Оглавление

Предисловие

Эта книжка серии «Математические кружки» посвящена задачам, связанным с числовыми последовательностями. К сожалению, в базовой школьной программе этой теме уделено очень мало внимания. Школьники изучают только простейшие свойства двух частных случаев последовательностей: арифметической и геометрической прогрессий, и происходит это довольно поздно: в курсе алгебры 9 класса. Вместе с тем решение многих несложных задач, в условии которых явно или неявно содержатся последовательности, развивает математическую интуицию, логику, а также полезно с точки зрения совершенствования «техники» работы с различными математическими объектами. Не стоит забывать также и о том, что уже в самом раннем возрасте, учась считать, ребенок сразу сталкивается с простейшей последовательностью: последовательностью натуральных чисел. В дальнейшем умение найти простейшие закономерности, удобные способы суммирования, и т. п. требуется для решения многих задач, с которыми дети сталкиваются не только при изучении математики. С этой точки зрения весьма полезно уделить этой теме ряд занятий математического кружка начиная с 5 класса (а для особо «продвинутых» школьников можно начать и раньше).

Предлагаемая книжка содержит одиннадцать занятий математического кружка. В материалы каждого занятия входят: вступительный и поясняющий текст учителя, включающий в себя несколько подробно разобранных типовых задач по теме; упражнения и задачи, которые могут быть предложены учащимся для самостоятельного решения (как на занятии, так и дома); подробные решения этих задач; методические комментарии для учителя. Отметим, что разбиение на занятия в какой-то степени условно и иногда происходит по «внешним признакам», так как приходится учитывать наличие или отсутствие сведений, которые учащиеся имеют на тот или иной момент в соответствии со школьной программой.

Отдельным списком представлены дополнительные задачи различного уровня трудности, часть из которых в какой-то степени дублирует задачи, предложенные для занятий, а часть — дополняет их новыми идеями (наиболее сложные задачи отмечены знаком *). Эти задачи можно использовать на усмотрение преподавателя (или обучающегося). Для них также, как правило, приведены подробные решения (в отдельных случаях — ответы и указания). Для удобства в конце каждого занятия приведен список задач из этого раздела, которые имеет смысл использовать для закрепления материала, контроля его освоения и углубления. Следует учесть, что есть задачи, которые могут быть отнесены к нескольким занятиям.

В качестве приложения приведена также таблица кратких сведений об арифметической и геометрической прогрессиях. Некоторые из них обобщают те приемы и методы, которые встретятся при решении задач из книжки. Помимо прочего, этот перечень может оказаться полезным для углубления раздела школьного курса, связанного с прогрессиями.

Краткое содержание занятий.

Занятие 1. Поиск закономерностей. Занятие доступно учащимся 5—6 классов. Оно посвящено поискам и «вербализации» закономерностей в простейших числовых последовательностях и заполнению пропусков в этих последовательностях в соответствии с найденными закономерностями. Особое внимание уделено задачам, в которых демонстрируется возможность задания одной и той же последовательности различными способами, а также задачам, решение которых подготавливает к изучению прогрессий.

Занятие 2. Закономерности сумм и произведений. Занятие ориентировано на учащихся 5—6 классов. Оно посвящено простейшим приемам, с помощью которых можно находить суммы с большим количеством слагаемых и произведения большого количества сомножителей. В частности, вычисляются суммы некоторых арифметических и геометрических прогрессий (без введения их определений). На отдельных примерах демонстрируются возможности «комбинаторного» и «геометрического» способов суммирования.

Занятие 3. Восстановим члены последовательности. Занятие ориентировано на учащихся 6—7 классов. Оно служит для того, чтобы школьники освоились с различными правилами, по которым могут быть заданы последовательности (как конечные, так и бесконечные), и научились восполнять «пробелы» в различных числовых рядах. Обсуждаются два основных способа задания числовых последовательностей: рекуррентный и формулой n-го члена. В ряде задач потребуется самим установить и обосновать закономерности, на основании которых можно будет вычислить члены с достаточно большими порядковыми номерами.

Занятие 4. Зацикливание. Занятие ориентировано на учащихся 7—8 классов. Оно посвящено решению задач, в условии которых различными способами заданы периодические последовательности. В процессе решения и разбора задач школьники смогут научиться распознавать такие последовательности, находить их период и члены с конкретными номерами. Особое внимание уделено алгебраическим методам решения, в частности использованию равенств из условий задач в общем виде.

Занятие 5. Суммирование. Занятие ориентировано на учащихся 7—8 классов. Рассматриваются способы суммирования, основанные на применении некоторых алгебраических тождеств. Отрабатываются стандартные приемы, характерные для многих алгебраических задач (не только связанных с последовательностями): представление дроби в виде суммы или разности, прибавление и вычитания одного и того же выражение для получения «удобного» выражения, освобождение от иррациональности в знаменателе дроби и пр.

Занятие 6. Целочисленные арифметические прогрессии. Занятие ориентировано на учащихся 8—9 классов. Оно посвящено задачам на последовательности, членами которых являются целые числа. Требует знания основ делимости и базовых сведений об арифметической прогрессии. Особое внимание уделено простым числам в арифметических прогрессиях.

Занятие 7. Существует ли...? Занятие ориентировано на учащихся 8—9 классов. Оно посвящено различным задачам, в которых требуется построить пример последовательности, обладающей определенными свойствами, либо привести рассуждение, показывающее, что такой последовательности не существует. При решении задач активно задействован материал предыдущих занятий: применение алгебраических тождеств, простейшие приемы суммирования, базовые сведения об арифметической прогрессии, соображения делимости и пр.

Занятие 8. Опять суммирование. Занятие ориентировано на учащихся 9—10 классов. Рассматриваются сравнительно сложные случаи суммирования. Для решения некоторых задач требуется комбинировать различные приемы и формулы, что способствует совершенствованию алгебраической техники школьников. Освоение этого материала потребует от школьников уверенного владения навыками работы с арифметической и геометрической прогрессиями.

Занятие 9. Числа Фибоначчи. Занятие ориентировано на учащихся 9—10 классов. Оно посвящено изучению свойств одной из самых известных последовательностей: чисел Фибоначчи. В рамках решения и обсуждения задач школьники получат уникальную возможность сочетания методов и приемов из алгебры, теории чисел и комбинаторики, которые в некоторых случаях можно интерпретировать геометрически. Для работы с предложенным материалом от учащихся потребуется уверенное владение методом математической индукции и знание основ теории делимости, а также навыки тождественных преобразований и комбинаторных рассуждений.

Занятие 10. Вспомогательные последовательности. Занятие ориентировано на учащихся 9—10 классов. Оно посвящено задачам, для решения которых удобно (а иногда необходимо) вводить новую последовательность, которую уместно называть вспомогательной. В условиях некоторых задач последовательности не упоминаются, а их введение в качестве вспомогательных позволяет найти красивое и короткое решение. В других задачах введение вспомогательной последовательности обеспечивает переход к последовательности, свойства которой известны, в частности к арифметической или к геометрической прогрессии. В ряде случаев этот прием позволяет оценить члены последовательности с конкретными номерами.

Занятие 11. Применение свойств последовательностей. Оно посвящено обсуждению сравнительно трудных задач, большинство из которых ранее использовались на олимпиадах высокого уровня. Для их решения применяются общие свойства последовательностей: периодичность, монотонность и ограниченность. Во вступительной части вводятся строгие определения этих понятий, а в процессе решения и обсуждения задач вырабатываются и закрепляются навыки их применения.

По традиции в конце книжки все занятия представлены в виде дидактических материалов. Понятно, что преподаватель математического кружка (или учитель на уроках и факультативных занятиях) может по своему усмотрению использовать только часть предложенных занятий, использовать эти занятия для более старших или более младших школьников, поменять порядок их изучения и т. д.

Выражаю благодарность всем авторам книг и статей, указанных в списке использованной литературы, а также авторам всех использованных в книжке задач (многих из которых установить, к сожалению, не удалось).

Я благодарен А. В. Шаповалову, оказавшему существенное влияние на концепцию книги и на улучшение ее текста, А. В. Антропову, А. И. Сгибневу и А. С. Штерну, из чьих материалов были позаимствованы некоторые задачи, а также всем школьникам, на занятиях с которыми этот материал был апробирован и «протестирован».

Занятие 1
Поиск закономерностей

На начальном этапе работы с последовательностями важно научить детей воспринимать последовательность (*составной, потенциально бесконечный объект*) *как единое целое, подчиняющееся единому правилу.*

На этом занятии мы будем рассматривать числа, записанные в строчку в определенном порядке, или, иначе говоря, ***числовые последовательности***. Для начала попробуем научиться угадывать правило, по которому эти числа следуют одно за другим, а также находить числа, стоящие на определенных местах.

Пример 1.1. Даны последовательности чисел: а) 5, 8, 11, 14, 17, ...; б) 1, 8, 27, 64, 125, ...; в) 1, 2, 6, 24, 120, ...; г) 4, 8, 16, 32, 64, ... Для каждой из них: 1) сформулируйте правило, по которому она составлена, и укажите следующее число; 2) запишите числа, которые будут стоять на десятом и на двадцатом месте.

Отметим, что ответ на первый вопрос может быть неоднозначным, так как школьники могут увидеть различные закономерности. При этом имеет смысл обсуждать наиболее очевидные.

Решение. а) 1. Заметим, что ***каждое следующее число на*** **3** ***больше чем предыдущее***, тогда следующим будет число 20.

2. Так как число 20 будет шестым, то, постепенно прибавляя по 3, получим, что на десятом месте стоит число 32. Можно таким же образом искать число, стоящее на двадцатом месте, но это не очень удобно. Имеет смысл рассуждать так: сколько раз надо прибавить по 3, чтобы из первого числа получить двадцатое? Это надо сделать 19 раз, поэтому двадцатое число равно $5 + 19 \cdot 3 = 62$.

б) 1. Заметим, что $1 = 1^3$, $8 = 2^3$, $27 = 3^3$, $64 = 4^3$, $125 = 5^3$, то есть ***каждое число — это номер места, на котором оно стоит, возведенный в куб***. Значит, следующее число: $6^3 = 216$.

2. Десятое число равно $10^3 = 1000$, а двадцатое — это $20^3 = 8000$.

в) 1. Заметим, что второе число получается из первого умножением на 2, третье получается из второго умножением на 3, четвертое из третьего — умножением на 4 и так далее, то есть ***каждое число получается из предыдущего умножением на номер места, на котором оно стоит***. Значит, следующее число: $120 \cdot 6 = 720$.

2. Десятое число получается из девятого умножением на 10, девятое — из восьмого умножением на 9, и так далее. Значит, десятое число — это ***произведение всех натуральных чисел от*** 1 ***до*** 10. Такое произведение принято записывать так: 10! (*читается*: *десять факториал*), причем вычислять это произведение особого смысла не имеет. Аналогично двадцатое число — это 20! (*двадцать факториал*).

г) 1. ***Каждое число получается из предыдущего умножением на*** 2, поэтому следующим будет число 128.

2. Для ответа на этот вопрос полезно записать данную последовательность чисел иначе: 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, ..., и тогда закономерность, по которой она составлена, можно сформулировать по-другому: ***каждое число является степенью двойки, показатель которой на единицу больше, чем номер места, на котором оно стоит***. Тогда можно увидеть, что десятое число равно 2^{11}, а двадцатое — это 2^{21}.

Ответ: а) 1) 20; 2) 32 и 62; б) 1) 216; 2) 1000 и 8000; в) 1) 120; 2) 10! и 20!; г) 1) 128; 2) 2^{11} и 2^{21}.

В рассмотренном примере мы встретились с двумя видами правил, по которым могут быть построены последовательности: в пункте а) каждый ***член последовательности*** определяется исходя из предыдущего, а в пункте б) он определяется исходя из его порядкового номера. В пунктах в) и г) предъявлены последовательности, которые можно задать как тем, так и другим способом.

Понятно, что последовательность из пункта а) также можно задать исходя из номера и первого члена, но обсуждать это на данном этапе, скорее всего, преждевременно. При этом полезно обсудить на более простых примерах, что разные правила могут задавать одну и ту же последовательность.

Пример 1.2. Саша и Маша записали в ряд по 20 чисел. Саша начал с единицы и придумал такое правило: на втором месте — разность между первым числом и числом 3, на третьем — сумма второго числа и числа 5, затем — разность третьего и числа 7, потом сумма четвертого и числа 9, и так далее. Маша поступила проще: записала последовательные натуральные числа от 1 до 20, а затем у каждого четного числа поменяла знак на противоположный. Какие ряды чисел у них получились: разные или одинаковые?

Решение. Непосредственным вычислением можно убедиться, что ряд чисел Саши выглядит так: $1, -2, 3, -4, 5, -6, ..., 19, -20$. Очевидно, что у Маши получился такой же ряд.

Ответ: одинаковые.

Встречаются последовательности, в которых угадать правила, по которым они построены, и найти недостающие члены весьма непросто, и помогают в этом не только предыдущие, но и последующие члены.

Пример 1.3. Дана последовательность, в которой пропущено ровно пять чисел: 102, 105, 111, 114, 120, 123, 129, ____, ____, ____, ____, ____, 201, 204, 210, 213, 219. Вставьте пропущенные числа.

Решение. Для того чтобы восстановить пропущенные числа, необходимо заметить, что каждый член данной последовательности начиная со второго получается в результате сложения предыдущего члена и суммы его цифр: $105 = 102 + 3$, $111 = 105 + 6$ и так далее. Таким образом, искомые числа: $141 = 129 + 12$, $147 = 141 + 6$, $159 = 147 + 12$, $174 = 159 + 15$, $186 = 174 + 12$.

Ответ: пропущены числа 141; 147; 159; 174; 186.

Отметим, что, на первый взгляд, существует более простая закономерность: *каждое число, стоящее на четном месте, на* 3 *больше, чем предыдущее число, а каждое число, стоящее на нечетном месте, на* 6 *больше, чем предыдущее. Эту закономерность использовать не удается*: *если вставить числа* 132, 138, 141, 147 *и* 150, *то следующим числом должно быть* 156, *а не* 201.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1.1. Сформулируйте правило, по которому составлена каждая последовательность, найдите следующее число и число, стоящее на десятом месте:
а) $3, 6, 9, 12, 15; \ldots$; б) $20, 15, 10, 5, 0, -5, \ldots$;
в) $1024, 512, 256, 128, 64, \ldots$; г) $10, 8, 11, 9, 12, 10, \ldots$;
д) $2, 5, 10, 17, 26, \ldots$; е) $\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{5}{12}, \frac{1}{2}, \ldots$;
ж) $\frac{1}{3}, \frac{4}{9}, \frac{1}{3}, \frac{16}{81}, \frac{25}{243}, \ldots$; з) $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

1.2. Петя, Вася и Коля записали в ряд по 100 чисел. У Пети пятое число равно 12, и каждое число начиная со второго на два больше левого соседа. У Васи первое и третье число равны 4 и 6 соответственно, а каждое число, кроме крайних, вдвое меньше суммы его соседей. А Коля просто записывал периметры прямоугольников шириной в одну клетку: сначала — периметр прямоугольника длиной в одну клетку, потом — длиной в две клетки, и так далее (сторона каждой клетки равна 1). У кого из мальчиков совпали записанные ряды чисел?

1.3. На прямой отметили 100 точек так, что расстояние между любыми соседними точками равно 7.

а) Каково расстояние между крайними точками?

б) Точки пронумеровали по порядку слева направо. Какой номер имеет точка, расстояние от которой до первой точки равно 77?

в) Координата первой точки равна 10. Найдите координату тридцать первой точки.

г) Какой номер будет иметь точка с координатой 110, если координата первой точки равна 5?

1.4. Дана последовательность: 1,5; 1,65; 1,8; 1,95; ...

а) Укажите закономерность и найдите число, стоящее на сто первом месте.

б) На каком месте в этой последовательности стоит число 6?

1.5. Найдите закономерность в последовательности чисел 111, 213, 141, 516, 171, 819, 202, 122, ... и запишите следующие два числа.

1.6. Найдите закономерность и следующий член последовательности: 0, 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, 220, ...

1.7. Даны две последовательности:

$$2, 4, 8, 16, 14, 10, 2, 4, \ldots \quad \text{и} \quad 3, 6, 12, 6, 12, \ldots$$

В них каждое число получено из предыдущего по одному и тому же закону. а) Укажите этот закон. б) Найдите все последовательности натуральных чисел, построенные по этому же закону, все члены которых равны между собой. в) Докажите, что если такая последовательность начинается с 2^{1000}, то в ней рано или поздно появится однозначное число.

Ответы и решения

1.1. Ответы: а) каждое число получается из предыдущего прибавлением числа 3 (каждое число равно своему утроенному порядковому номеру); следующее число: 18, десятое число: 30;

б) каждое число получается из предыдущего вычитанием числа 5; следующее число: -10, десятое число: -25;

в) каждое число в два раза меньше предыдущего; следующее число: 32, десятое число: 2;

г) на нечетных местах расположен ряд последовательных натуральных чисел начиная с числа 10, а на четных местах — ряд последовательных натуральных чисел начиная с числа 8; следующее число: 13, десятое число: 12;