

Содержание

Предисловие	6
1. АЛГЕБРА	7
1.1. Преобразование числовых выражений и выражений с переменными	7
1.2. Уравнения	16
1.2.1. Рациональные уравнения	16
1.2.2. Иррациональные уравнения	24
1.2.3. Показательные уравнения	26
1.2.4. Логарифмические уравнения	29
1.2.5. Тригонометрические уравнения	33
1.2.6. Общие принципы решения уравнений с одинаковыми компонентами действий	42
1.3. Неравенства	45
1.3.1. Рациональные неравенства	45
1.3.2. Показательные неравенства	61
1.3.3. Логарифмические неравенства	69
1.4. Задания с параметрами	87
1.5. Текстовые задачи	97
1.5.1. Решение текстовых задач арифметическим методом	97
1.5.2. Решение текстовых задач алгебраическим методом	100
1.5.3. Решение текстовых задач графическим методом	125
1.5.4. Задачи на оптимальный выбор	129
1.5.5. Задачи на арифметическую прогрессию	143
1.6. Прикладные задачи из разных областей науки	148

2. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА	163
2.1. Анализ графиков	163
2.2. Функция и её производная	183
2.2. Применение производной к исследованию функций. . .	190
2.3. Примеры использования производной для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально-экономических задачах	210
2.4. Первообразная.	218
3. ГЕОМЕТРИЯ (ПЛАНИМЕТРИЯ)	225
3.1. Треугольники	225
3.2. Четырёхугольники	235
3.2.1. Параллелограмм.	235
3.2.2. Трапеция	241
3.3. Окружность	251
3.4. Площади фигур на плоскости	261
4. ГЕОМЕТРИЯ (СТЕРЕОМЕТРИЯ)	269
4.1. Многогранники	269
4.1.1. Призма	269
4.1.2. Пирамида	272
4.2. Тела вращения	284
4.3. Объёмы	292
4.3.1. Объёмы многогранников	292
4.3.2. Объёмы фигур вращения	298
4.4. Метод координат в пространстве	306
5. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ	314

6. БАНКОВСКИЕ ЗАДАЧИ	325
6.1. Задачи на кредиты	325
6.2. Задачи на банковские вклады (депозиты)	346
7. НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ	351
7.1. Решение уравнений и задач в целых числах	351
7.2. Задачи на логику	365
7.3. Задачи на смекалку	372
8. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ	380
ОТВЕТЫ	385

Предисловие

Сборник содержит учебный материал, необходимый для овладения навыками правильного и быстрого решения самых сложных заданий единого государственного экзамена по математике базового и профильного уровней.

Понятие «сложные задания» неоднозначно: кто-то испытывает трудности в выполнении текстовых задач, а кто-то не уверен в своём знании стереометрии. В этой книге авторы объясняют сложное простым языком, чтобы облегчить понимание математических законов и легко справиться с любыми экзаменационными заданиями.

Данное учебное пособие не только позволит проверить и закрепить знания и умения, полученные выпускниками средней школы при изучении математики, но и создать возможности для индивидуализации и дифференциации самого процесса подготовки к ЕГЭ, благодаря имеющейся системе заданий, различающихся по форме и уровню сложности.

Задания в сборнике сгруппированы тематически в соответствии с кодификатором элементов содержания ЕГЭ. Рядом с каждым примером указан уровень сложности: П — профильный, Б — базовый.

Для каждого типа заданий в пособии даётся его разбор, вариант решения, блок тренировочных задач для самостоятельной работы и ответы к ним.

В связи с возможными изменениями в формате и количестве заданий рекомендуем в процессе подготовки к экзамену обращаться к материалам сайта официального разработчика экзаменационных заданий — Федерального института педагогических измерений: www.fipi.ru

Желаем успешной сдачи ЕГЭ по математике!

Авторы

1. АЛГЕБРА

1.1. Преобразование числовых выражений и выражений с переменными

Пример 1 (П)

Вычислите значение выражения $\frac{14}{\cos\left(\frac{47\pi}{4}\right) \sin\left(-\frac{39\pi}{4}\right)}$.

Решение.

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{47\pi}{4}\right) &= \cos\left(\frac{48\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(12\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sin\left(-\frac{39\pi}{4}\right) &= -\sin\left(\frac{39\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{40\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(10\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Подставим получившиеся значение в данное выражение

$$\frac{14}{\cos\left(\frac{47\pi}{4}\right) \sin\left(-\frac{39\pi}{4}\right)} = \frac{14}{\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}} = 14 : \frac{1}{2} = 14 \cdot 2 = 28.$$

Ответ: 28.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислите значение выражения $\frac{48}{\cos\left(\frac{35\pi}{6}\right) \sin\left(-\frac{25\pi}{3}\right)}$.

2. Вычислите значение выражения $\frac{11}{\cos\left(\frac{19\pi}{3}\right) \sin\left(-\frac{37\pi}{6}\right)}$.

3. Вычислите значение выражения $\frac{59}{\cos\left(\frac{27\pi}{4}\right) \sin\left(-\frac{27\pi}{4}\right)}$.

4. Вычислите значение выражения $\frac{44}{\cos\left(\frac{35\pi}{3}\right) \sin\left(-\frac{25\pi}{6}\right)}$.

5. Вычислите значение выражения $\frac{36}{\cos\left(\frac{31\pi}{6}\right) \sin\left(-\frac{25\pi}{3}\right)}$.

Пример 2 (П)

Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$ и $\alpha \in (0, 5\pi; \pi)$.

Решение.

I способ.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2 = 1 - \frac{9}{13} = \frac{4}{13};$$

$$\cos \alpha < 0, \text{ т. к. } \alpha \in (0, 5\pi; \pi); \cos \alpha = -\sqrt{\frac{4}{13}} = -\frac{2}{\sqrt{13}};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{\sqrt{13}} : \left(-\frac{2}{\sqrt{13}}\right) = -\frac{3}{2} = -1,5.$$

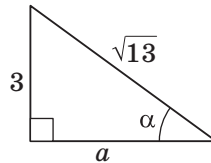
II способ.

Секреты ЕГЭ

$\operatorname{tg} \alpha < 0, \alpha \in (0, 5\pi; \pi);$

$$a = \sqrt{(\sqrt{13})^2 - 3^2} = \sqrt{13 - 9} = \sqrt{4} = 2;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{2} = -1,5.$$



Ответ: $-1,5$.

Задачи для самостоятельного решения

6. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{29}}$ и $\alpha \in (0; 0,5\pi)$.

7. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = -\frac{7}{\sqrt{65}}$ и $\alpha \in (1,5\pi; 2\pi)$.

8. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = -\frac{5}{\sqrt{26}}$ и $\alpha \in (\pi; 1,5\pi)$.

9. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{6}{\sqrt{61}}$ и $\alpha \in (0,5\pi; \pi)$.

10. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{41}}$ и $\alpha \in (0,5\pi; \pi)$.

Пример 3 (П)

Найдите значение выражения $\frac{18\sin 158^\circ}{\cos 79^\circ \cos 11^\circ}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{18\sin 158^\circ}{\cos 79^\circ \cos 11^\circ} &= \frac{18\sin 2 \cdot 79^\circ}{\cos 79^\circ \cos 11^\circ} = \frac{36\sin 79^\circ \cos 79^\circ}{\cos 79^\circ \cos 11^\circ} = \frac{36\sin 79^\circ}{\cos 11^\circ} = \\ &= \frac{36\sin (90^\circ - 11^\circ)}{\cos 11^\circ} = \frac{36\cos 11^\circ}{\cos 11^\circ} = 36. \end{aligned}$$

Ответ: 36.

Задачи для самостоятельного решения

11. Найдите значение выражения $\frac{5\sin 12^\circ}{\cos 6^\circ \cos 84^\circ}$.

12. Найдите значение выражения $\frac{20\sin 106^\circ}{\cos 53^\circ \cos 37^\circ}$.

13. Найдите значение выражения $\frac{-3\sin 74^\circ}{\cos 37^\circ \cos 53^\circ}$.

14. Найдите значение выражения $\frac{7\sin 8^\circ}{\cos 4^\circ \cos 86^\circ}$.

15. Найдите значение выражения $\frac{-19\sin 154^\circ}{\cos 77^\circ \cos 13^\circ}$.

Пример 4 (П)

Найдите значение выражения $\sqrt{48} - \sqrt{192} \sin^2 \frac{13\pi}{12}$.

Решение. Заметим, что $192 = 4 \cdot 48$ и $1 - 2\sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$.

$$\begin{aligned} \sqrt{48} - \sqrt{192} \sin^2 \frac{13\pi}{12} &= \sqrt{48} \left(1 - 2\sin^2 \frac{13\pi}{12} \right) = \sqrt{48} \cos \left(2 \cdot \frac{13\pi}{12} \right) = \\ &= \sqrt{48} \cos \frac{13\pi}{6} = \sqrt{48} \cos \left(2\pi + \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{48} \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{48} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6. \end{aligned}$$

Ответ: 6.

Задачи для самостоятельного решения

16. Найдите значение выражения $\sqrt{8} - \sqrt{32} \sin^2 \frac{\pi}{8}$.

17. Найдите значение выражения $\sqrt{72} - \sqrt{288} \sin^2 \frac{21\pi}{8}$.

18. Найдите значение выражения $\sqrt{18} - \sqrt{72} \sin^2 \frac{7\pi}{8}$.

19. Найдите значение выражения $\sqrt{27} - \sqrt{108} \sin^2 \frac{23\pi}{12}$.

20. Найдите значение выражения $\sqrt{50} - \sqrt{200} \sin^2 \frac{11\pi}{8}$.

Пример 5 (Б)

Найдите $\operatorname{tg} x$, если $\cos x = -\frac{5}{\sqrt{34}}$ и $90^\circ < x < 180^\circ$.

Дано: $\cos x = -\frac{5}{\sqrt{34}}$ и $90^\circ < x < 180^\circ$.

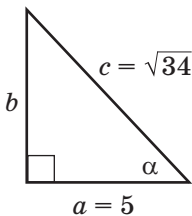
Найти: $\operatorname{tg} x$.

Решение.

Определим знак $\operatorname{tg} x$. Так как $90^\circ < x < 180^\circ$, то $\operatorname{tg} x < 0$.

Найдём значение $\operatorname{tg} x$ с помощью прямоугольного треугольника.

$$\cos \alpha = \frac{a}{c} = \frac{5}{\sqrt{34}}.$$



$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(\sqrt{34})^2 - 5^2} = \sqrt{34 - 25} = \sqrt{9} = 3.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} = \frac{3}{5} = 0,6; \operatorname{tg} x = -0,6.$$

Ответ: $-0,6$.

Задачи для самостоятельного решения

21. Вычислите значение выражения $-7\sqrt{3} \sin 1500^\circ$.

22. Вычислите значение выражения $3\sqrt{2} \cos 1125^\circ$.

23. Вычислите значение выражения $-68 \operatorname{tg} 585^\circ$.

24. Вычислите значение выражения $-4 \sin 570^\circ$.

25. Вычислите значение выражения $14 \cos 2220^\circ$.

Пример 6 (П)

Найдите значение выражения $\frac{\log_7 5}{\log_7 9} + \log_9 0,2$.

Решение.

Воспользуемся формулой перехода к новому основанию

$$\frac{\log_7 5}{\log_7 9} + \log_9 0,2 = \log_9 5 + \log_9 0,2 = \log_9 5 \cdot 0,2 = \log_9 1 = 0.$$

Ответ: 0.

Задачи для самостоятельного решения

26. Найдите значение выражения $\frac{\log_{2020} 5}{\log_{2020} 8} + \log_8 0,2$.

27. Найдите значение выражения $\frac{\log_9 2}{\log_9 4} + \log_4 0,5$.

28. Найдите значение выражения $\frac{\log_5 4}{\log_5 9} + \log_9 0,25$.

29. Найдите значение выражения $\frac{\log_{11} 8}{\log_{11} 12} + \log_{12} 0,125$.

30. Найдите значение выражения $\frac{\log_7 20}{\log_7 13} + \log_{13} 0,05$

Пример 7 (П)

Найдите значение выражения $\log_a (ab^3)$, если $\log_b a = \frac{3}{14}$.

Решение.

Поскольку логарифм произведения двух чисел равен сумме логарифмов этих чисел по тому же основанию, получим:

$$\log_a (ab^3) = \log_a a + \log_a b^3 = 1 + \log_a b^3.$$

А далее применяем формулы:

$$\log_a b^k = k \log_a b \text{ и } \log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \text{ находим}$$

$$1 + \log_a b^3 = 1 + 3 \log_a b = 1 + \frac{3}{\log_b a} = 1 + 3 : \frac{3}{14} = 1 + \frac{3 \cdot 14}{3} = 1 + 14 = 15.$$

Ответ: 15.

Задачи для самостоятельного решения

31. Найдите значение выражения $\log_a(ab^3)$, если $\log_b a = \frac{1}{5}$.
32. Найдите значение выражения $\log_a(a^3b^{10})$, если $\log_b a = \frac{5}{13}$.
33. Найдите значение выражения $\log_a(a^6b)$, если $\log_b a = \frac{3}{17}$.
34. Найдите значение выражения $\log_a(a^7b^9)$, если $\log_b a = \frac{1}{3}$.
35. Найдите значение выражения $\log_a(a^6b^8)$, если $\log_b a = \frac{2}{5}$.

Пример 8 (П)

Найдите значение выражения $(1 - \log_6 24)(1 - \log_4 24)$.

Решение.

$$\begin{aligned}(1 - \log_6 24)(1 - \log_4 24) &= (1 - \log_6 6 \cdot 4)(1 - \log_4 4 \cdot 6) = \\ &= (1 - (\log_6 6 + \log_6 4))(1 - (\log_4 4 + \log_4 6)) = \\ &= (1 - 1 - \log_6 4)(1 - 1 - \log_4 6) = -\log_6 4 \cdot (-\log_4 6) = 1\end{aligned}$$

Ответ: 1.

Задачи для самостоятельного решения

36. Найдите значение выражения $(1 - \log_5 15)(1 - \log_3 15)$.
37. Найдите значение выражения $(1 - \log_7 56)(1 - \log_8 56)$.
38. Найдите значение выражения $(1 - \log_9 36)(1 - \log_4 36)$.
39. Найдите значение выражения $(1 - \log_7 105)(1 - \log_{15} 105)$.
40. Найдите значение выражения $(1 - \log_5 45)(1 - \log_9 45)$.

Пример 9 (П)

Найдите $p(x) + p(22 - x)$, если $p(x) = \frac{x(22 - x)}{x - 11}$, при $x \neq 11$.

Решение.

Так как значение выражения не зависит от значения переменной x , то подставим $x = 0$.

$$p(x) + p(22 - x) = p(0) + p(22) = \frac{0(22 - 0)}{0 - 11} + \frac{22(22 - 22)}{22 - 11} = 0 + 0 = 0.$$

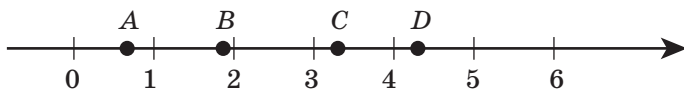
Ответ: 0.

Задачи для самостоятельного решения

41. Найдите $p(x) + p(6 - x)$, если $p(x) = \frac{x(6 - x)}{x - 13}$, при $x \neq 3$.
42. Найдите $p(x) + p(-22 - x)$, если $p(x) = \frac{x(-22 - x)}{x + 11}$, при $x \neq -11$.
43. Найдите $p(x) + p(10 - x)$, если $p(x) = \frac{x(10 - x)}{x - 5}$, при $x \neq 5$.
44. Найдите $p(x) + p(24 - x)$, если $p(x) = \frac{x(24 - x)}{x - 12}$, при $x \neq 12$.
45. Найдите $p(x) + p(-14 - x)$, если $p(x) = \frac{x(-14 - x)}{x + 7}$, при $x \neq -7$.

Пример 10 (Б)

На прямой отмечены точки A, B, C, D .



Каждой точке соответствует одно из чисел из правого столбца. Установите соответствие между указанными точками и числами.

ТОЧКИ	ЧИСЛА
A	1) $\log_3 2$
B	2) $\frac{30}{7}$
C	3) $\sqrt{3,5}$
D	4) $\left(\frac{3}{10}\right)^{-1}$

Решение.

$$\log_3 1 < \log_3 2 < \log_3 3;$$

$0 < \log_3 2 < 1$ — соответствует точке A .

$$\frac{30}{7} = 4\frac{2}{7}; 4 < \frac{30}{7} < 5 \text{ — соответствует точке } D.$$

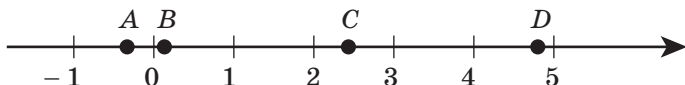
$$\sqrt{1} < \sqrt{3,5} < \sqrt{4}; 1 < \sqrt{3,5} < 2 \text{ — соответствует } B.$$

$$\left(\frac{3}{10}\right)^{-1} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}; 3 < 3\frac{1}{3} < 4 \text{ — соответствует } C.$$

Ответ: 1342.

Задачи для самостоятельного решения

46. На прямой отмечены точки A, B, C, D .



Каждой точке соответствует одно из чисел из правого столбца. Установите соответствие между указанными точками и числами.

ТОЧКИ	ЧИСЛА
A	1) $\log_7 0,5$
B	2) $\frac{18}{7}$
C	3) $\sqrt{23,3}$
D	4) $\left(\frac{23}{3}\right)^{-1}$

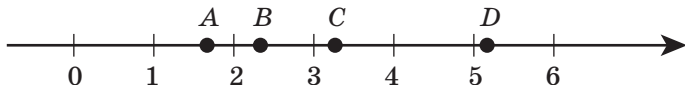
47. На прямой отмечены точки A, B, C, D .



Каждой точке соответствует одно из чисел из правого столбца. Установите соответствие между указанными точками и числами.

ТОЧКИ	ЧИСЛА
A	1) $\log_5 7$
B	2) $\frac{17}{6}$
C	3) $\sqrt{0,6}$
D	4) $\left(\frac{2}{9}\right)^{-1}$

48. На прямой отмечены точки A, B, C, D .



Каждой точке соответствует одно из чисел из правого столбца. Установите соответствие между указанными точками и числами.

ТОЧКИ

A

B

C

D

ЧИСЛА

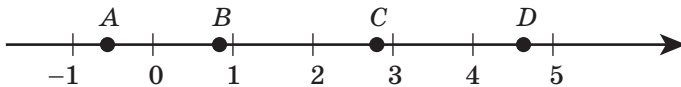
1) $\log_2 10$

2) $\frac{7}{3}$

3) $\sqrt{27}$

4) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}$

49. На прямой отмечены точки A, B, C, D.



Каждой точке соответствует одно из чисел из правого столбца. Установите соответствие между указанными точками и числами.

ТОЧКИ

A

B

C

D

ЧИСЛА

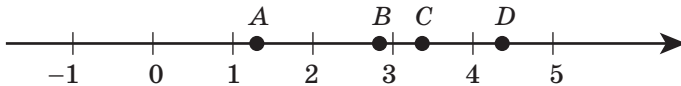
1) $\log_4 0,6$

2) $\frac{50}{11}$

3) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$

4) $\sqrt{0,7}$

50. На прямой отмечены точки A, B, C, D.



Каждой точке соответствует одно из чисел из правого столбца. Установите соответствие между указанными точками и числами.

ТОЧКИ

A

B

C

D

ЧИСЛА

1) $\log_2 19$

2) $\frac{4}{3}$

3) $\sqrt{11,5}$

4) $\left(\frac{7}{20}\right)^{-1}$