Глава 1

Предварительные сведения

§ 1. Предмет изучения

1.1. Основные определения и обозначения

Напомним некоторые понятия, хорошо известные из курса анализа.

Определение 1.1. *Уравнением с частными производными* называется уравнение, содержащее частные производные неизвестной функции многих переменных $u = u(x_1, \ldots, x_n)$. Наивысший порядок входящих в уравнение производных называется *порядком* уравнения.

Определение 1.2. Всякий упорядоченный набор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ неотрицательных целых чисел называется *мультииндексом*. Используется обозначение $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Мультииндексу α отвечает линейный оператор α-й частной производной

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

действие которого заключается в дифференцировании функции α_i раз по переменной x_i, $i = 1, \ldots, n$.

Замечание 1.1. Хорошо известно, что если функция $u(x)$ является $|\alpha|$ раз непрерывно дифференцируемой в окрестности точки x, то смешанная производная $D^\alpha u(x)$ не зависит от того, в каком порядке происходит дифференцирование по переменным $x_1, \ldots, x_n$.

Определение 1.3. Открытое связное подмножество Q евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ называется *областью*.

Определение 1.4. Точка $x^0 \in \mathbb{R}^n$ называется *граничной точкой* множества Q, если любой шар $B_\varepsilon(x^0)$, $\varepsilon > 0$, имеет непустое пересечение как с множеством Q, так и с его дополнением $\mathbb{R}^n \setminus Q$. Совокупность всех граничных точек множества Q называется его *границей* и обозначается ∂Q. *Замыкание* множества Q есть $\overline{Q} = Q \cup \partial Q$.

Определение 1.5. Уравнение с частными производными называется *линейным,* если неизвестная функция и ее частные производные присутствуют в нем в виде линейной комбинации.

Всякое линейное уравнение с частными производными в области $Q \subset \mathbb{R}^n$ выглядит следующим образом:

$$\sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) = f(x) \quad (x \in Q).$$

Здесь *коэффициенты уравнения* $a_\alpha(x)$ и *правая часть уравнения* $f(x)$ — заданные функции. Будем говорить, что линейное уравнение с частными производными имеет порядок m в точке $x \in Q$, если

$$\sum_{|\alpha| = m} |a_\alpha(x)| \neq 0 \quad (x \in Q).$$

Используя альтернативное обозначение частных производных в случае $m = 2$, можно записать

$$\begin{gathered} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) u_{x_i}(x) + a_0(x) u(x) = f(x) \quad (x \in Q), \\ \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}(x)| \neq 0 \quad (x \in Q). \end{gathered} \tag{1.1}$$

Имея в виду замечание 1.1, можно считать, что $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ в каждой точке области Q. Несмотря на то, что есть важные примеры уравнений с комплексными коэффициентами (например, нестационарное уравнение Шрёдингера), с точки зрения многих приложений коэффициенты естественно предположить вещественнозначными функциями. Уравнение (1.1) называется *однородным*, когда $f = 0$. В противном случае оно называется *неоднородным*. Выражение $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j}$ есть *старшая часть* уравнения (1.1), а остальные слагаемые в левой части уравнения (1.1) представляют собой *младшие члены* уравнения.

Определение 1.6. Для области Q и неотрицательного целого числа k обозначим через $C^k(Q)$ множество всех k раз непрерывно дифференцируемых в Q функций, а через $C^k(\overline{Q})$ множество всех тех функций из $C^k(Q) \cap C(\overline{Q})$, производные которых вплоть до порядка k допускают непрерывное продолжение в $\overline{Q}$, где $C(\overline{Q})$ — множество всех функций, непрерывных в замыкании $\overline{Q}$ области Q.

Определение 1.7. Множество $\operatorname{supp}\varphi = \overline{\{x \in Q : \varphi(x) \neq 0\}}$ называется *носителем* функции $\varphi \in C(\overline{Q})$. В случае, когда множество $\operatorname{supp}\varphi \subset Q$ компактно, функцию φ называют *финитной*. Совокупность всех финитных функций из $C^k(\overline{Q})$ обозначается $C_0^k(Q)$.

Положим также

$$C^\infty(Q) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(Q), \quad C^\infty(\overline{Q}) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\overline{Q}), \quad C_0^\infty(Q) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_0^k(Q).$$

Определение 1.8. Говорят, что граница ∂Q области Q *принадлежит классу* C^k, если для любой точки $x^0 \in \partial Q$ найдутся такой номер $i \in \{1, \ldots, n\}$ и такой шар $B_r(x^0)$, что множество $\partial Q \cap B_r(x^0)$ однозначно проецируется вдоль оси Ox_i на $(n-1)$-мерную область $D = D(x^0, i, r)$ в пространстве переменных $x' = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ и

$$\partial Q \cap B_r(x^0) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i = \varphi(x'), x' \in D\},$$

где $\varphi \in C^k(\overline{D})$.

Пример 1.1. Пусть $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$. В окрестности точек $(0, 1)$ и $(0, -1)$ граница $\partial Q = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$ представляет собой график бесконечно дифференцируемых функций $x_2 = \sqrt{1 - x_1^2}$ и $x_2 = -\sqrt{1 - x_1^2}$ соответственно, при этом ее невозможно представить в виде графика функции $x_1 = x_1(x_2)$. Аналогично вблизи точек $(1, 0)$ и $(-1, 0)$ граница есть график функций $x_1 = \sqrt{1 - x_2^2}$ и $x_1 = -\sqrt{1 - x_2^2}$ соответственно, но не график функции $x_2 = x_2(x_1)$. В окрестности любой другой точки ∂Q возможны оба представления. Итак, $\partial Q \in C^\infty$.

Определение 1.9. Для областей $U, V \subset \mathbb{R}^n$ и натурального числа k биекция $f : U \to V$, для которой все координатные функции отображений f и f^{-1} принадлежат $C^k(U)$ и $C^k(V)$ соответственно, называется *диффеоморфизмом класса* C^k или, короче, C^k-диффеоморфизмом.

Если $\partial Q \in C^k$, то отображение

$$y_1 = x_1 - x_1^0, \quad \ldots, \quad y_{n-1} = x_{n-1} - x_{n-1}^0, \quad y_n = x_n - \varphi(x')$$

(в обозначениях определения 1.8 считаем, что $i = n$) является C^k-диффеоморфизмом некоторой окрестности U точки x^0 на окрестность V начала координат, причем образом множества

$\partial Q \cap U$ будет часть гиперплоскости $y_n = 0$. Другими словами, границу класса C^k можно локально распрямить посредством C^k-диффеоморфизма. Чтобы в этом убедиться, достаточно заметить, что якобиан этого отображения равен 1, и применить теорему об обратном отображении.

1.2. Классификация линейных уравнений второго порядка

По уравнению (1.1) построим матрицу

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}.$$

Будучи симметричной, она имеет в точности n вещественных собственных значений (с учетом кратностей) в каждой точке области. Обозначим через $n_+ = n_+(x)$ количество положительных собственных значений, через $n_- = n_-(x)$ — отрицательных, а через $n_0 = n_0(x)$ — кратность нулевого собственного значения. Имеем $n_+ + n_- + n_0 = n$.

Определение 1.10. Если $n_+ = n$ или $n_- = n$, то уравнение (1.1) называется *эллиптическим* в точке x. Если $n_+ = 1$, $n_- = n - 1$ или $n_+ = n - 1$, $n_- = 1$, то уравнение (1.1) называется *гиперболическим* в точке x. Если $n_+ + n_- = n$ и $n_+ \geqslant 2$, $n_- \geqslant 2$, то уравнение (1.1) называется *ультрагиперболическим* в точке x. Если же $n_0 > 0$, то уравнение (1.1) называется *параболическим* в точке x.

Замечание 1.2. Вообще говоря, числа n_+, n_- и n_0 зависят от x, поэтому тип уравнения может быть разный в разных точках области.

Пример 1.2. Знаменитый пример эллиптического уравнения — это *уравнение Пуассона* $-\Delta u = f$, где $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \ldots + \partial^2/\partial x_n^2$ есть *оператор Лапласа*. Уравнением Пуассона описываются и малые упругие деформации мембраны, и стационарное распределение температуры, и электростатический потенциал системы зарядов.

Пример 1.3. *Волновое уравнение* $u_{tt} - \Delta u = f$, в котором искомая функция $u = u(x_1, \ldots, x_n, t)$ зависит от n пространственных переменных $x_1, \ldots, x_n$ и времени t, имеет гиперболический тип в любой пространственно-временной области $(n+1)$-мерного пространства $\mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$. Волновое уравнение описывает распространение колебаний в упругой среде.

Пример 1.4. *Уравнением теплопроводности* называется уравнение $u_t - \Delta u = f$ относительно $u = u(x_1, \ldots, x_n, t)$. Оно принадлежит параболическому типу в любой пространственно-временной области $(n+1)$-мерного пространства $\mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$. Уравнение теплопроводности описывает процесс распространения тепла. Обычно уравнение теплопроводности рассматривают при $t > 0$.

Пример 1.5. Вот простейший пример ультрагиперболического уравнения:

$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} - u_{x_3x_3} - u_{x_4x_4} = 0, \quad u = u(x_1, \ldots, x_4).$$

Во всех приведенных примерах мы имеем дело с *канонической формой* уравнения, т. е. формой, в которой отсутствуют смешанные производные. Можно попытаться упростить структуру уравнения (1.1) при помощи подходящей замены координат. Возьмем любой локальный C^2-диффеоморфизм $x = x(y)$ и положим $v(y) = u(x(y))$. Дифференцируя сложную функцию $u(x) = v(y(x))$, получаем

$$u_{x_i} = \sum_{p=1}^{n} v_{y_p} \frac{\partial y_p}{\partial x_i}, \quad u_{x_ix_j} = \sum_{p,q=1}^{n} v_{y_py_q} \frac{\partial y_p}{\partial x_i} \frac{\partial y_q}{\partial x_j} + \ldots$$

с точностью до слагаемых, содержащих первые производные функции v. Подставляя эти соотношения в уравнение (1.1), получим эквивалентное уравнение относительно $v(y)$:

$$\sum_{p,q=1}^{n} b_{pq}(y) v_{y_py_q} + \text{младшие члены} = g(y),$$

где $g(y) = f(x(y))$ и

$$b_{pq}(y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial y_p}{\partial x_i} \frac{\partial y_q}{\partial x_j}\bigg|_{x=x(y)} \quad (p, q = 1, \ldots, n),$$

или, с использованием матричных обозначений,

$$B = JAJ^T. \tag{1.2}$$

Здесь B — аналогичная A матрица, составленная из коэффициентов b_{pq}, а J — матрица Якоби отображения $y = y(x)$. Поскольку матрица J невырожденная, числа n_+, n_- и n_0 для матрицы B в точке $y(x)$ такие же, как и для матрицы A в точке x. Иными словами, приведенная выше классификация инвариантна относительно диффеоморфизмов. Кроме того, формулу (1.2) можно использовать для приведения уравнения (1.1) к каноническому виду. При фиксированной точке $x = x^0$ достаточно найти такую невырожденную постоянную матрицу J, что матрица $JA(x^0)J^T$ окажется диагональной. Совершив затем линейную замену $y = Jx$, в новых переменных получим $b_{pq}(y^0) = 0$, $p \neq q$. Как всякая вещественная симметричная матрица, $A(x^0)$ обладает ортонормированным базисом из собственных векторов в $\mathbb{R}^n$, так что в качестве J всегда можно взять матрицу, у которой по строкам располагаются эти собственные векторы. В данном случае уравнение приводится к каноническому виду посредством ортогонального преобразования.

Заметим, что если коэффициенты a_{ij} в старшей части уравнения (1.1) постоянны, то описанная замена переменных приводит уравнение к каноническому виду сразу во всей области.

Пример 1.6. Приведем уравнение $u_{x_1x_2} = 0$ к каноническому виду в $\mathbb{R}^2$.

Для построения J находим ортонормированный базис из собственных векторов матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Записав характеристическое уравнение

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 \\ 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{4} = 0,$$

вычисляем собственные значения матрицы A: $\lambda = \pm 1/2$. Для координат e_1 и e_2 собственного вектора имеем

$$e_1 = e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{при} \quad \lambda = \frac{1}{2},$$

$$e_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{при} \quad \lambda = -\frac{1}{2}.$$

Составляем искомую матрицу

$$J = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

и соответствующую замену переменных

$$y_1 = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}, \quad y_2 = \frac{-x_1 + x_2}{\sqrt{2}},$$

представляющую поворот координатных осей на угол $\pi/4$ против часовой стрелки и приводящую уравнение $u_{x_1x_2}=0$ к виду одномерного волнового уравнения $v_{y_1y_1}-v_{y_2y_2}=0$.

1.3. Постановка некоторых задач математической физики

Уравнения с частными производными редко рассматривают отдельно, сами по себе. В приложениях они обычно сопровождаются *начальными* и (или) *граничными условиями*, которые соответствуют физическому смыслу задачи.

1. Задача Коши для волнового уравнения

В случае задачи Коши волновое уравнение

$$u_{tt}(x,t)-\Delta u(x,t)=f(x,t) \quad (x\in\mathbb{R}^n,\ t>0) \tag{1.3}$$

рассматривается во всем пространстве $\mathbb{R}^n$, а при $t=0$ дополнительно задаются значения $u(x,t)$ и $u_t(x,t)$:

$$u|_{t=0}=\varphi(x) \quad (x\in\mathbb{R}^n), \tag{1.4}$$

$$u_t|_{t=0}=\psi(x) \quad (x\in\mathbb{R}^n). \tag{1.5}$$

Соотношения (1.4), (1.5) называются *начальными условиями*. Задача нахождения решения уравнения (1.3), удовлетворяющего условиям (1.4), (1.5), называется *задачей Коши для волнового уравнения*.

2. Задача Коши для уравнения теплопроводности

В задаче Коши для уравнения теплопроводности

$$u_t(x,t)-\Delta u(x,t)=f(x,t) \quad (x\in\mathbb{R}^n,\ t>0), \tag{1.6}$$

рассматриваемого во всем пространстве $\mathbb{R}^n$, лишь значения $u(x,t)$ задаются при $t=0$:

$$u|_{t=0}=\varphi(x) \quad (x\in\mathbb{R}^n). \tag{1.7}$$

Задача (1.6), (1.7) называется *задачей Коши для уравнения теплопроводности*.

3. Краевые задачи для уравнения Пуассона

Уравнение Пуассона

$$-\Delta u(x)=f(x) \quad (x\in Q) \tag{1.8}$$

в (ограниченной) области $Q \subset \mathbb{R}^n$ часто рассматривается вместе с одним из следующих трех *граничных условий*:

$$u|_{\partial Q} = \gamma(x) \quad (x \in \partial Q), \tag{1.9}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial Q} = \gamma(x) \quad (x \in \partial Q) \tag{1.10}$$

или

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma(x)u\right)\right|_{\partial Q} = \gamma(x) \quad (x \in \partial Q). \tag{1.11}$$

Здесь $\nu = \nu(x)$ — единичный вектор внешней нормали к границе ∂Q в точке $x \in \partial Q$, $\partial u/\partial \nu$ — нормальная производная на ∂Q, а $\sigma(x)$ — известная неотрицательная функция на ∂Q. Условие (1.9) предписывает заданные значения искомой функции $u(x)$ на ∂Q. Задача (1.8), (1.9) называется *задачей Дирихле* или *первой краевой задачей*. В условии (1.10) на ∂Q задаются значения нормальной производной $\partial u/\partial \nu$. Задача (1.8), (1.10) называется *задачей Неймана* или *второй краевой задачей*. Условие (1.11) связывает граничные значения искомой функции и ее нормальной производной. Задача (1.8), (1.11) называется *задачей Робена* или *третьей краевой задачей*. Во всех случаях функция γ — известная функция, заданная на ∂Q. Однородное уравнение (1.8), $\Delta u = 0$, называется *уравнением Лапласа*.

4. Смешанные задачи для волнового уравнения

В случае, когда волновое уравнение рассматривается в пространственной области $Q \subset \mathbb{R}^n$, естественно ставить *начально-краевую*, или, по-другому, *смешанную* задачу. В такой постановке волновое уравнение

$$u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t) \quad ((x,t) \in \Omega_T = Q \times (0,T)) \tag{1.12}$$

дополняется как начальными условиями

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \quad (x \in Q), \tag{1.13}$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x) \quad (x \in Q), \tag{1.14}$$

так и граничными условиями, которые могут быть первого типа

$$u|_{\Gamma_T} = \gamma(x,t) \quad ((x,t) \in \Gamma_T = \partial Q \times (0,T)), \tag{1.15}$$

второго типа

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_T} = \gamma(x,t) \quad ((x,t) \in \Gamma_T) \tag{1.16}$$

или третьего типа

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma(x,t)u\right)\Big|_{\Gamma_T} = \gamma(x,t) \quad ((x,t) \in \Gamma_T). \tag{1.17}$$

Здесь $\nu = \nu(x)$ — единичный вектор внешней нормали к боковой поверхности Γ_T цилиндра Ω_T в точке $(x,t) \in \Gamma_T$, $\partial u/\partial\nu$ — нормальная производная на Γ_T и $\sigma(x,t)$ — известная неотрицательная функция на Γ_T. Задача (1.12), (1.13), (1.14), (1.15) называется *первой начально-краевой задачей* или *первой смешанной задачей* для волнового уравнения. Задача (1.12), (1.13), (1.14), (1.16) называется *второй начально-краевой задачей* или *второй смешанной задачей* для волнового уравнения. Задача (1.12), (1.13), (1.14), (1.17) называется *третьей начально-краевой задачей* или *третьей смешанной задачей* для волнового уравнения. Здесь γ — заданная функция на Γ_T.

5. Смешанные задачи для уравнения теплопроводности

Аналогично для уравнения теплопроводности

$$u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t) \quad ((x,t) \in \Omega_T = Q \times (0,T)) \tag{1.18}$$

в (ограниченной) пространственной области $Q \subset \mathbb{R}^n$ задача (1.18), (1.13), (1.15) называется *первой начально-краевой задачей* или *первой смешанной задачей* для уравнения теплопроводности. Задача (1.18), (1.13), (1.16) называется *второй начально-краевой задачей* или *второй смешанной задачей* для уравнения теплопроводности. Задача (1.18), (1.13), (1.17) называется *третьей начально-краевой задачей* или *третьей смешанной задачей* для уравнения теплопроводности.

Конечно, фигурирующие в приведенных задачах начальная функция φ и граничная функция γ имеют различный физический смысл в зависимости от типа уравнения и типа краевого условия.

§ 2. Необходимые сведения из функционального анализа и теории функций

2.1. Интеграл Лебега

В этом пункте достаточно коротко будут изложены основные факты, связанные с интегралом Лебега. Читателям, интересующимся доказательствами, порекомендуем книги [5, гл. V] и [14, гл. 10]. Конструкция интеграла Лебега обладает рядом преимуществ по