Глава 3

Комбинаторика–1

Сколькими способами можно проехать из города А в город В? Сколько разных слов в языке племени Мумбо-Юмбо? Сколько существует «симпатичных» четырёхзначных чисел?.. Сколько?.. Такие и некоторые другие, похожие на них вопросы будут обсуждаться в этой главе.

§ 1. Простой подсчёт

Начнём с нескольких простых задач.

Задача 1. В магазине «Всё для чая» есть 5 разных чашек и 3 разных блюдца. Сколькими способами можно купить чашку с блюдцем?

Решение. Выберем чашку. В комплект к ней можно выбрать любое из трёх блюдец. Поэтому есть 3 разных комплекта, содержащих выбранную чашку. Поскольку чашек всего 5, число различных комплектов равно 15 ($15 = 5 \cdot 3$).

Задача 2. В магазине «Всё для чая» есть ещё 4 чайные ложки. Сколькими способами можно купить комплект из чашки, блюдца и ложки?

Решение. Выберем любой из 15 комплектов предыдущей задачи. Его можно дополнить ложкой четырьмя различными способами. Поэтому общее число возможных комплектов равно 60 ($60 = 15 \cdot 4 = 5 \cdot 3 \cdot 4$).

Совершенно аналогично решается следующая задача.

Задача 3. В Стране Чудес есть три города: А, Б и В. Из города А в город Б ведёт 6 дорог, а из города Б в город В — 4 дороги (рис. 8). Сколькими способами можно проехать от А до В?

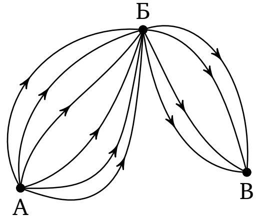

Рис. 8

Ответ. $24 = 6 \cdot 4$.

В решении задачи 4 появляется новое соображение.

Задача 4. В Стране Чудес построили ещё один город — Г и несколько новых дорог (рис. 9). Сколькими способами можно теперь добраться из города А в город В?

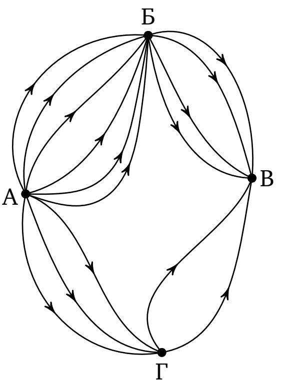

Рис. 9

Решение. Выделим два случая: путь проходит через город Б или через город Г. В каждом из этих случаев легко сосчитать количество возможных маршрутов: в первом — 24, во втором — 6. Складывая, получаем общее количество маршрутов: 30.

Выделение нескольких возможных случаев оказывается полезным и при решении задачи 5.

Задача 5. В магазине «Всё для чая» по-прежнему продаётся 5 чашек, 3 блюдца и 4 чайные ложки. Сколькими способами можно купить два предмета с разными названиями?

Решение. Возможны три разных случая: первый — покупаются чашка с блюдцем, второй — чашка с ложкой, третий — блюдце и ложка. В каждом из этих случаев легко сосчитать количество возможных вариантов (в первом — 15, во втором — 20, в третьем — 12). Складывая, получаем общее число возможных вариантов: 47.

> ***Для преподавателей.*** Главная цель, которую должен преследовать преподаватель при решении и разборе этих задач, — понимание школьниками, в какой ситуации при подсчёте вариантов следует перемножать, а в какой — складывать. Конечно, задач должно быть много. Они могут быть взяты в конце главы (28–32), в книге [70] или придуманы самим преподавателем. Возможные сюжеты: различные покупки в магазине, разные схемы дорог, составление чисел из цифр (см. следующий цикл задач) и т. д.

Задача 6. Назовём натуральное число «симпатичным», если в его записи встречаются только нечётные цифры. Сколько существует четырёхзначных «симпатичных» чисел?

Решение. Понятно, что однозначных «симпатичных» чисел ровно 5. К каждому однозначному «симпатичному» числу вторая нечётная цифра может быть дописана пятью различными способами. Таким образом, двузначных «симпатичных» чисел всего $5 \cdot 5 = 25$. Аналогично трёхзначных «симпатичных» чисел $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$, а четырёхзначных — $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 54 = 625$.

> ***Для преподавателей.*** В этой задаче ответ имеет вид m^n. К такому ответу приводят задачи, в которых на каждом из n мест может быть поставлен элемент из некоторого m-элементного множества. Эти задачи часто вызывают трудности у школьников, не всегда понимающих, какое из чисел является основанием степени, а какое — показателем.

Предложим ещё четыре подобные задачи.

Задача 7. Монету бросают трижды. Сколько разных последовательностей орлов и решек можно при этом получить?

Ответ. 2^3.

Задача 8. Каждую клетку квадратной таблицы 2×2 можно покрасить в чёрный или белый цвет. Сколько существует различных раскрасок этой таблицы?

Ответ. 2^4.

Задача 9. Сколькими способами можно заполнить одну карточку в лотерее «Спортпрогноз»? (В этой лотерее нужно предсказать итог тринадцати спортивных матчей. Итог каждого матча — победа одной из команд либо ничья; счёт роли не играет.)

Ответ. 3^{13}.

Задача 10. Алфавит племени Мумбо-Юмбо состоит из трёх букв А, Б и В. Словом является любая последовательность, состоящая не более чем из 4 букв. Сколько слов в языке племени Мумбо-Юмбо?

Указание. Сосчитайте отдельно количества одно-, двух-, трёх- и четырёхбуквенных слов.

Ответ. $3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 120$.

Перейдём к следующему циклу задач.

Задача 11. В футбольной команде (11 человек) нужно выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Капитаном может стать любой из 11 футболистов. После выбора капитана на роль его заместителя могут претендовать 10 оставшихся человек. Таким образом, всего есть $11 \cdot 10 = 110$ разных вариантов выбора.

Эта задача отличается от предыдущих тем, что выбор капитана ограничивает круг претендентов на роль заместителя: капитан не может быть своим заместителем. Таким образом, выборы капитана и его заместителя не являются независимыми — такими, как, например, выборы чашки и блюдца в задаче 1.

Вот ещё четыре задачи на эту тему.

Задача 12. Сколькими способами можно сделать трёхцветный флаг с горизонтальными полосами одинаковой ширины, если имеется материя шести различных цветов?

Решение. Цвет для верхней полоски флага можно выбрать шестью разными способами. После этого для средней полоски флага остаётся пять возможных цветов, а затем для нижней полоски флага — четыре различных цвета. Таким образом, флаг можно сделать $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ способами.

Задача 13. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белую и чёрную ладьи так, чтобы они не били друг друга?

Решение. Белую ладью можно поставить на любую из 64 клеток. Независимо от своего расположения она бьёт 15 полей (включая поле, на котором она стоит). Поэтому остаётся 49 полей, на которые можно поставить чёрную ладью. Таким образом, всего есть $64 \cdot 49 = 3136$ разных способов.

Задача 14. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белого и чёрного королей так, чтобы получилась допустимая правилами игры позиция?

Решение. Белого короля можно поставить на любое из 64 полей. Однако количество полей, которые он при этом будет бить, зависит от его расположения. Поэтому необходимо разобрать три случая:

а) если белый король стоит в углу (углов всего 4), то он бьёт 4 поля (включая то, на котором стоит) и остаётся 60 полей, на которые можно поставить чёрного короля;

б) если белый король стоит на краю доски, но не в углу (таких полей — 24), то он бьёт 6 полей и для чёрного короля остаётся 58 возможных полей;

в) если же белый король стоит не на краю доски (таких полей — 36), то он бьёт 9 полей и для чёрного короля остаётся 55 возможных полей.

Таким образом, всего есть $4 \cdot 60 + 24 \cdot 58 + 36 \cdot 55 = 3612$ способов расстановки королей.

§ 2. Перестановки и кратный подсчёт

Займёмся теперь подсчётом числа способов, которыми можно расположить в ряд n предметов. Такие расположения называются перестановками и играют заметную роль в комбинаторике и алгебре. Но прежде необходимо сделать небольшое отступление.

Пусть n — натуральное число. Тогда $n!$ (читается «эн-факториал») — это произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Таким образом, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$.

Методические замечания. Перед тем как обсуждать перестановки, необходимо как следует освоить понятие факториала и научиться обращаться с ним. Для этого могут быть полезны следующие упражнения.

Упражнение 1. Запишите в виде факториала: а) $10! \cdot 11$; б) $n! \cdot (n+1)$.

Упражнение 2. Вычислите: а) $\frac{100!}{98!}$; б) $\frac{n!}{(n-1)!}$.

Следует иметь в виду, что для удобства написания некоторых комбинаторных тождеств принято считать $0!$ равным 1.

Вернёмся теперь к перестановкам.

Задача 15. Сколько существует трёхзначных чисел, в записи которых цифры 1, 2, 3 встречаются ровно по одному разу?

Решение. Будем рассуждать точно так же, как при решении задач предыдущего цикла. На первое место можно поставить любую из трёх цифр, на второе — любую из двух оставшихся, а на третье — последнюю оставшуюся цифру. Таким образом, всего получается $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$ чисел.

Задача 16. Сколькими способами можно выложить в ряд красный, чёрный, синий и зелёный шарики?

Решение. На первое место можно положить любой из четырёх шариков, на второе — любой из трёх оставшихся, на третье — любой из двух оставшихся, а на четвёртое — последний оставшийся шарик. Итак, ответ: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$.

Рассуждая так же, как при решении двух последних задач, легко доказать, что n разных предметов можно выложить в ряд

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

различными способами, т. е.

число перестановок из n элементов равно $n!$.

Для удобства формулировки задач следующего цикла введём соглашение. Словом будем называть любую конечную последовательность букв русского алфавита. Скажем, используя буквы А, Б, В ровно по одному разу, можно составить 6 слов: АБВ, АВБ, БАВ, БВА, ВАБ, ВБА; используя же букву А дважды, а букву Б один раз — три слова: ААБ, АБА, БАА. В следующих пяти задачах необходимо выяснить, сколько различных слов можно получить, переставляя буквы того или иного слова.

Задача 17. «ВЕКТОР».

Решение. Так как все буквы слова различны, всего можно получить $6!$ слов.

Задача 18. «ЛИНИЯ».

Решение. В этом слове две буквы И, а все остальные буквы разные. Временно будем считать разными и буквы И, обозначив их через $И_1$ и $И_2$. При этом предположении получится $5! = 120$ разных слов. Однако те слова, которые получаются друг из друга только перестановкой букв $И_1$ и $И_2$, на самом деле одинаковы. Таким образом, полученные 120 слов разбиваются на пары одинаковых. Поэтому разных слов всего $120 : 2 = 60$.

Задача 19. «ПАРАБОЛА».

Решение. Считая три буквы А этого слова различными ($А_1$, $А_2$, $А_3$), получим $8!$ разных слов. Однако слова, отличающиеся лишь перестановкой букв А, на самом деле одинаковы. Поскольку буквы $А_1$, $А_2$, $А_3$ можно переставлять $3!$ способами, все $8!$ слов разбиваются на группы по $3!$ одинаковых. Поэтому разных слов всего $\frac{8!}{3!}$.

Задача 20. «БИССЕКТРИСА».

Решение. В этом слове три буквы С и две буквы И. Считая все буквы различными, получаем $11!$ слов. Отождествляя слова, отличающиеся лишь перестановкой букв И, но не С, получаем $\frac{11!}{2!}$ различных слов. Отождествляя теперь слова, отличающиеся перестановкой букв С, получаем окончательный результат: $\frac{11!}{2!\cdot 3!}$.

Задача 21. «МАТЕМАТИКА».

Ответ. $\frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 2!}$.

Цикл задач про слова продемонстрировал одно содержательное комбинаторное соображение — идею кратного подсчёта. Вместо подсчёта числа интересующих нас объектов иногда бывает удобно пересчитывать другие объекты, количество которых превосходит количество исходных в известное число раз.

Вот ещё четыре задачи, при решении которых используется этот приём.

Задача 22. В стране 20 городов, каждые два из которых соединены авиалинией. Сколько авиалиний в этой стране?

Решение. Каждая авиалиния соединяет два города. В качестве первого города можно взять любой из 20 городов (город A), а в качестве второго — любой из 19 оставшихся (город B). Перемножив эти числа, получаем $20 \cdot 19 = 380$. Однако при этом подсчёте каждая авиалиния учтена дважды (первый раз, когда в качестве первого города был выбран город A, а второго — город B, а второй раз — наоборот). Таким образом, число авиалиний равно $380 : 2 = 190$.

Хотелось бы отметить, что подобная задача обсуждается и в главе «Графы» при подсчёте числа рёбер графа.

Задача 23. Сколько диагоналей в выпуклом n-угольнике?

Решение. В качестве первого конца диагонали можно взять любую из n вершин, а в качестве второго — любую из $n-3$ вершин, отличных от выбранной и двух соседних с ней (рис. 10). При этом подсчёте каждая диагональ учитывается дважды.

Ответ. $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

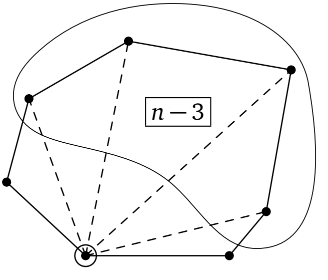

Рис. 10

Задача 24. Бусы — это кольцо, на которое нанизаны бусины. Бусы можно поворачивать, но не переворачивать. Сколько различных бус можно сделать из 13 разноцветных бусин?

Решение. Представим себе на время, что бусы нельзя поворачивать. Тогда их можно сделать 13! различными способами. Однако любое расположение бусин и 12 вариантов, получающихся из него поворотами, следует считать одним и тем же вариантом бус (рис. 11).

Ответ. $\dfrac{13!}{13} = 12!$.

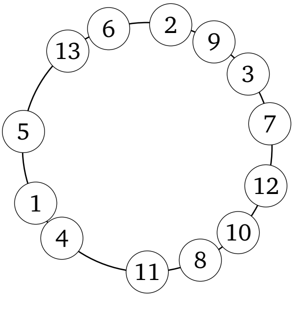

Рис. 11

Задача 25. Предположим теперь, что бусы можно и переворачивать. Сколько тогда различных бус можно сделать из 13 разноцветных бусин?

Решение. Перевороты сокращают количество бус в 2 раза.

Ответ. $12!/2$.

Следующая задача иллюстрирует ещё одно важное комбинаторное соображение.

Задача 26. Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна чётная цифра?

Решение. Вместо того чтобы подсчитывать количество требуемых шестизначных чисел, определим количество шестизначных чисел, не обладающих нужным свойством. Так как это в точности те числа, в записи которых встречаются только нечётные цифры, их количество, очевидно, равно $5^6 = 15625$. Всего шестизначных чисел 900000. Поэтому количество шестизначных чисел, обладающих указанным свойством, равно $900000 - 15625 = 884375$.

Основным моментом при решении этой задачи был так называемый переход к дополнению: подсчёт «ненужных» вариантов вместо подсчёта «нужных». Вот ещё одна задача, при решении которой полезно использовать это соображение.

Задача 27. В алфавите племени Бум-Бум шесть букв. Словом является любая последовательность из шести букв, в которой есть хотя бы две одинаковые буквы. Сколько слов в языке племени Бум-Бум?

Ответ. $6^6 - 6!$.

> ***Для преподавателей.*** В заключение хотелось бы отметить, что идее, объединяющей задачи каждого выделенного в главе цикла, естественно посвящать отдельное занятие. При этом необходимо всё время возвращаться к уже пройденному материалу. Поэтому мы приводим дополнительный список задач для самостоятельного решения. Кроме того, источниками задач могут быть книга [70] и фантазия преподавателя.

§ 3. Дополнительные задачи

Задача 28. В киоске «Союзпечать» продаются 5 видов конвертов и 4 вида марок. Сколькими способами можно купить конверт с маркой?

Задача 29. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова «КРУЖОК»?

Задача 30. На доске написаны 7 существительных, 5 глаголов и 2 прилагательных. Для предложения нужно выбрать по одному слову каждой из этих частей речи. Сколькими способами это можно сделать?

Задача 31. У двух начинающих коллекционеров по 20 марок и по 10 значков. Честным обменом называется обмен одной марки на одну марку или одного значка на один значок. Сколькими способами коллекционеры могут осуществить честный обмен?

Задача 32. Сколько существует шестизначных чисел, все цифры которых имеют одинаковую чётность?

Задача 33. Надо послать 6 срочных писем. Сколькими способами это можно сделать, если для передачи писем можно использовать трёх курьеров и каждое письмо можно дать любому из курьеров?

Задача 34. Сколькими способами из полной колоды (52 карты) можно выбрать 4 карты разных мастей и достоинств?

Задача 35. На полке стоят 5 книг. Сколькими способами можно выложить в стопку несколько из них (стопка может состоять и из одной книги)?

Задача 36. Сколькими способами можно поставить 8 ладей на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга?

Задача 37. На танцплощадке собрались N юношей и N девушек. Сколькими способами они могут разбиться на пары для участия в очередном танце?

Задача 38. Чемпионат России по шахматам проводится в один круг. Сколько играется партий, если участвуют 18 шахматистов?

Задача 39. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску а) две ладьи; б) двух королей; в) двух слонов; г) двух коней; д) двух ферзей так, чтобы они не били друг друга?

Задача 40. У мамы два яблока, три груши и четыре апельсина. Каждый день в течение девяти дней подряд она даёт сыну один из оставшихся фруктов. Сколькими способами это может быть сделано?

Задача 41. Сколькими способами можно поселить 7 студентов в три комнаты: одноместную, двухместную и четырёхместную?

Задача 42. Сколькими способами можно расставить на первой горизонтали шахматной доски комплект белых фигур (король, ферзь, две ладьи, два слона и два коня)?

Задача 43. Сколько слов можно составить из пяти букв А и не более чем из трёх букв Б?

Задача 44. Сколько существует 10-значных чисел, в записи которых имеется хотя бы две одинаковые цифры?

Задача 45*. Каких 7-значных чисел больше: тех, в записи которых есть 1, или остальных?

Задача 46. Кубик бросают трижды. Среди всех возможных последовательностей результатов есть такие, в которых хотя бы один раз встречается шестёрка. Сколько их?

Задача 47. Сколькими способами можно разбить 14 человек на пары?

Задача 48*. Сколько существует 9-значных чисел, сумма цифр которых чётна?