ЛЕКЦИЯ 1

СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

- О принципах работы систем глобального позиционирования
- Пространство-время
- Преобразования координат
- Преобразования Лоренца
- О скорости света
- О разности хода часов и лоренцевом сокращении длин
- О парадоксе шеста и сарая
- О парадоксе близнецов
- О смысле соотношения $E_0 = mc^2$

Эту лекцию мы начнём с обсуждения работы систем глобального позиционирования. Конечно, инженер — специалист по ГЛОНАСС и/или GPS сообщил бы больше технических деталей. Мы же рассмотрим лишь общие принципы определения положения объектов на поверхности Земли и расскажем, почему для этого нужна теория относительности.

Возможно, нам следует подчеркнуть, что конкретная техническая реализация различных элементов систем позиционирования может быть устроена не так, как изложено ниже. Это может быть связано с финансовыми или технологическими сложностями. В любом случае нашей задачей здесь является не рассказ о самих этих системах, а обсуждение причин, по которым для их работы необходимо знание теории относительности.

После обсуждения ГЛОНАСС и GPS в этой и следующей лекциях мы расскажем о самой теории относительности (специальной и общей), а также о распространённых мифах на эту тему. Закончим мы первую лекцию формулировкой и объяснением некоторых известных парадоксов.

§ 1. О принципах работы систем глобального позиционирования

Начнём с небольшого отступления. Представим себе систему шарниров, соединённых стержнями. Для наглядности возьмём сначала плоские многоугольники, в вершинах которых находятся шарниры, а рёбра состоят из стержней, как изображено на рис. 1.1 и 1.2. Будем считать, что длины стержней меняться не могут.

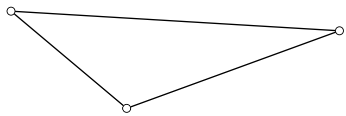

Рис. 1.1

Чем выделяется треугольник из всех плоских многоугольников? Его невозможно деформировать. Например, четырёхугольник можно сжать или растянуть, не выходя за рамки плоскости, в которой он лежит, как изображено на рис. 1.2. Понятно, что и любой другой многоугольник с числом сторон больше трёх не является жёсткой фигурой.

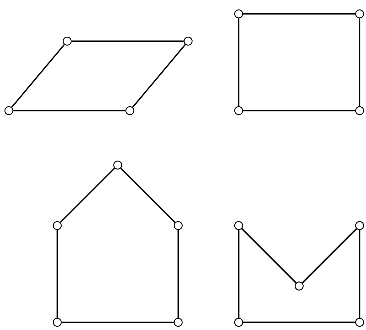

Рис. 1.2

Главный вывод, который можно сделать из этого простого наблюдения, следующий. Допустим, нам надо найти положение некоторой точки в пределах заданной плоскости. Какая минимальная информация необходима для этого? Из сказанного выше следует, что достаточно знать положение как минимум двух реперных вершин (на рис. 1.3 они изображены белыми кружками) и расстояния от них до искомой точки, т. е. длины отрезков 2 и 3.

Однако при таких условиях искомую точку можно перепутать с «паразитной», которая изображена звездой. Действительно, ведь по данному отрезку и длинам сторон можно построить два треугольника в плоскости. Как избавляться от паразитной точки, мы расскажем ниже.

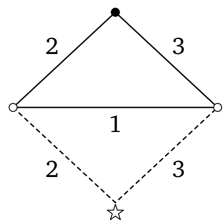

Рис. 1.3

Теперь представим пространственные фигуры из стержней и шарниров. Несложно увидеть, что в этом случае жёсткой фигурой будет пирамида с треугольными гранями (рис. 1.4).

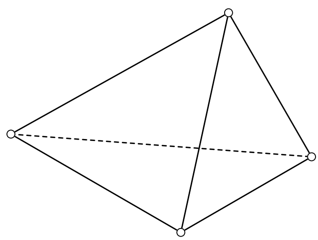

Рис. 1.4

Действительно, многогранник, все грани которого имеют, например, четыре угла, можно деформировать (как изображено на рис. 1.5).

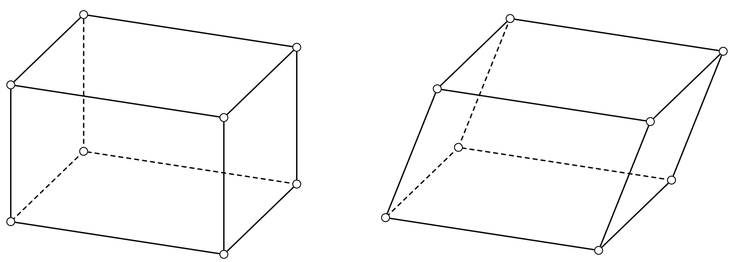

Рис. 1.5

Понятно, что и другие фигуры в пространстве, с большим числом граней, чем у пирамиды, не являются жёсткими. А также можно деформировать пирамиды, основания которых имеют больше углов, чем три (рис. 1.6).

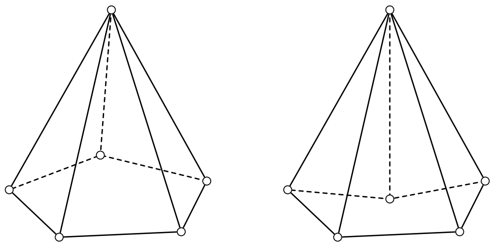

Рис. 1.6

Пирамида и треугольник, в отличие от других описанных здесь фигур, обладают тем важным свойством, что любая их вершина соединена стержнями со всеми остальными вершинами. Поэтому только треугольник и пирамида являются жёсткими.

Соответственно, как и в двумерном случае, если известны положения трёх реперных вершин, а также длины трёх рёбер пирамиды (на рис. 1.7 это рёбра 4, 5 и 6), то можно найти координаты искомой точки в трёхмерном пространстве.

Опять же, это получится сделать только с точностью до «паразитной точки». Действительно, ведь по заданному треугольнику в пространстве, как по основанию, можно построить две пирамиды с тем же набором рёбер: одну — над, а другую — под ним, как изображено на рис. 1.7 («паразитная точка» обозначена ромбиком).

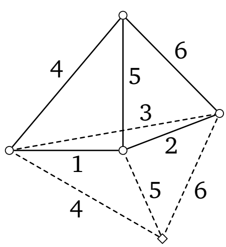

Рис. 1.7

Аналогично для определения положения точки в четырёхмерном пространстве нам понадобится четырёхмерная пирамида, состоящая из пяти вершин и десяти рёбер. При этом каждая из вершин пирамиды соединена со всеми другими. Это необходимо для жёсткости фигуры. Задача опять же будет решена с точностью до неоднозначности в виде паразитной точки.

В системах GPS и ГЛОНАСС в качестве реперных вершин используются спутники и антенны на Земле. Для определения положения объекта на поверхности Земли в данный момент времени необходимо, чтобы в так называемой зоне его радиовидимости были хотя бы четыре реперные вершины, а для определения длин рёбер пирамиды используются радиосигналы, испускаемые спутниками и антеннами и получаемые смартфонами. Объект, положение которого определяется, и четыре реперные точки составляют пять вершин четырёхмерной пирамиды, аналогичной той, что обсуждалась в предыдущем абзаце, но помещённой в четырёхмерное пространство-время, а не пространство.

Итак, представим себе, что имеются четыре спутника — реперные вершины — в космосе и смартфон на Земле — объект, положение которого требуется определить. Радиосигналы от спутников идут во все стороны и достигают смартфона (рис. 1.8). Они распространяются со скоростью света в вакууме. Мы пренебрежём тем, что часть пути радиосигнал идёт в атмосфере, где он распространяется несколько медленнее света. Для правильной работы системы позиционирования все эти явления учитываются, но нам важно показать, как эффекты именно теории относительности влияют на точность GPS и ГЛОНАСС.

Пусть сигнал от спутника под номером i, где i может принимать значения $1, 2, 3, 4$, распространяется до смартфона за

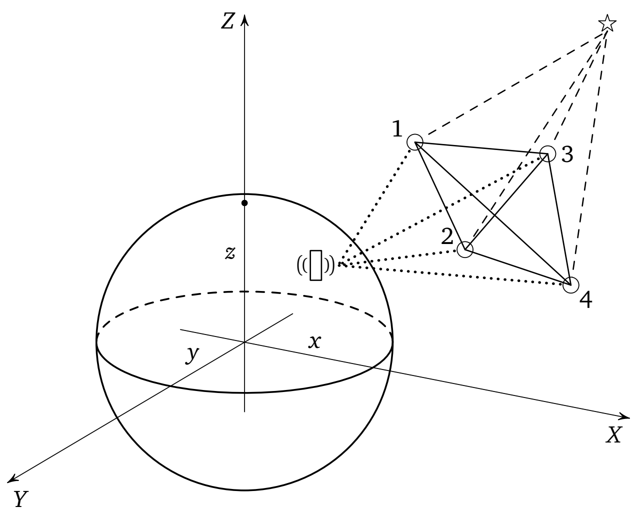

Рис. 1.8. Спутники изображены белыми кружками, паразитная точка — звездой, поверхность Земли — шар с центром в начале координат

время $t-t_i$, где t_i — это момент времени излучения сигнала спутником под номером i, а t — момент его получения смартфоном. Тогда программа в смартфоне определяет, что расстояния до спутников равны соответственно $c(t-t_1)$, $c(t-t_2)$, $c(t-t_3)$, $c(t-t_4)$, где c — это скорость света в вакууме.

Как, зная расстояния и положения спутников, определить координаты смартфона? Тут вступает в игру алгоритм, встроенный в программу смартфона. Он должен достаточно быстро решить некоторую систему уравнений. При её определении мы и увидим, что если пренебречь эффектами специальной и общей теории относительности, то GPS и ГЛОНАСС не будут работать удовлетворительно.

Действительно, посмотрим, что произойдёт, если пренебречь, например, следующими эффектами специальной и общей теории относительности.

— Забудем, что спутники имеют некоторые ненулевые скорости. Это приводит к разности в показаниях часов на спутниках и на Земле. Специальная теория относительности предсказывает такое расхождение.

— Забудем про искривление пространства-времени за счёт земной гравитации, т. е. не учтём разность в показаниях часов на спутниках и на поверхности Земли. Общая теория относительности предсказывает, что такая разность есть.

— Забудем про вращение Земли. Это тоже приводит к расхождению в показаниях часов, как опять же предсказывает общая теория относительности.

В этом случае алгоритм смартфона должен решить следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
0 &= c^2(t-t_1)^2-(x-x_1)^2-(y-y_1)^2-(z-z_1)^2,\\
0 &= c^2(t-t_2)^2-(x-x_2)^2-(y-y_2)^2-(z-z_2)^2,\\
0 &= c^2(t-t_3)^2-(x-x_3)^2-(y-y_3)^2-(z-z_3)^2,\\
0 &= c^2(t-t_4)^2-(x-x_4)^2-(y-y_4)^2-(z-z_4)^2,
\end{aligned} \tag{1.1}$$

где x, y, z — это искомые координаты смартфона, а x_i, y_i, z_i — это координаты спутника под номером i, который, как сказано выше, пробегает значения $1, 2, 3, 4$.

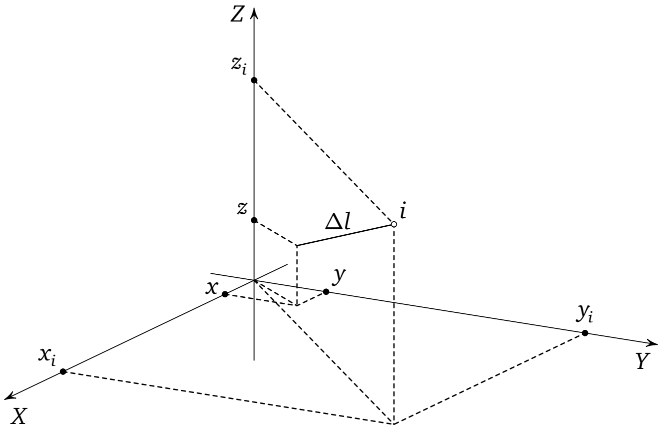

Рис. 1.9

Данная система уравнений имеет следующее происхождение. В декартовых координатах (рис. 1.9) квадрат расстояния между смартфоном x, y, z и каждым из спутников (x_i, y_i, z_i), вычисляется по формуле

$$\Delta l_i^2 = (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2.$$

Знак Δ здесь и далее является просто стандартным обозначением, т. е. расстояние между двумя точками в координатной сетке обозначают как Δl, а не просто как l.

С другой стороны, Δl_i^2 необходимо приравнять к $c^2(t_i - t)^2$ для каждого из значений i, что и приводит к записанной выше системе четырёх уравнений.

Искомыми величинами у нас являются x, y и z. Ведь именно их знание и говорит нам, где находится смартфон. Подчеркнём, что положения спутников x_i, y_i, z_i и моменты испускания сигналов t_i известны.

Отметим, что положения спутников постоянно меняются, ведь они вращаются вокруг Земли. Но их тоже можно определить относительно некоторых реперных вершин/антенн, закреплённых на поверхности Земли. Это также делается описываемым здесь способом.

Таким образом, в системе глобального позиционирования имеется некоторый каркас из фиксированных на поверхности

Земли и вращающихся вокруг неё реперных вершин. Положения всех вершин здесь определены. И мы хотим найти координаты смартфона по отношению к этому каркасу. Как мы объясняли выше, для этого необходимо, чтобы смартфон был в пределах радиовидимости хотя бы из четырёх реперных точек.

Однако, чтобы найти координаты смартфона с удовлетворительной точностью, необходимо хорошо знать величины $c^2(t-t_i)^2$ для каждого значения $i = 1, 2, 3, 4$. Поэтому, помимо радиопередатчика и приёмника, за каждой из реперных вершин должен быть закреплён атомный хронометр. Действительно, ведь если нам известно $t - t_i$, например, с точностью до одной миллионной доли секунды ($1/1\,000\,000 = 10^{-6}$ с), то, умножив этот промежуток времени на скорость света $300\,000\,000 = 3 \times 10^8$ м/с, мы получим, что расстояние определено с точностью до 300 метров.

Устроит ли нас, если система глобального позиционирования ошибётся в определении нашего положения на 300 метров? Наверное, нет. А ведь современные системы определяют положения предметов с точностью до 10 сантиметров или даже ещё точнее. Правда, делают они это для научных или военных целей, а не для смартфонов или автомобилей, но даже и для последних это необходимо делать хотя бы с точностью до нескольких метров.

Таким образом, важно, чтобы величина $t - t_i$ была определена с точностью до одной миллиардной доли секунды ($1/1\,000\,000\,000 = 10^{-9}$ с) или близко к этой величине. Но ведь на смартфоне имеются только обычные часы. Соответственно, время t, показанное им, известно не с желаемой точностью. Его тоже требуется как-то определить. Получается, что в записанной выше системе уравнений на самом деле четыре неизвестных — t и x, y, z. Чтобы их определить, нужны четыре уравнения, что и отвечает четырём реперным вершинам. При этом у наших уравнений имеется два решения, так как эти уравнения квадратные. Одно — это искомые координаты смартфона, а второе — «паразитное».

В сущности, здесь мы описали при помощи уравнений, или, как говорят, алгебраически, то, что выше было изображено геометрически при помощи фигур из стержней и шарниров. Как нетрудно догадаться, посмотрев, например, на рис. 1.8, одно из решений будет либо на поверхности Земли, либо же, если речь идёт о самолёте, над ней, в пределах 10–20 километров, а второе, «паразитное», будет находиться в достаточно глубоком космосе. Алгоритм в программе смартфона отбросит «паразитное» положение и выдаст верные координаты.

Теперь давайте убедимся в том, что при описанной выше точности работы атомных хронометров эффекты теории относительности оказывают существенное влияние на работу систем GPS и ГЛОНАСС. Как мы уже говорили, эти эффекты сказываются на точности определения времени распространения радиосигналов от реперных вершин до искомого положения. Мы проведём примерные оценки, которые, однако, показывают суть описываемых здесь явлений. В реальности, при расчётах, связанных с системами позиционирования, пользуются более тонкими вычислениями. Но нам будет достаточно оценить, насколько существенны релятивистские эффекты (явления, отличающие теорию относительности от механики Ньютона) по порядку величины.

Во-первых, общая теория относительности, о которой речь пойдёт в следующей лекции, предсказывает, что из-за гравитации Земли имеется расхождение между показаниями часов, находящихся на разных высотах. Например, если на земле часы отсчитают промежуток времени Δt_i, то часы спутника покажут

$$\sqrt{\frac{(1-r_g/r)}{(1-r_g/R)}}\Delta t_i,$$

а не просто Δt_i. (Это значит лишь то, что система уравнений (1.1) верна приближённо и её следует поправить с учётом обсуждаемых здесь явлений.) Здесь R — это радиус Земли, r — это радиус орбиты спутника, который по порядку величины равен 10 000 км, а

$$r_g = \frac{2MG}{c^2}$$

— это так называемый гравитационный радиус Земли, который определяется её массой M и гравитационной постоянной Ньютона G. Для тела с массой Земли он приблизительно равен одному сантиметру. (Сравните эту величину с радиусом Земли, который приблизительно равен 6,5 тысяч километров.)

Отношение r_g к r определяет величину гравитационного поля, создаваемого Землёй на расстоянии r от её центра. В частности, если какая-то сила сожмёт тело с массой Земли до размеров шара радиуса r_g, то её гравитационное поле окажется столь большим, что она превратится в чёрную дыру, но это уже предмет лекции по общей теории относительности.

Отношение 1 см к 10 000 км равно $1/1\,000\,000\,000 = 10^{-9}$, т. е. Δt_i отличается от

$$\sqrt{\frac{(1-r_g/r)}{(1-r_g/R)}}\Delta t_i$$

на величину, сравнимую с той, с которой атомные хронометры должны определять время, чтобы системы глобального позиционирования могли работать удовлетворительно, как мы увидели выше. Поэтому обсуждаемый здесь эффект общей теории относительности заведомо будет сказываться на работе GPS и ГЛОНАСС.

Помимо этого, спутники двигаются, а не покоятся (для наших оценок не важно, что двигаются они не по прямой, а по орбите вокруг Земли). Как мы увидим дальше в этой лекции, это означает, что показания часов на спутнике будут отличаться от показаний часов, покоящихся на поверхности Земли. Показания двигающихся часов будут равны не Δt_i, а $\Delta t_i \sqrt{1 - V^2/c^2}$, где c — скорость света в вакууме, а V — скорость движения часов (спутника), которая по порядку величины равна первой космической скорости $10\,000 = 10^4$ м/с. Как нетрудно посчитать, Δt_i опять отличается от промежутка времени, предсказываемого специальной теорией относительности, на величину, приблизительно равную $1/1\,000\,000\,000 = 10^{-9}$ с.

Более того, чем длиннее промежуток времени, тем больше разность между t и t_i — скорректированным релятивистскими эффектами временем на спутнике, ведь часы на Земле и на спутнике постоянно ведут отсчёт по-разному, а мы выше делали оценки только для очень коротких промежутков времени. За сутки величина этой разности становится порядка нескольких десятков микросекунд, т. е. около $1/100\,000 = 10^{-5}$ с, что, как мы уже видели, больше, чем требуемая точность определения промежутка времени, а потому эта поправка существенно сказывается и на точности работы систем позиционирования.