УДК 517.9
ББК 22.161.1
Р69

Романко В. К.

Р69 Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления / В. К. Романко. — 5-е изд. — М. : Лаборатория знаний, 2019. — 346 с. : ил.

ISBN 978-5-00101-200-9

В пособии изложены основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных первого порядка и вариационного исчисления. Наряду с изложением традиционных разделов курса обыкновенных дифференциальных уравнений, в книге рассмотрены и некоторые нетрадиционные вопросы (граничные задачи, уравнения с малым параметром, нелинейные уравнения в частных производных первого порядка, вариационная задача Больца и др.).

Многочисленные примеры иллюстрируют рассматриваемые теоретические положения.

Для студентов высших учебных заведений.

УДК 517.9
ББК 22.161.1

Учебное издание

Романко Василий Кириллович

КУРС ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Ведущий редактор *М. С. Стригунова*
Художник *В. А. Прокудин*
Оригинал-макет подготовлен в пакете $\LaTeX\,2_\varepsilon$

Подписано в печать 16.04.19. Формат 70×100/16.
Усл. печ. л. 28,60. Заказ

Издательство «Лаборатория знаний»
125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (499) 157-5272
e-mail: info@pilotLZ.ru, http://www.pilotLZ.ru

ISBN 978-5-00101-200-9

Оглавление

Предисловие

Данная книга имеет целью, с одной стороны, дать читателю минимум знаний по классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений и классическому вариационному исчислению, необходимых для их успешного применения в различных практических приложениях, а с другой стороны, подвести читателя к пониманию задач и методов их решения современной теории дифференциальных уравнений и вариационного исчисления.

Книга написана на основе курса лекций, который автор читал в Московском физико-техническом институте (МФТИ) на протяжении многих лет. Книга отражает не только личную точку зрения автора, но в определенной степени и коллективный опыт преподавания теории дифференциальных уравнений и вариационного исчисления на кафедре высшей математики МФТИ. Этот опыт основан на базе повышенных курсов математического анализа и линейной алгебры, читаемых в МФТИ.

Оглавление и введение дают первоначальное представление о принципах построения курса, об отборе материала и о содержании книги в целом. В первых трех главах изложены методы получения точных решений основных типов дифференциальных уравнений. В последующих главах (4–8) основной акцент сделан на качественном исследовании решений дифференциальных уравнений. В главе 9 изложены основы классического вариационного исчисления. Книга содержит решения многочисленных примеров. Упражнения к каждой главе позволяют читателям закрепить свои знания материала.

В списке литературы читатель найдет перечень книг, в которых затронутые в настоящей книге вопросы излагаются, может быть, по-иному или более полным образом. Отдавая себе отчет в том, что настоящий курс не свободен от недостатков, мы будем благодарны всем читателям, приславшим свои замечания и пожелания по его улучшению.

Автор выражает искреннюю благодарность Н. Х. Агаханову, который внимательно прочитал рукопись и сделал ряд полезных замечаний.

Некоторые обозначения

N	— множество натуральных чисел
$\exists$, $\forall$	— существует, для всякого
$\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$	— следует, эквивалентно
$k=\overline{1,n}$	— индекс k пробегает все целые значения между 1 и n
R_x^n	— евклидово пространство с декартовыми прямоугольными координатами $x_1, \ldots, x_n$
$\|a_{ij}\|$, $i,j=\overline{1,n}$,	— квадратная матрица порядка n из элементов a_{ij}
$\mathbb{C}(X)$	— множество всех непрерывных функций, заданных на промежутке X числовой оси R_x^1
$\mathbb{C}(G)$	— множество всех непрерывных функций, заданных в области $G \subseteq R_x^n$
$\mathbb{C}^k(X)$	— множество всех $k \geq 1$ раз непрерывно дифференцируемых функций на промежутке $X \subseteq R_x^1$
$\mathbb{C}^k(G)$	— множество всех $k \geq 1$ раз непрерывно дифференцируемых функций в области $G \subseteq R_x^n$
○	— начало доказательства утверждения
●	— конец доказательства утверждения
△	— начало решения примера
▲	— конец решения примера

Введение

Общепризнано, что метод построения математических моделей является наиболее эффективным методом изучения различных явлений природы. В большинстве случаев не удается установить формулу прямой зависимости между собой различных характеристик рассматриваемого физического, биологического, химического, экономического или какого-нибудь другого динамического процесса. Однако часто удается составить определенную функциональную зависимость между неизвестными характеристиками рассматриваемого процесса, скоростями их изменения и временем, т. е. найти уравнения, содержащие производные неизвестных характеристик процесса. В таком случае говорят, что математической моделью процесса является дифференциальное уравнение.

Простейший пример дифференциального уравнения дает, например, задача о нахождении закона движения материальной точки по заданной скорости ее движения. Если $S(t)$ — неизвестный путь, пройденный точкой за время t, и $v(t)$ — заданная скорость ее движения в момент времени t, то получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dS(t)}{dt} = v(t). \tag{1}$$

Как следует из курса анализа, в случае, когда, например, $v(t)$ — заданная непрерывная функция $t \geq 0$, все решения уравнения (1) задаются формулой

$$S(t) = \int\limits_0^t v(\tau)d\tau + C, \tag{2}$$

где C — произвольная действительная постоянная.

Исследования разрушения биологических клеток под действием ультразвука высокой интенсивности приводят к дифференциальному уравнению вида

$$\frac{dN(t)}{dt} = -RN(t), \tag{3}$$

где t — время, $N(t)$ — концентрация живых клеток, R — постоянная, определяющая вероятность разрыва клетки в единицу времени. Нетрудно проверить, что решениями уравнения (3) будут функции

$$N(t) = Ce^{-Rt}, \tag{4}$$

где C — произвольная постоянная.

Еще один пример дифференциального уравнения можно получить, рассмотрев, например, задачу о колебании шарика, подвешенного на пружине и выведенного из положения равновесия. Если обозначить отклонение шарика от положения равновесия в момент времени t через $x(t)$ и воспользоваться вторым законом Ньютона, то уравнение движения шарика можно записать в виде

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0, \tag{5}$$

где $\omega > 0$ — некоторое заданное число.

Дифференциальное уравнение вида (5) называется уравнением гармонических колебаний или уравнением линейного осциллятора. Как будет в дальнейшем установлено, все решения уравнения (5) задаются формулой

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi), \tag{6}$$

где A и φ — произвольные постоянные.

Опыт показывает, что разные по содержанию задачи могут приводить к одинаковым дифференциальным уравнениям. Использование дифференциальных уравнений в качестве модели некоторого процесса в природе, как уже видно из приведенных примеров, удобно в том смысле, что эти уравнения описывают эволюцию процесса во времени и характер возможных изменений процесса в зависимости от его первоначального состояния.

Если в дифференциальном уравнении неизвестная функция является функцией одной независимой переменной, то уравнение называется обыкновенным дифференциальным уравнением. Если же неизвестная функция, входящая в дифференциальное уравнение, является функцией двух или большего числа независимых переменных, то дифференциальное уравнение называется уравнением в частных производных. Считая x независимой переменной и $y = y(x)$ — неизвестной функцией, обыкновенное дифференциальное уравнение в общем случае можно записать в виде соотношения

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \tag{7}$$

где F — заданная функция своих аргументов. Порядок старшей производной, входящей в уравнение (7), называется порядком обыкновенного дифференциального уравнения (7). Таким образом, уравнение (7) имеет порядок n, уравнения (1) и (3) имеют первый порядок, а уравнение (5) — это уравнение второго порядка.

Если дифференциальное уравнение (7) разрешимо, то, как видно из уже приведенных примеров, оно имеет, как правило, бесчисленное множество решений. Поэтому, решив дифференциальное уравнение, описывающее некоторый процесс во времени, нельзя еще указать однозначно зависимость от времени характеристики процесса, удовлетворяющей этому уравнению. Нужны дополнительные условия. На практике чаще всего в качестве дополнительных условий выступают некоторые начальные условия. Так, например, однозначное решение уравнения (1) можно получить, задав начальное положение точки:

$$S(0) = S_0.$$

Тогда из формулы (2) находим $C = S_0$ и, значит, формула

$$S(t) = \int_0^t v(\tau)d\tau + S_0$$

однозначно определяет закон движения точки. Задав для уравнения (3) начальную концентрацию клеток в момент времени t_0

$$N(t_0) = N_0,$$

из формулы (4) находим $C = N_0 e^{Rt_0}$. Следовательно, концентрация клеток в каждый момент t однозначно задается формулой

$$N(t) = N_0 e^{R(t_0 - t)}.$$

Наконец, задав при $t = 0$ начальное отклонение и начальную скорость шарика

$$x(0) = x_0, \quad \frac{dx(0)}{dt} = v_0,$$

из формулы (6) можно найти постоянные A, φ и тем самым однозначно определить заданное колебание шарика. Возможны и другие типы дополнительных условий, выделяющих конкретное решение дифференциального уравнения. Например, это могут быть заданные значения решения $x(t)$ уравнения (5) при двух фиксированных моментах времени t_1, t_2: $x(t_1) = x_1$, $x(t_2) = x_2$, или условие периодичности для решения уравнения (3)

$$N(0) = N(T), \quad T > 0.$$

Это примеры так называемых граничных условий для уравнений (5) и (3). Но для них не всегда можно гарантировать единственность решения.

Для практических приложений дифференциальных уравнений очень важен вопрос о характере зависимости решения дифференциального уравнения (7) от функции F и от дополнительных условий (начальных или граничных) при их малом изменении. Ведь в прикладных задачах и само дифференциальное уравнение и дополнительные условия неизбежно определяются с некоторой погрешностью, так как при их составлении всегда приходится пренебрегать несущественными для рассматриваемого процесса факторами. Для практики целесообразны только такие дифференциальные уравнения и дополнительные условия, при малом изменении которых мало изменяется определяемое ими решение. Другими словами, должна быть непрерывная зависимость решения рассматриваемой задачи от исходных данных.

Из сказанного ясно, что одними из главных вопросов теории дифференциальных уравнений являются вопросы существования, единственности и непрерывной зависимости от исходных данных решения дифференциального уравнения при заданных дополнительных условиях. Кроме этих вопросов, теория дифференциальных уравнений изучает качественные свойства и методы решения дифференциальных уравнений различных типов и некоторые другие вопросы. Отметим, что лишь для сравнительно небольшого числа дифференциальных уравнений решение можно записать в виде некоторой формулы. Поэтому, наряду с методами нахождения точных решений, в теории дифференциальных уравнений важное значение имеют методы построения приближенных решений дифференциальных уравнений: численные методы решения и асимптотические методы решения. Численным и асимптотическим методам решения уравнений в настоящей книге из-за недостатка места уделяется мало внимания. Более подробно о них можно прочитать, например, в [43], [45], [11].

Теория дифференциальных уравнений является важной для практических приложений и самостоятельной ветвью математического анализа, которая продолжает успешно развиваться. Знание основных положений этой теории абсолютно необходимо при использовании математических методов в различных областях человеческой деятельности. Кроме основных фактов теории обыкновенных дифференциальных уравнений, в настоящую книгу включены основы теории дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка и основы вариационного исчисления. Примеры из практики, приведенные, например, в [43] и [26], показывают, что уравнения в частных производных первого порядка встречаются в различных областях знаний. Методы решения таких уравнений тесно связаны с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений. Этим объясняется включение в книгу уравнений в частных производных первого порядка.

Некоторые задачи вариационного исчисления приводят к соответствующим задачам теории дифференциальных уравнений и наоборот. Поэтому существует тесная связь между вариационным исчислением и теорией дифференциальных уравнений. С другой стороны, вариационное исчисление является самостоятельной и успешно развивающейся ветвью математического анализа. О примерах вариационных задач и о значении вариационного исчисления для практических приложений рассказано во введении к главе 9.

Глава 1

Методы решения некоторых дифференциальных уравнений

Предполагается, что все функции, рассматриваемые в этой главе, принимают только действительные значения и что произвольные постоянные являются действительными.

§ 1. Основные понятия для дифференциальных уравнений первого порядка

Обозначим через $R^2_{(x,y)}$ евклидову плоскость с фиксированной декартовой прямоугольной системой координат x, y. Пусть G — непустая область, лежащая в $R^2_{(x,y)}$ и пусть $f(x,y)$ — некоторая заданная непрерывная функция в области G.

Изучение теории обыкновенных дифференциальных уравнений начнем с дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной

$$y' = f(x, y). \tag{1}$$

Здесь x — независимая переменная (аргумент), а $y = y(x)$ — неизвестная функция. Уравнение (1) принято еще называть дифференциальным уравнением первого порядка в нормальной форме.

Определим понятие решения дифференциального уравнения (1). Пусть X обозначает некоторый промежуток числовой прямой R^1_x с декартовой координатой x. Промежуток X может представлять собой либо отрезок оси R^1_x, либо (ограниченный или неограниченный) интервал оси R^1_x, либо (ограниченный или неограниченный) полуинтервал оси R^1_x.

Определение. Функция $y = \varphi(x)$, определенная на промежутке X, называется решением дифференциального уравнения (1), если

1) $\varphi(x)$ имеет непрерывную производную $\varphi'(x)$ на промежутке X,
2) $(x, \varphi(x)) \in G$ при всех $x \in X$,
3) $\varphi'(x) \equiv f\,[x, \varphi(x)]$ на промежутке X.

Замечания.

1. Если промежуток X содержит левый или правый конец, то определение 1 требует существования непрерывной соответствующей односторонней производной $\varphi(x)$ в этой точке.

2. Из определения следует, что промежуток X необходимо лежит в проекции области G на ось R^1_x. Процесс нахождения решений уравнения (1) иногда называют интегрированием дифференциального уравнения (1). Кривая в области G, являющаяся графиком некоторого решения уравнения (1), называется интегральной кривой дифференциального уравнения (1).

Далеко не всегда удается получить решение уравнения (1) в явном виде $y = \varphi(x)$, $x \in X$. Во многих случаях решение (1) определяется как неявная функция из уравнения $\Phi(x, y) = 0$. Решить уравнение (1) означает найти все решения уравнения (1).

Рассмотрим геометрический смысл задания уравнения (1) и его решения. С этой целью сопоставим каждой точке $(x_0, y_0) \in G$ вектор с координатами $\{1, f(x_0, y_0)\}$, отложенный от этой точки. Множество всех полученных векторов будем называть полем направлений, соответствующим уравнению (1). Из определения решения уравнения (1) и геометрического смысла производной следует, что кривая в области G является интегральной кривой уравнения (1) в том и только том случае, когда она гладкая и направление касательной в каждой ее точке совпадает с направлением поля в этой точке. Таким образом, в каждой точке $(x, y) \in G$ угол $\alpha = \alpha(x, y)$ наклона касательной к интегральной кривой (1) определяется уравнением $\operatorname{tg} \alpha = f(x, y)$ (рис. 1).

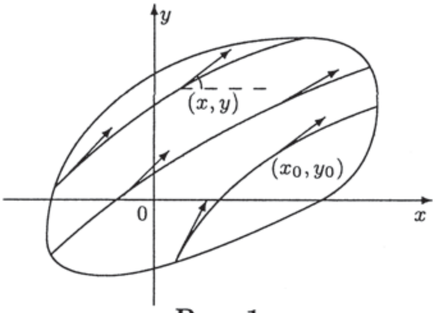

Рис. 1

Итак, задача интегрирования уравнения (1) геометрически эквивалентна нахождению всех гладких кривых в G, направление касательных к которым в каждой точке G совпадает с вектором поля направлений в данной точке. Это соображение используется для приближенного построения интегральных кривых. При практическом нахождении поля направлений для уравнения (1) удобно использовать так называемые изоклины. Изоклиной поля направлений уравнения (1) называют такую кривую в области G, во всех точках которой направления поля имеют одинаковый угловой коэффициент k. Ясно, что изоклина задается уравнением $f(x,y) = k$. В простых случаях построение с помощью изоклин поля направлений позволяет сделать определенные выводы о поведении интегральных кривых уравнения (1). Приведем пример.

Пример 1. С помощью изоклины приближенно начертить интегральные кривые уравнения $y' - y = x$.

Δ Изоклинами являются параллельные прямые $x+y=k$. При $k=0$ получаем изоклину $x+y=0$, которая делит плоскость на две полуплоскости: в нижней полуплоскости интегральные кривые убывают, а в верхней полуплоскости они возрастают. При $k=-1$ получаем изоклину $x+y=-1$, которая одновременно является и интегральной кривой, в чем можно убедиться подстановкой $y=-x-1$ в уравнение. Продифференцировав заданное уравнение, находим $y''=y'+1=x+y+1$. Законность дифференцирования будет ясна из § 2 главы 1.

Отсюда видно, что прямая $x+y=-1$ делит плоскость на две части: в нижней части $y''<0$, в верхней части $y''>0$. Таким образом, интегральные кривые по разные стороны от прямой $x+y=-1$ имеют различную выпуклость. Если учесть, кроме того, что интегральные кривые заданного уравнения не могут пересекаться (см. п. 3 § 2), то получаем в результате приближенную картину поведения интегральных кривых, изображенную на рис. 2.

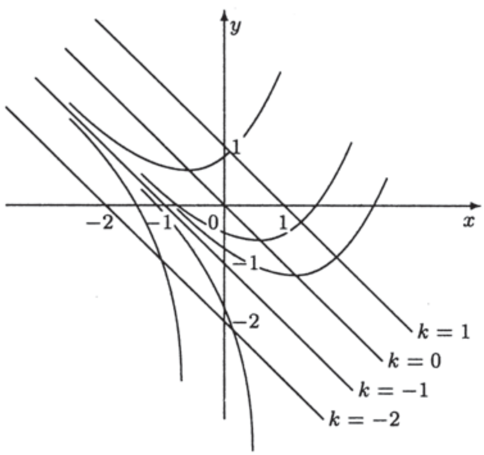

Рис. 2 ▲

Как следует из примеров введения и вышеприведенных геометрических соображений, за редким исключением разрешимое дифференциальное уравнение (1) имеет бесконечное множество решений. Таким исключением, например, является уравнение $y' = \sqrt{-y^2}$, которое имеет единственное решение $y = 0$. Поэтому в общем случае для получения какого-нибудь конкретного решения уравнения (1), кроме самого уравнения (1), необходимы еще дополнительные условия, выделяющие это конкретное решение из множества всех решений уравнения. Во многих случаях таким дополнительным условием для уравнения (1) является начальное условие

$$y(x_0) = y_0, \qquad (x_0, y_0) \in G. \tag{2}$$

Числа x_0, y_0 называются начальными данными, а задача отыскания решения уравнения (1), удовлетворяющего начальному условию (2), называется начальной задачей или задачей Коши для уравнения (1).

Решить задачу Коши для уравнения (1) геометрически означает найти интегральную кривую уравнения (1), проходящую через заданную точку $(x_0, y_0) \in G$ (см. рис. 1).

В главе 4 будут установлены достаточные условия на функцию $f(x, y)$, обеспечивающие существование и единственность решения задачи Коши (1)–(2). Именно там будет доказана следующая теорема.

Теорема существования и единственности. *Пусть функции* $f(x, y)$ *и* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *непрерывны в области* G *и точка* (x_0, y_0) *лежит в* G*. Тогда:*

1) *Найдется число* $\delta > 0$ *такое, что решение задачи Коши* (1)–(2) *существует при всех* $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

2) *Если* $y = \varphi_1(x)$, $x \in X_1$, *и* $y = \varphi_2(x)$, $x \in X_2$, *— два решения задачи Коши* (1), (2) (*промежутки* X_1 *и* X_2 *содержат точку* x_0), *то* $\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x)$ *для всех* $x \in X_1 \cap X_2$.

Обсуждение условий сформулированной теоремы проведем в главе 4, а сейчас только отметим, что при заданной $f(x, y)$ с указанными в теореме свойствами гладкости интервал существования решения задачи Коши (1)–(2) и само решение задачи Коши (1)–(2) зависят от начальной точки $(x_0, y_0) \in G$. Впрочем, этот факт очевиден из геометрической интерпретации решения уравнения (1) (см. рис. 1). При условиях теоремы гарантируется, что через точку $(x_0, y_0) \in G$ проходит единственная интегральная кривая уравнения (1) (рис. 3).

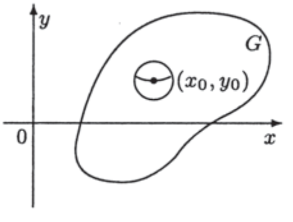

Рис. 3

Условия приведенной теоремы выполнены, если, например, $f(x, y)$ является многочленом от x, y.

Обобщением дифференциального уравнения в нормальной форме (1) является так называемое уравнение первого порядка в дифференциалах (или уравнение первого порядка в симметричной форме):

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0. \tag{3}$$

Здесь будем предполагать, что $P(x,y)$, $Q(x,y)$ — заданные непрерывные функции в области G и что $|P(x_0,y_0)| + |Q(x_0,y_0)| > 0$ для каждой точки $(x_0,y_0) \in G$. Уравнение (1) является частным случаем уравнения (3), когда $P(x,y) \equiv f(x,y)$, $Q(x,y) \equiv -1$. Уравнение (3) удобнее уравнения (1) в том смысле, что переменные x, y в нем участвуют равноправно.

Для уравнения (3) можно дать определение решения аналогично определению решения для уравнения (1). Однако более целесообразно расширить понятие решения, рассмотрев так называемые параметрические решения.

Определение. Вектор-функция $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ на некотором промежутке $\mathcal{I}$ числовой оси R^1_t называется параметрическим решением уравнения (3), если:

1) функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — непрерывно дифференцируемые и $[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 > 0$ для всех $t \in \mathcal{I}$,

2) $(\varphi(t), \psi(t)) \in G$ для всех $t \in \mathcal{I}$,

3) $P[\varphi(t), \psi(t)]\,\varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t)]\,\psi'(t) \equiv 0$ на всем промежутке $\mathcal{I}$.

Кривая в области G, являющаяся непрерывным образом промежутка $\mathcal{I}$ при отображении $(\varphi(t), \psi(t))$, называется (параметрической) интегральной кривой уравнения (3).

Из определения решения немедленно следует, что интегральная кривая уравнения (3) является гладкой кривой.

Если $\varphi'(t_0) \neq 0$ для некоторого $t_0 \in \mathcal{I}$, то найдется интервал $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, $\delta > 0$, на котором $x = \varphi(t)$ имеет обратную функцию $t = \varphi^{-1}(x)$, и тогда кусок интегральной кривой, соответствующий изменению t в интервале $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, определяется уравнением $y = \varkappa(x) \equiv \psi\left[\varphi^{-1}(x)\right]$. Если же $\psi'(t_1) \neq 0$ для некоторого $t_1 \in \mathcal{I}$, то найдется интервал $(t_1 - \delta_1, t_1 + \delta_1)$, $\delta_1 > 0$, на котором $y = \psi(t)$ имеет обратную функцию $t = \psi^{-1}(y)$, и тогда кусок интегральной кривой, соответствующий $t \in (t_1 - \delta_1, t_1 + \delta_1)$, определяется уравнением $x = \omega(y) \equiv \varphi\left[\psi^{-1}(y)\right]$.

Отсюда следует, что интегральная кривая уравнения (3), в отличие от интегральной кривой уравнения (1), в общем случае представляет собой гладкую кривую, отдельные куски которой задаются или функцией вида $y = \varkappa(x)$ или функцией вида $x = \omega(y)$. Соответственно этому уравнение (3) допускает как решения вида $y = \varkappa(x)$, так и решения вида $x = \omega(y)$, заданных явно, неявно или параметрически.

В частности, из определения параметрического решения уравнения (3) при $x = t$ получаем решение вида $y = \psi(x)$, а при $y = t$ получаем решение вида $x = \varphi(y)$.

Замечание. Иногда уравнение (3) может быть задано не только в области G, но и на ее границе. Тогда всякая граничная точка относится к так называемым особым точкам (см. далее) уравнения (3). Поведение интегральных кривых (3) в окрестности границы G требует отдельного рассмотрения.

В каждой точке $(x, y) \in G$ уравнение (3) определяет вектор с компонентами $\{-Q(x, y), P(x, y)\}$. Эти вектора задают поле направлений в области G, порождаемого уравнением (3). Как и в случае уравнения (1), гладкая кривая в G будет интегральной кривой уравнения (3) тогда и только тогда, когда направление касательной в каждой ее точке совпадает с вектором поля в данной точке. Поле направлений уравнения (3) богаче поля направлений уравнения (1), так как, например, оно может содержать вертикальные направления, что запрещено для поля направлений уравнения (1). Как уже отмечалось ранее, структура интегральных кривых уравнения (3) может быть более сложной, чем для уравнения (1). Например, интегральные кривые уравнения (3) могут иметь вертикальные касательные, быть замкнутыми кривыми.

В силу условий на коэффициенты P и Q уравнения (3) из рассмотрения исключены те точки $(x_0, y_0) \in G$, в которых $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$. Такие точки называют особыми точками уравнения (3). В них уравнение (3) не определяет направлений. Поведение интегральных кривых уравнения (3) в окрестности изолированных особых точек будет изучено в главе 7. В силу непрерывности P и Q множество особых точек уравнения (3) всегда замкнуто, однако особые точки (3) не обязаны всегда быть изолированными. Они могут заполнять целую линию, называемую особой линией (например, прямая $y = x$ — особая линия уравнения $(y - x)(x\,dx + y\,dy) = 0$) или образовывать множество более сложной структуры. Особые линии могут определять так называемые особые решения (3).

В силу того, что переменные x, y равноправны в уравнении (3), для него удобно ставить задачу Коши в геометрических терминах.

Задача Коши для (3). Найти интегральную кривую уравнения (3), проходящую через заданную точку $(x_0, y_0) \in G$.

Если $Q(x_0, y_0) \neq 0$, $(x_0, y_0) \in G$, то можно установить в некоторой окрестности (x_0, y_0) эквивалентность уравнений (3) и (1). Тем самым изучение задачи Коши для уравнения (3) сводится в такой окрестности к изучению задачи Коши для уравнения (1).

§ 2. Методы решения простейших дифференциальных уравнений первого порядка

Решения дифференциального уравнения

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \tag{1}$$

где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ — заданные непрерывные функции в некоторой области G декартовой плоскости $R^2(x,y)$, не содержащей особых точек уравнения (1), сравнительно редко выражаются через элементарные функции. Даже простейшие уравнения вида (1) могут приводить к решениям, не выражающимся через элементарные функции. В качестве примера можно взять уравнение

$$y' = e^{-x^2}.$$

Все его решения задаются формулой

$$y = \int e^{-x^2} dx + C,$$

где $\int e^{-x^2} dx$ обозначает фиксированную первообразную функции e^{-x^2}, а C — произвольная постоянная. Из курса анализа известно, что первообразная $\int e^{-x^2} dx$ не выражается через элементарные функции. Тем не менее естественно считать, что найдены все решения уравнения.

Замечание. В теории дифференциальных уравнений символом $\int f(x)dx$, где $f(x)$ — заданная непрерывная функция на некотором промежутке, принято обозначать фиксированную первообразную, в отличие от анализа, где символ $\int f(x)dx$ обозначает множество всех первообразных функции $f(x)$. Из вышесказанного делается понятной необходимость расширения класса функций, через которые могут выражаться решения уравнения (1).

Определение. Говорят, что уравнение (1) разрешимо или интегрируемо в квадратурах, если все его решения выражаются явным или неявным образом через элементарные функции с помощью конечного числа арифметических операций, суперпозиций и операций нахождения первообразных.

Замечание. В прежние века первообразную $\int f(x)dx$ называли квадратурой $f(x)$. Отсюда и происходит название «решение в квадратурах».

Уже простой пример уравнения Риккати $y' = y^2 + x$ говорит о том, что в квадратурах интегрируется сравнительно небольшой класс уравнений (1). Поэтому, наряду с методами нахождения точных решений, для практики важное значение имеют асимптотические и численные методы решения дифференциальных уравнений, которые широко применяются в тех случаях, когда точные решения уравнений нельзя найти или они малоэффективны.

Укажем простые классы уравнений (1), интегрируемых в квадратурах. Отметим, что при решении конкретных уравнений нецелесообразно пользоваться выведенными ниже формулами решений. Проще усвоить изложенный метод решения и применять его в каждом конкретном случае.

1. Уравнения с разделенными переменными

Так называют уравнение вида

$$a(x)dx + b(y)dy = 0, \tag{2}$$

где $a(x)$ — заданная непрерывная функция на (α, β), $b(y)$ — заданная непрерывная функция на (γ, δ) и область $G' = \{(x, y) : x \in (\alpha, \beta), y \in (\gamma, \delta)\}$ не содержит особых точек уравнения (1).

Если существует параметрическое решение уравнения (2), задаваемого функциями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \mathcal{I}$ то, подставив его в (2), получим тождество на промежутке $\mathcal{I}$:

$$a\,[\varphi(t)]\,d\varphi(t) + b\,[\psi(t)]\,d\psi(t) \equiv 0. \tag{3}$$

Пусть $A(x) = \int a(x)dx$ — какая-либо первообразная $a(x)$ и пусть $B(y) = \int b(y)dy$ — какая-либо первообразная $b(y)$. Тогда интегрирование тождества (3) приводит к равенству

$$A\,[\varphi(t)] + B\,[\psi(t)] = C, \qquad t \in \mathcal{I},$$

где C — постоянная. Следовательно, всякое параметрическое решение (2) удовлетворяет уравнению

$$\int a(x)dx + \int b(y)dy = C. \tag{4}$$

Нетрудно убедиться, что и обратно, если $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \mathcal{I}$, задают гладкую кривую, удовлетворяющую на промежутке $\mathcal{I}$ уравнению (4) при некотором значении постоянной C, то она определяет параметрическое решение (2). Таким образом, формула (4), где C — произвольная постоянная, если задает гладкую кривую при некотором C, то при каждом таком значении C определяет некоторое параметрическое решение уравнения (2) и содержит все параметрические решения уравнения (2).

Если необходимо найти интегральную кривую (2), проходящую через точку (x_0, y_0), где $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $y_0 \in (\gamma, \delta)$, то однозначно такая кривая в силу (4) задается формулой

$$\int\limits_{x_0}^{x} a(\zeta)d\zeta + \int\limits_{y_0}^{y} b(\eta)d\eta = 0.$$

Уравнение вида

$$p_1(x)q_1(y)dx + p_2(x)q_2(y)dy = 0, \tag{5}$$

где $p_1(x)$ и $p_2(x)$ — заданные непрерывные функции $x \in (\alpha, \beta)$, а $q_1(y)$ и $q_2(y)$ — заданные непрерывные функции $y \in (\gamma, \delta)$, называют уравнением с разделяющимися переменными. Здесь, как и для уравнения (2), предполагаем, что область G не содержит особых точек уравнения (5).

В случае, когда найдется такое $x_0 \in (\alpha, \beta)$, что $p_2(x_0) = 0$, проверкой убеждаемся, что $x = x_0$ является решением (5). Аналогично, если $q_1(y_0) = 0$ для некоторого $y_0 \in (\gamma, \beta)$, то $y = y_0$ — решение (5). Если же $q_1(y_1) \neq 0$ и $p_2(x_1) \neq 0$, то в некоторой окрестности $(x_1, y_1) \in G$, как нетрудно проверить, уравнение (5) эквивалентно (т. е. у них одно и то же множество решений) уравнению с разделенными переменными

$$\frac{p_1(x)}{p_2(x)}dx + \frac{q_2(y)}{q_1(y)} = 0.$$

Из формулы (4) тогда получаем формулу решений уравнения (5) в рассматриваемой окрестности $(x_1, y_1) \in G$

$$\int \frac{p_1(x)}{p_2(x)}dx + \int \frac{q_2(y)}{q_1(y)}dy = C, \tag{6}$$

где C — произвольная постоянная, а знаком интеграла обозначается фиксированная первообразная.

Далее, если интегральные кривые (6) касаются прямой $x = x_0$ или прямой $y = y_0$, то путем «склеивания» частей кривых (6) и частей прямых $x = x_0$, $y = y_0$ в точках касания, получаем множество новых, так называемых составных решений уравнения (5). Приведем пример.

Пример 1. Решить уравнение $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$.

$\triangle$ Заменив y' отношением дифференциалов, заданное уравнение перепишем в симметричной форме

$$dy = 3\sqrt[3]{y^2}dx.$$

Проверкой убеждаемся, что $y = 0$ — решение уравнения. Предполагая теперь, что $y \neq 0$, разделим обе части уравнения на $3\sqrt[3]{y^2}$. В результате получаем уравнение с разделенными переменными

$$\frac{dy}{3\sqrt[3]{y^2}} = dx.$$

Отсюда находим, что $\sqrt[3]{y} = x + C$ или $y = (x + C)^3$, где C — произвольная постоянная. Нетрудно проверить, что в точках $(-C, 0)$ кривые $y = (x + C)^3$ касаются прямой $y = 0$. В силу этого наше уравнение, кроме решений $y = 0$, $y = (x + C)^3$, имеет бесконечное множество составных решений, составленных из частей ранее полученных решений. Например, (см. рис. 4) это решения ABH, DBE, $FGBE$ и т. д.

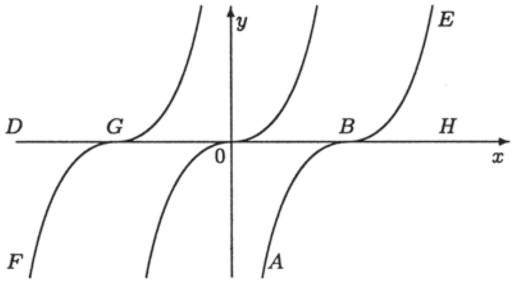

Рис. 4 ▲

Уравнение вида $y' = f(ax + by + c)$, где $f(z)$ — заданная непрерывная функция на некотором промежутке, a, b, c — заданные числа, $a^2 + b^2 > 0$, заменой $z = ax + by + c$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными $z' = a + bf(z)$.

Пример 2. Решить задачу Коши: $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$, $y(0) = 1$.

$\triangle$ После замены $z = 4x + 2y - 1$ уравнение примет вид

$$z' = 4 + 2\sqrt{z}.$$

Его интегрирование дает

$$x + C = \sqrt{z} - 2\ln(2 + \sqrt{z}),$$

где C — произвольная постоянная. Возвращаясь к переменной y, получим формулу всех решений исходного уравнения

$$x + C = \sqrt{4x + 2y - 1} - 2\ln(2 + \sqrt{4x + 2y - 1}).$$

Из начального условия находим, что $C = 1 - 2\ln 3$. Следовательно, решение задачи Коши задается формулой

$$x + 1 - 2\ln 3 = \sqrt{4x + 2y - 1} - 2\ln(2 + \sqrt{4x + 2y - 1}).$$ ▲

2. Однородные уравнения первого порядка

Уравнение (1) будем называть однородным уравнением первого порядка, если его можно при $x \neq 0$ записать в виде

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{7}$$

где $f(z)$ — заданная непрерывная функция z на некотором промежутке.

Уравнение (7) заменой $y = xu$, где $u = u(x)$ — новая неизвестная функция, сводится к эквивалентному уравнению

$$xu' + u = f(u). \tag{8}$$

При решении уравнения (8) нужно различать три случая: а) $f(u) \neq u$, б) $f(u) \equiv u$, в) $f(u_k) = u_k$ для некоторых точек u_k. Уравнение (8) эквивалентно уравнению с разделенными переменными вида

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

в случае а) и уравнению $xu' = 0$ в случае б). В случае в) проверкой можно убедиться, что $u(x) = u_k$ — решения (8).

Получив все решения уравнения (8), обратной заменой находим все решения уравнения (7). При этом возможны и составные решения. Они появляются тогда, когда интегральные кривые (7) касаются интегральных прямых $y = u_k x$.

Пример 3. При $x > 0$, $x + y > 0$ решить уравнение

$$xy' = \frac{x^2 + y^2}{x + y}.$$

$\triangle$ Уравнение можно записать в виде $y' = \frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+\frac{y}{x}}$ и, следовательно, оно является однородным уравнением первого порядка. После замены $y = xu$ получаем

$$xu' + u = \frac{1 + u^2}{1 + u}.$$

Отсюда находим, что

$$xu' = \frac{1 - u}{1 + u}.$$

Проверкой убеждаемся, что $u = 1$ — решение этого уравнения. Если же $u \neq 1$, то уравнение эквивалентно уравнению

$$\frac{dx}{x} = \frac{1 + u}{1 - u} du.$$

Решения последнего задаются формулой

$$C + \ln|x| = -\ln(u - 1)^2 - u,$$

где C — произвольная постоянная. Обратная замена дает все решения заданного уравнения

$$C + \ln|x| = -\ln\left(\frac{y}{x} - 1\right)^2 - \frac{y}{x}. \qquad \blacktriangle$$

Пусть теперь задано уравнение вида

$$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right), \tag{9}$$

где $f(z)$ — непрерывная функция на некотором промежутке, а заданные числа a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 таковы, что $|a_1| + |b_1| > 0$, $|a_2| + |b_2| > 0$.

Рассмотрим на плоскости следующие две прямые: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Если прямые имеют точку пересечения (x_0, y_0), то замена $x = \zeta + x_0$, $y = \eta + y_0$ приводит (9) к однородному уравнению

$$\frac{d\eta}{d\zeta} = f\left(\frac{a_1\zeta + b_1\eta}{a_2\zeta + b_2\eta}\right).$$

Если же эти прямые параллельны, то найдется такое число $k \neq 0$, что $a_2x + b_2y = k(a_1x + b_1y)$. Следовательно, уравнение (9) принимает вид

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{k(a_1x + b_1y) + c_2}\right).$$

и заменой $z = a_1x + b_1y$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример 4. Решить уравнение

$$(y + 2)dx = (2x + y - 4)dy.$$

△ Прямые $y + 2 = 0$ и $2x + y - 4 = 0$ пересекаются в точке $(3, -2)$. После замены $x = \zeta + 3$, $y = \eta - 2$ получаем уравнение

$$\eta d\zeta = (2\zeta + \eta)d\eta.$$

Проверкой убеждаемся, что $\eta = 0$ — решение этого уравнения. При $\eta \neq 0$ это уравнение является однородным. Ищем его решение в виде $\zeta = \eta \cdot u$, где $u = u(\eta)$ — новая неизвестная функция. После упрощений находим, что

$$\eta du = (u + 1)d\eta.$$

Легко видеть, что $u = -1$ — решение. При $\eta \neq 0$, $u \neq -1$ находим остальные решения последнего уравнения

$$\ln|u + 1| = \ln|\eta| + \ln c_1,$$

где c_1 — произвольная положительная постоянная. Избавившись от логарифмов и положив $c = c_1 \operatorname{sign}[\eta(u + 1)]$, последнюю формулу можно записать в виде

$$u + 1 = c\eta, \qquad c \neq 0.$$

Но при $c = 0$ получаем решение $u = -1$, поэтому можно считать в полученном равенстве c любым числом.

Из проведенных выкладок получаем, что все решения заданного уравнения задаются формулами

$$y = -2, \qquad x + y - 1 = c(y + 2)^2. \qquad \blacktriangle$$

В некоторых случаях уравнение (1) можно привести к однородному уравнению первого порядка с помощью замены $y = z^m$. Приведем пример.

Настоящий учебник написан автором на основании многолетнего опыта преподавания курса обыкновенных дифференциальных уравнений в Московском физико-техническом институте (государственном университете).

Излагаются основные разделы классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. Рассматриваются методы получения точных решений линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами; значительное внимание уделяется вопросам существования, единственности и непрерывной зависимости решения дифференциального уравнения от исходных данных.

Приводятся методы решения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, линейных и нелинейных уравнений первого порядка в частных производных; обсуждаются вопросы качественного исследования этих решений.

Основы вариационного исчисления рассматриваются по причине тесной связи данного раздела высшей математики с теорией дифференциальных уравнений.

ISBN 978-5-00101-200-9
9 785001 012009