mathrm{Ad}_{gh} = \mathrm{Ad}_g \mathrm{Ad}_h.$$

П р и м е р 2.6. Присоединенные операторы группы $S\mathrm{Diff}(M)$ определяют действие диффеоморфизмов на бездивергентных векторных полях на M как действие соответствующих замен координат на многообразии.

Отображение Ad, которое сопоставляет оператор Ad_g элементу группы $g \in G$, может рассматриваться как отображение из группы в пространство линейных операторов на ее алгебре Ли.

О п р е д е л е н и е 2.7. Дифференциал ad отображения Ad в единице группы называется *присоединенным представлением алгебры Ли*:

$$\mathrm{ad} = \mathrm{Ad}_{*e} \colon \mathfrak{g} \to \mathrm{End}\,\mathfrak{g}, \quad \mathrm{ad}_\xi = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \mathrm{Ad}_{g(t)},$$

где $g(t)$ является кривой на группе G, выходящей из точки $g(0) = e$ со скоростью $\dot{g}(0) = \xi$ (рис. 2). Здесь $\mathrm{End}\,\mathfrak{g}$ является пространством линейных операторов, переводящих $\mathfrak{g}$ в себя. Символ ad_ξ обозначает образ элемента ξ из алгебры Ли $\mathfrak{g}$ при линейном отображении ad. Этот образ $\mathrm{ad}_\xi \in \mathrm{End}\,\mathfrak{g}$ является линейным оператором из $\mathfrak{g}$ в себя.

П р и м е р 2.8. Пусть G — группа вращений пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$\mathrm{ad}_\xi \omega = [\xi, \omega],$$

где $[\xi, \omega] = \xi\omega - \omega\xi$ является коммутатором кососимметрических матриц ξ и ω. В частности, для $n = 3$ вектор $[\xi, \omega]$ оказывается обычным векторным произведением $\xi \times \omega$ векторов угловых скоростей ξ и ω в $\mathbb{R}^3$.

Доказательство. Пусть $t \mapsto g(t)$ — кривая, выходящая из e с начальной скоростью $\dot{g} = \xi$, и пусть $s \mapsto h(s)$ является такой же кривой с начальной скоростью $h' = \omega$. Тогда

$$g(t)h(s)g(t)^{-1} = (e + t\xi + o(t))(e + s\omega + o(s))(e + t\xi + o(t))^{-1} = \\ = e + s[\omega + t(\xi\omega - \omega\xi) + o(t)] + o(s)$$

при $t, s \to 0$. □

Пример 2.9. Пусть $G = \mathrm{Diff}(M)$ — группа диффеоморфизмов многообразия M. Тогда

$$\mathrm{ad}_v w = -\{v, w\}, \tag{2.1}$$

где $\{v, w\}$ — это скобка Пуассона векторных полей v и w.

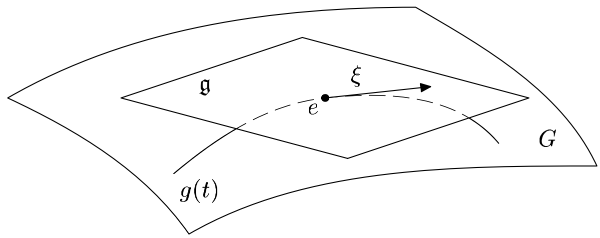

Рис. 2. Вектор ξ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ является скоростью в единице e некоторого пути $g(t)$ на группе Ли G

Скобка Пуассона векторных полей определяется как коммутатор соответствующих дифференциальных операторов:

$$L_{\{v,w\}} = L_v L_w - L_w L_v. \tag{2.2}$$

Линейный дифференциальный оператор первого порядка L_v, связанный с векторным полем v, является производной вдоль этого поля ($L_v f = \sum v_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ для произвольной функции f и любой системы координат).

Компоненты векторного поля $\{v, w\}$ в произвольной системе координат выражаются через компоненты v и w по формуле

$$\{v, w\}_i = \sum_j v_j \frac{\partial w_i}{\partial x_j} - w_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}.$$

Как следует из вышесказанного, поле $\{v, w\}$ не зависит от системы координат $(x_1, \ldots, x_n)$, используемой в этой формуле.

Оператор L_v (называемый *производной Ли*) действует также на любое тензорное поле на многообразии и определяется как «производная рыбака»: поток несет тензоры мимо рыбака, а рыбак сидит на месте и их дифференцирует. Например, функции переносятся потоком назад, и, следовательно,

$L_v f = \sum v_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$. Подобным же образом дифференциальные формы переносятся назад, но векторные поля переносятся вперед. Таким образом, для векторных полей мы получаем $L_v w = -\{v, w\}$.

Знак минус входит в формулу (2.1), потому что по традиции знак скобки Пуассона двух векторных полей определяется согласно (2.2) подобно матричному коммутатору. Противоположность знаков в последних двух примерах является следствием тех же причин, что и различие в инвариантности кинетической энергии твердого тела и несжимаемой жидкости: она левоинвариантна для тела и правоинвариантна для жидкости.

Доказательство формулы (2.1). Диффеоморфизмы, соответствующие векторным полям v и w, могут быть записаны (в локальных координатах) в виде:

$$g(t)\colon x \mapsto x + tv(x) + o(t), \quad t \to 0,$$
$$h(s)\colon x \mapsto x + sw(x) + o(s), \quad s \to 0.$$

Тогда мы имеем $g(t)^{-1}\colon x \mapsto x - tv(x) + o(t)$, откуда

$$h(s)(g(t))^{-1}\colon x \mapsto x - tv(x) + o(t) + sw(x - tv(x) + o(t)) + o(s) = \\ = x - tv(x) + o(t) + s\Big(w(x) - t\frac{\partial w}{\partial x}v(x) + o(t)\Big) + o(s)$$

и

$$g(t)h(s)(g(t))^{-1}\colon x \mapsto x + s\Big(w(x) + t\Big(\frac{\partial v}{\partial x}w(x) - \frac{\partial w}{\partial x}v(x)\Big)\Big) + o(t) + o(s). \quad \square$$

Пример 2.10. Пусть $G = S\mathrm{Diff}(M)$ — группа диффеоморфизмов области M, сохраняющих элемент объема. Формула (2.1) справедлива и в этом случае, причем все три поля v, w и $\{v, w\}$ являются бездивергентными.

Определение 2.11. *Коммутатор* в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ определяется как операция $[\,.\,,\,.\,]\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, которая ставит в соответствие паре векторов a, b касательного пространства $\mathfrak{g}$ (в единице группы Ли G) следующий третий вектор этого пространства:

$$[a, b] = \mathrm{ad}_a b.$$

Касательное пространство в единице группы Ли, снабженное такой операцией $[\,.\,,\,.\,]$, называется *алгеброй Ли группы Ли* G.

Пример 2.12. Коммутатор кососимметрических матриц a и b — это $ab - ba$ (в трехмерном случае это векторное произведение $a \times b$ соответствующих векторов). Коммутатор двух векторных полей — это их скобка Пуассона, взятая с минусом. Коммутатор бездивергентных векторных полей в трехмерном евклидовом пространстве дается формулой

$$[a, b] = \mathrm{rot}(a \times b),$$

где $a \times b$ — векторное произведение. Это следует из более общей формулы

$$\mathrm{rot}(a \times b) = [a, b] + a \,\mathrm{div}\, b - b \,\mathrm{div}\, a$$

и справедливо для произвольного трехмерного риманова многообразия M^3. Последняя формула может быть получена применением формулы гомотопии (см. п. 7.2).

З а м е ч а н и е 2.13. Операция коммутирования в любой алгебре Ли может быть определена следующей конструкцией. Продолжим векторы v и w левоинвариантно на всю группу Ли G. Другими словами, в любой точке $g \in G$ мы определим касательный вектор $v_g \in T_gG$, который является левым сдвигом в точку g вектора $v \in \mathfrak{g} = T_eG$. Мы получим два *левоинвариантных* векторных поля $\tilde{v}$ и $\tilde{w}$ на G. Возьмем их скобку Пуассона $\tilde{u} = \{\tilde{v}, \tilde{w}\}$. Операция взятия скобки Пуассона инвариантна относительно диффеоморфизмов. Следовательно, поле $\tilde{u}$ также *левоинвариантно*, и оно полностью определяется своим значением u в единице группы. Этот вектор $u \in T_eG = \mathfrak{g}$ и можно принять за определение коммутатора в алгебре Ли $\mathfrak{g}$:

$$[v, w] = u.$$

Аналогичная конструкция, использующая *правоинвариантные* поля $\tilde{v}$, $\tilde{w}$ на группе G, дает нам коммутатор со знаком *минус*.

Т е о р е м а 2.14. *Операция коммутирования* $[\,.\,,\,.\,]$ *является билинейной, кососимметрической и удовлетворяет тождеству Якоби*:

$$[\lambda a + \nu b, c] = \lambda[a, c] + \nu[b, c];$$
$$[a, b] = -[b, a];$$
$$[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0.$$

З а м е ч а н и е 2.15. Векторное пространство, снабженное кососимметрической билинейной операцией, удовлетворяющей тождеству Якоби, называется *абстрактной алгеброй Ли*. Каждая (конечномерная) абстрактная алгебра Ли является алгеброй Ли некоторой группы Ли G.

К сожалению, в бесконечномерном случае это не так. Это является источником многих трудностей в квантовой теории поля, в теории вполне интегрируемых систем и в других областях, где язык бесконечномерных алгебр Ли заменяет теорию групп Ли (см., например, гл. VI, § 1 об алгебре Вирасоро и об уравнении Кортевега–де Фриза). Можно рассматривать алгебру Ли как первую аппроксимацию к группе Ли, а тождество Якоби представлять как инфинитезимальное следствие ассоциативности группового умножения. В конечномерной ситуации (связная, односвязная) группа Ли может быть реконструирована по ее первой аппроксимации. Однако в бесконечномерном случае попытка такой реконструкции может привести к расходящимся рядам.

Легко проверяется следующая

Т е о р е м а 2.16. *Операторы присоединенного действия* $\mathrm{Ad}_g\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *образуют представление группы Ли G автоморфизмами ее алгебры Ли* $\mathfrak{g}$:

$$[\mathrm{Ad}_g\xi, \mathrm{Ad}_g\eta] = \mathrm{Ad}_g[\xi, \eta], \quad \mathrm{Ad}_{gh} = \mathrm{Ad}_g\mathrm{Ad}_h.$$

О п р е д е л е н и е 2.17. Множество образов элемента ξ алгебры Ли под действием всех операторов Ad_g, $g \in G$, называется *орбитой* точки ξ *при присоединенном действии группы* (короче, *присоединенной орбитой точки* ξ).

Пример 2.18. A. Присоединенная орбита матрицы, рассматриваемая как элемент алгебры Ли всех комплексных матриц, есть множество матриц с одной и той же жордановой нормальной формой.

B. Присоединенные орбиты группы вращений трехмерного евклидова пространства являются сферами всевозможных радиусов с центром в начале координат. Само начало координат (сфера нулевого радиуса) является отдельной орбитой.

C. Алгебра Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ вещественных матриц с определителем, равным единице, состоит из всех 2×2 матриц с нулевым следом:

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \right\}$$

с вещественными a, b и c. Матрицы с одной и той же жордановой формой имеют одинаковую величину определителя $\Delta = -(a^2+bc)$. Присоединенные орбиты в $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ восстанавливаются по этому определителю «почти однозначно», хотя они и меньше, чем в комплексном случае. Орбитами являются связные компоненты квадрик $a^2+bc=\mathrm{const}\neq 0$, каждая половина конуса $a^2+bc=0$ и начало координат $a=b=c=0$ (см. рис. 3, a).

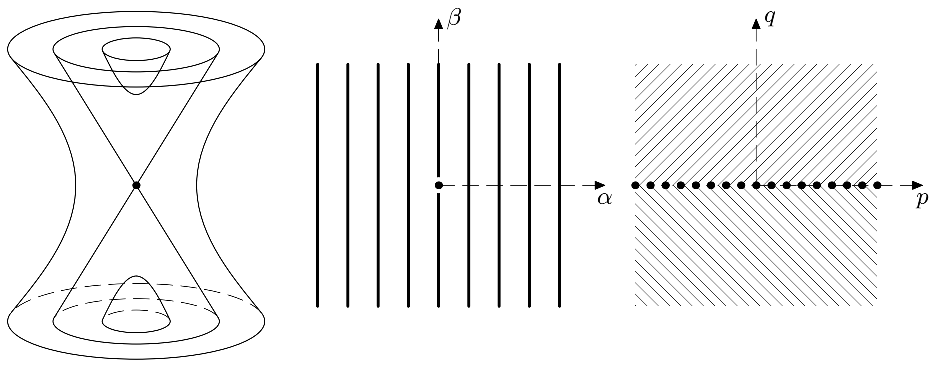

Рис. 3. (a) (Ко)присоединенные орбиты в матричной алгебре $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ являются связными компонентами квадрик. (b) Присоединенные и (c) коприсоединенные орбиты группы аффинных преобразований $\mathbb{R}$

D. Присоединенные орбиты группы $G=\{x\mapsto ax+b\colon a>0, b\in\mathbb{R}\}$ аффинных преобразований вещественной прямой $\mathbb{R}$ являются прямыми линиями $\{\alpha=\mathrm{const}\neq 0\}$, двумя лучами $\{\alpha=0,\ \beta>0\}$, $\{\alpha=0,\ \beta<0\}$ и началом координат $\{\alpha=0,\ \beta=0\}$ в плоскости $\{(\alpha,\beta)\}=\mathfrak{g}$ (рис. 3, b).

E. Пусть v является бездивергентным векторным полем на M. Присоединенная орбита поля v для группы $S\mathrm{Diff}(M)$ состоит из бездивергентных векторных полей, полученных из v естественным действием всех диффеоморфизмов области M, сохраняющих элемент объема. В частности, все такие поля являются топологически эквивалентными. Например, они имеют равные числа неподвижных точек, периодических орбит, инвариантных поверхностей, те же собственные числа линеаризаций в неподвижных точках и т. д.

Замечание 2.19. Для односвязной ограниченной области M в плоскости (x, y) бездивергентное векторное поле, касающееся края области M, может быть задано своей *функцией тока* ψ (определяемой тем, что компоненты поля равны $-\psi_y$ и ψ_x). Функция тока определена с точностью до константы, и можно положить ее равной нулю на границе M. Алгебра Ли группы $S\mathrm{Diff}(M)$, которая состоит из диффеоморфизмов области M, сохраняющих элементы площади, естественно отождествляется с пространством всех таких функций тока ψ.

Теорема 2.20. *Все моменты*

$$I_n = \iint\limits_M \psi^n \, dx \, dy$$

постоянны вдоль присоединенных орбит группы $S\mathrm{Diff}(M)$ *в пространстве функций тока.*

Доказательство. Вдоль любой орбиты все площади $S(c)$ множеств «меньших значений» $\{(x, y) \colon \psi(x, y) < c\}$ постоянны. $\square$

Замечание 2.21. Кроме моментов вдоль орбит сохраняются топологический тип функции ψ (в частности, число особых точек, конфигурация сепаратрис седел и т. д.), а также площади, ограниченные связными компонентами линий уровня функции тока ψ (см. рис. 4).

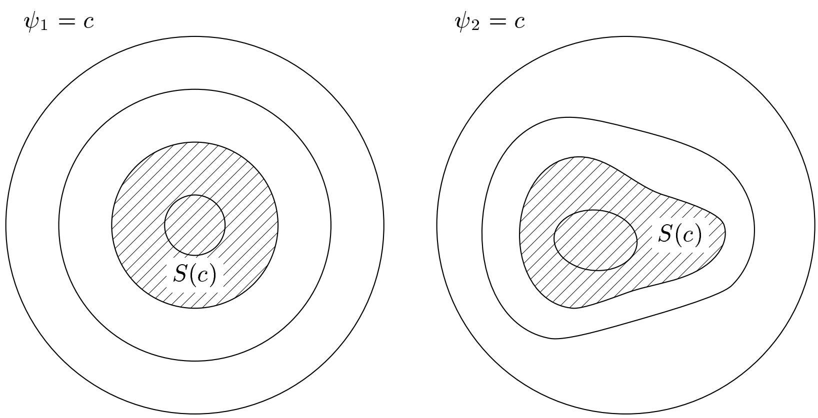

Рис. 4. Функции тока полей, принадлежащих одной и той же присоединенной орбите, имеют равные площади множеств «меньших значений»

Более того, периоды движения частиц вдоль соответствующих замкнутых траекторий также сохраняются при действии диффеоморфизмов. Однако последний инвариант может быть выражен через описанные выше. Например, период движения вдоль замкнутой траектории $\psi = c$, которая ограничивает топологический диск площади $S(c)$, дается формулой $T = \dfrac{\partial S}{\partial c}$.