СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Слова «дискретная математика», входящие в название данной книги, употребляют в разных значениях. Иногда противопоставляют «дискретную» математику, рассматривающую конечные или, по крайней мере, хорошо различимые объекты, и «непрерывную», где речь идёт о действительных числах, пределах, непрерывности, производных и т. п. Хотя это противопоставление условно и не всегда применимо (скажем, странно было бы разделять «дискретные» алгебраические кривые над конечным полем и «непрерывные» алгебраические кривые над полем комплексных чисел), некоторый смысл оно имеет.

Говоря о «советской школе дискретной математики», имеют в виду немного другое — прежде всего пионерные работы 1950-х и 1960-х годов (О.Б. Лупанов и его школа) по анализу булевых функций, их классов, обобщений на многозначную логику и др.

Наконец, «дискретная математика» как учебный предмет на младших курсах — это сборная солянка из разных понятий и результатов, которые являются частью базовой математической культуры и необходимы будущим математикам и программистам, но не входят в традиционно сложившиеся курсы начального математического цикла (анализ, алгебра, линейная алгебра).

Именно в этом смысле слова «дискретная математика» используются в названии этой книги, представляющей собой расширенные записки лекций, которые читались на факультете компьютерных наук Высшей школы экономики. Получилась она разнородной: некоторые темы (скажем, про математическую индукцию или про комбинаторику) — это то, что вполне могло бы изучаться в школе и даже когда-то изучалось[1]. В других случаях целью является освоение некоторого языка (скажем, что такое пересечение множеств или бинарное отношение). Или это может быть прологом к рассказу о некоторой математической теории, попыткой выделить какое-то минимальное содержательное начало, которое имело бы смысл рассказать даже тем, кто в дальнейшем с этим не столкнётся. Или просто какой-то красивый результат, который трудно найти доступно изложенным.

В каждую лекцию (в реальности это могло быть несколько лекций) мы старались включить и достаточно трудный материал, чтобы

[1] «Гимназист бойко выводил какую-то формулу, со стуком ломая мел о доску, и всё писал, несмотря на то, что профессор уже сказал ему: “Довольно”, — и велел нам взять билеты. “Ну что, ежели достанется теория сочетаний!” — подумал я, доставая дрожащими пальцами билет из мягкой кипы нарезанных бумажек» (*Толстой Л.* Юность // Детство. Отрочество. Юность. Глава XI. Экзамен математики). Странно, но потом герой повести с успехом отвечает про бином Ньютона.

подготовленным студентам не было скучно. При этом мы не рассчитывали на то, что всё это сразу поймут. Такие более трудные места можно и нужно пропускать, если они кажутся непонятными, и двигаться дальше.

Изложение сопровождается задачами. Часть из них — это вопросы к слушателям для проверки понимания на лекциях, другие — разбирались на семинарах и включались в домашние задания, третьи — могут быть предметом самостоятельной работы для заинтересовавшихся студентов и указанием на возможное развитие темы. Некоторые задачи (и даже целые разделы книги) помечены звёздочкой. Так обозначается материал повышенной трудности, его можно смело пропускать при первом чтении. В общем, как говорил классик, *прими собранье пёстрых глав*. . .

Черновики книги были использованы в преподавании курса «Дискретная математика» на факультете компьютерных наук ВШЭ в 2014–2018 гг. Авторы признательны всем преподавателям и студентам, которые указывали на замеченные неточности в тексте. Практически невозможно вспомнить всех поимённо. Особо отметим В.Ю. Батурина, В.И. Бубнову, С.В. Булгакова, Е.В. Дашкова, Р.Е. Кизилова.

Авторы также благодарны анонимному рецензенту издательства, который сделал много важных замечаний.

Скорее всего, не все неточности и ошибки в книге исправлены, они остаются на совести авторов. Мы будем благодарны тем читателям, которые заметят эти неточности и сообщат нам о них.

Часть I

Начальные примеры

1

ЛЕКЦИЯ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ИНДУКЦИЯ

Математики часо говорят о «доказательствах по индукции», «принципе математической индукции» и так далее — ничего сложного в этом нет, но нужно к этому привыкнуть. С этим приёмом рассуждений мы будем часто сталкиваться, начнём с простых примеров.

1.1. ЗАДАЧА О РАСКРАСКЕ ПЛОСКОСТИ

Задача 1.1. На плоскости проведено несколько прямых. Они делят плоскость на области. Докажите, что области можно так раскрасить в два цвета, чтобы соседние области были покрашены в разные цвета.

Соседними считаются области, имеющие общий участок границы (отрезок или луч, точка не считается).

На рис. 1.1 показана такая раскраска для одной, двух и трёх прямых. Примерно такое обычно рисуют школьники, когда решают эту задачу на математическом кружке, — и часто считают, что решили задачу: показали, что раскрасить можно. И действительно, раскраска удовлетворяет поставленным требованиям. Что не так с этим «решением»?

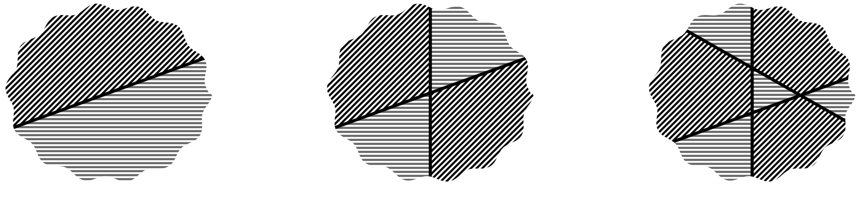

Рис. 1.1. Примеры раскраски для одной, двух и трёх прямых

Проблема в том, что разобраны не все варианты. Для одной прямой действительно ничего другого быть не может, но уже для двух прямых возможна ситуация, когда они параллельны. (Понятно, как тогда красить?)

Для трёх прямых вариантов ещё больше: некоторые из прямых могут быть параллельными, все три прямые могут проходить через одну точку. Попробуйте перечислить все возможные варианты и убедиться, что в каждом случае требуемая раскраска существует. Нужно быть внимательным, чтобы ничего не пропустить, — и чем больше прямых, тем сложнее. Видно, что перебором вариантов задачу не решить, тем более что число прямых может быть сколь угодно большим. Как же быть?

«Ну, хорошо, — скажет школьник, недовольный тем, что его решение забраковали. — Давайте я объясню, как раскрашивать в общем случае. Выберем какую-то область и покрасим её в какой-то цвет. Тогда соседние области нужно красить в другой цвет, их соседей — снова в первый, и так постепенно всё закрасим. Хотите, нарисуйте прямые, и я так всё закрашу.»

Что на это может возразить преподаватель? Ведь действительно, если нарисовать какие угодно прямые, таким способом можно найти требуемую раскраску. Так что, теперь задача решена?

Увы, нет. Проблема в том, не придём ли мы к противоречию. Представьте себе, что мы закрасили начальную область в один цвет, её соседей в другой, соседей соседей снова в первый, и так далее, но, дойдя до какой-то области, обнаружили, что она уже граничит с областями разных цветов, и её нельзя закрасить ни так, ни этак. «Такого не может быть», — скажет школьник, и он действительно прав в том смысле, что так не бывает. Но это пока не доказано. И, скажем, если бы мы рассматривали не прямые, а лучи, то проблема бы действительно возникла (попробуйте закрасить области на рис. 1.2). А предложенное «решение» с постепенной раскраской никак не использует то, что у нас именно прямые.

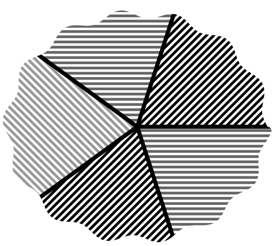

Рис. 1.2. Пять областей нельзя правильно раскрасить в два цвета

Идею с постепенной раскраской можно довести до конца[1], но сейчас мы хотим показать рассуждение по индукции. Рассуждая по индукции, мы идём, так сказать, «от простого к сложному» и постепенно увеличиваем число прямых. Попробуем понять, что происходит при добавлении одной прямой. Пусть есть набор прямых и области, на которые они разбили плоскость, уже покрашены как требуется (рис. 1.3, левый).

Проведём ещё одну прямую (рис. 1.3, средний). Для новой конфигурации старая раскраска не годится, потому что по сторонам этой прямой области одинаковой раскраски. Как исправить положение? Если мы поменяем штри-

[1] Скажем коротко, как это делается. Идя от соседа к соседу, мы меняем штриховку. Проблема возникнет, если на одном пути будет чётное число границ, а на другом нечётное. Тогда при обходе туда — обратно мы вернёмся, пересекши в сумме нечётное число границ, а каждую прямую мы должны пересекать чётное число раз, переходя из одной полуплоскости в другую и возвращаясь обратно — возникает противоречие.

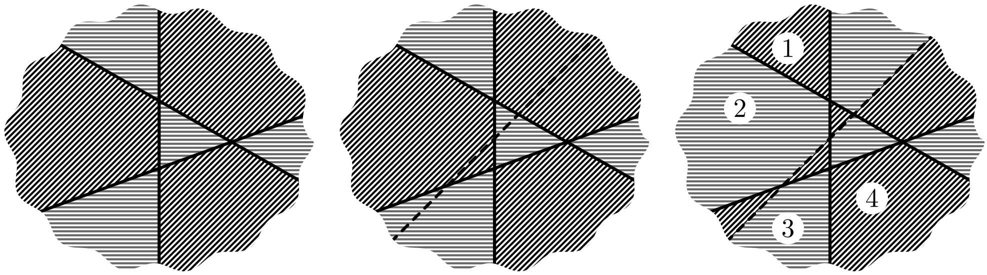

Рис. 1.3. Добавление прямой

ховку у одного из получившихся кусков и сохраним у другого, то в этом месте проблема будет решена, но потом придётся изменять её и в других областях, и где гарантия, что мы снова не придём к противоречию?

Будем действовать более глобально. Изменим штриховку на противоположную у *всех* областей по одну сторону от новой прямой (рис. 1.3, правый, где штриховки поменялись у областей сверху от новой прямой). Мы утверждаем, что теперь получится правильная раскраска (если, конечно, перед добавлением прямой раскраска была правильной). Почему?

Это надо действительно объяснить, иначе к нам можно будет предъявить те же претензии, которые мы раньше предъявляли к школьнику: сформулированное утверждение не доказано. Давайте попробуем. Требование задачи состоит в том, что любой участок границы теперь разделяет области разных штриховок. Граница может быть либо на новой прямой, либо на старой. Случай первый: граница на новой прямой. В старой раскраске области с двух сторон были одной штриховки, а теперь мы с одной стороны изменили её, так что получились области разной штриховки. Случай второй: граница на старой прямой. Тогда мы либо оставили штриховки как было (если изменили её с другой стороны от новой прямой, области 3 и 4 на рис. 1.3), либо изменили оба её вида (области 1 и 2 на том же рисунке), но и тогда штриховки останутся разными, только поменяются местами.

Что осталось сказать, чтобы закончить решение задачи? Для одной прямой утверждение задачи очевидно. Добавив вторую прямую и перекрасив области с одной стороны от неё, мы получим решение для двух прямых. При этом не важно, как именно пройдёт вторая прямая (будет она параллельна первой или нет). Теперь можно добавить третью прямую (снова не важно, как именно она проходит) и перекрасить области с одной стороны, и так далее. В конце концов можно получить раскраску для любого числа прямых.

Программисты сказали бы, что мы описали алгоритм построения требуемой раскраски (рис. 1.4). Пусть нам дана произвольная конфигурация из n прямых. Пронумеруем эти прямые от 1 до n и будем добавлять их постепенно («в цикле»). Добавив очередную прямую, мы перекрашиваем все области с одной стороны от неё, восстанавливая правильность раскраски («инвариант цикла», как говорят программисты). Так делаем, пока все n прямых не будут добавлены.

```
k = 1
нарисовать одну прямую и закрасить две полуплоскости разными штриховками
// имеется правильная раскраска для k прямых
while k ≠ n {
        добавить (k + 1)-ю прямую
        изменить штриховки всех областей с одной её стороны
        k = k + 1
}
```

Рис. 1.4. Алгоритм построения раскраски для n прямых

Математики, конечно, будут несколько удивлены таким изложением (и вздрогнут, увидев «равенство» $k=k+1$). Более привычное для них изложение выглядит так.

Докажем индукцией по n, что *требуемая раскраска существует для всех конфигураций из n прямых*. Назовём это утверждение A_n, где n — параметр индукции.

Базис индукции. При $n=1$ утверждение A_1 очевидно: прямая делит плоскость на две полуплоскости, которые можно покрасить разными штриховками (рис. 1.1, левый).

Шаг индукции. Пусть мы уже знаем, что A_n верно. Докажем, что верно A_{n+1}. Рассмотрим произвольную конфигурацию из $(n+1)$ прямых. Надо доказать, что существует раскраска, удовлетворяющая условию задачи. Выберем какую-то одну прямую (можно взять любую) и временно её удалим. Получится конфигурация из n прямых. Согласно A_n, для неё есть раскраска, удовлетворяющая условию. Теперь вернём удалённую прямую на место и изменим раскраску в одной из полуплоскостей (с одной стороны от удалённой и возвращённой прямой). Получится требуемая раскраска для $(n+1)$ прямых. (Тут надо повторить рассуждения про два типа границ и про то, почему с обоими типами всё будет в порядке.)

С помощью шага индукции можно перейти от A_1 (базис индукции) к A_2, значит, A_2 тоже верно (для любых двух прямых есть раскраска). Теперь снова применим шаг индукции, но уже при $n=2$: раз A_2 верно, то верно и A_3. И так далее: раз A_3 верно, то верно и A_4, затем A_5 и т. п.

1.2. ОБЩАЯ СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВ ПО ИНДУКЦИИ

Давайте повторим схему рассуждения из предыдущего раздела. Доказательства по индукции применяются, когда есть последовательность утверждений $A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots,\ A_n,\ \ldots$, и мы хотим доказать, что все они верны. Принцип индукции говорит, что для этого достаточно сделать две вещи:

- **Базис индукции:** надо доказать, что A_1 (первое утверждение в цепочке) верно.
- **Шаг индукции:** надо доказать (для произвольного n), что A_{n+1} верно, предполагая известным, что A_n верно.

Шаг индукции ещё называют «индуктивным переходом», и даже понятно почему — откуда и куда мы переходим: от A_n к A_{n+1}. Ещё говорят, что при этом переходе мы должны доказать «следование»: доказать, что из A_n следует A_{n+1}. Записывают это следование как «$A_n \Rightarrow A_{n+1}$», и шаг индукции состоит в доказательстве (при произвольном n) утверждения $A_n \Rightarrow A_{n+1}$.

Понятно ли, почему такая схема рассуждения законна? Смотрите: мы доказали A_1 (базис). Кроме того, мы доказали, что из A_1 следует A_2 (шаг индукции при $n=1$). Значит, A_2 тоже верно. Теперь используем шаг индукции при $n=2$: из A_2 следует A_3. Значит, и A_3 верно. И так далее — мы постепенно дойдём до любого A_n.

Тут люди с философским складом ума спросят: а почему, собственно, мы дойдём до любого натурального числа n? Вот мы прибавляем единицу и прибавляем — а вдруг до какого-то n так дойти нельзя в принципе? Или даже более конкретно: если $n=10^{1000}$, то ясно, что на практике дойти до такого n нереально (время жизни Вселенной существенно меньше). И что? На этот вопрос трудно ответить убедительно, потому что за ним тянутся другие: а что такое вообще натуральное число? Что такое число «семь», можно показать на пальцах, а для 10^{1000} никаких пальцев не хватит — и почему мы уверены, что такое число есть? И где, собственно говоря, оно есть? И какие способы рассуждений о натуральных числах допустимы? И почему мы уверены, что не получим какую-то ерунду? Такие вопросы изучаются в математической логике. Мы не будем даже пытаться пересказать ответы на них. Скажем лишь, что в математической логике принцип математической индукции — одна из аксиом натурального ряда (что бы это ни значило).

Вместо этого мы ещё раз продемонстрируем принцип математической индукции в действии и то, как принято записывать рассуждения с его использованием.

Теорема 1.1. *При любом $n \geqslant 1$ выполнено равенство:*

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Доказательство. Обозначим это равенство через A_n и докажем его по индукции.

Базис индукции (A_1):

$$1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2},$$

очевиден.

Шаг индукции. Предположим, что A_n верно, т. е.

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Прибавим к обеим частям этого верного равенства число $(n+1)$, получим

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \\ = \frac{(n+2)(n+1)}{2},$$

т. е. A_{n+1} (надо только переставить сомножители). Шаг индукции и тем самым всё доказательство завершены. ■

Часто, говоря о рассуждениях по индукции, приводят разные житейские примеры. Почему в автобус можно запихнуть любое количество людей? Потому что один человек туда войдёт, и каким бы полным автобус ни был, всегда можно потесниться и впихнуть ещё одного человека. В порядке занудства скажем, что здесь утверждение A_n состоит в том, что в автобус можно поместить n человек, базис индукции — про одного человека, а индуктивный переход соответствует запихиванию ещё одного. Рассуждение это приводит к неверному результату (тысячу человек в автобус явно не запихнуть), потому что сформулированный в качестве шага индукции принцип «всегда можно потесниться» неверен.

Другой житейский пример: если первым в очереди стоит студент, и за каждым студентом в очереди стоит студент, то все в очереди — студенты. Понятно, в чём состоит A_n, где здесь базис и каков индуктивный переход?

Может быть, вы в детстве выстраивали кости домино в цепочку — если первую кость толкнуть, то она упадёт на вторую, вторая — на третью, третья — на четвёртую, и они все рухнут. (Таких видео много в Интернете.) Можно сказать, что примерно так же происходит и рассуждение по индукции: базис индукции — это когда мы толкаем первую кость, а шаг индукции — когда n-я кость, падая, сбивает $(n+1)$-ю.

Или представьте себе цепочку островов в море. Если (базис индукции) построить мост с материка на первый остров, а затем (шаг индукции) построить мосты с n-го острова на следующий, $(n+1)$-й, то на любой остров можно будет попасть. В этой схеме следование $A_n \Rightarrow A_{n+1}$ соответствует мосту: благодаря ему если мы можем попасть на n-й остров, то можем попасть и на $(n+1)$-й.

1.3. ВАРИАНТЫ РАССУЖДЕНИЙ ПО ИНДУКЦИИ

1.3.1. С ЧЕГО НАЧИНАТЬ?

В наших примерах мы начинали с единицы, но это совсем не обязательно. Пусть, скажем, мы хотим сравнить, какое число больше: 2^n или n^2. Посмотрим на несколько первых значений:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
n^2	0	1	4	9	16	25	36	49
2^n	1	2	4	8	16	32	64	128

Возникает впечатление, что при малых n бывает больше то одно, то другое, а потом 2^n уверенно обгоняет. То есть первые значения 2^n и n^2 подсказывают, что справедливо такое утверждение.

Теорема 1.2. $2^n \geqslant n^2$ *при* $n \geqslant 4$.

Как это доказать? Вдруг когда-нибудь потом n^2 начнёт быстро расти и наверстает упущенное, хотя это и кажется странным? Тут снова помогает рассуждение по индукции, только начинать надо с $n = 4$.

Доказательство. Рассмотрим утверждения

$$2^n \geqslant n^2 \tag{A_n}$$

при $n = 4, 5, 6, 7, \ldots$ Рассуждая по индукции, докажем, что первое из них (т. е. A_4) верно (базис индукции) и что из A_n следует A_{n+1} при $n \geqslant 4$ (шаг индукции).

Базис очевиден ($16 \geqslant 16$). Проведём шаг индукции. Для этого посмотрим, во сколько раз увеличиваются 2^n и n^2 при переходе от n к $n+1$. Первое выражение увеличивается в 2 раза, а второе — в

$$\frac{(n+1)^2}{n^2} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$$

раз. При $n \geqslant 4$ это выражение не больше $1{,}25^2 < 2$, поэтому правая часть увеличивается меньше, чем в 2 раза, и не может превысить левую.

Более формально: пусть $2^n \geqslant n^2$, тогда

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \geqslant n^2 \cdot 2 \geqslant n^2 \cdot (1{,}25)^2 \geqslant n^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{n^2} = (n+1)^2.$$

Дальше рассуждение по индукции происходит как раньше: мы знаем, что A_4 верно и из A_4 следует A_5, поэтому и A_5 верно; поскольку из A_5 следует A_6, то и A_6 верно, и т. д. ■

Другими словами, не обязательно начинать индукцию с единицы. Можно начинать и с любого большего числа, и с нуля (который часто тоже считают натуральным числом). В результате утверждение будет доказано для всех натуральных чисел, не меньших того, с которого мы начали.

Задача 1.2. Докажите, что при больших n (выберите границу сами) выполнено неравенство $2^n > n^3$. Тот же вопрос для $1{,}001^n > n^2$ и $n! > 100^n$.

1.3.2. СВЕДЕНИЕ К МЕНЬШИМ

Мы записывали шаг индукции как переход от A_n к A_{n+1}, но можно было бы записать его и как переход от A_{n-1} к A_n. Это ничего не меняет по существу, но формулы станут немного другими. Скажем, для суммирования мы должны были бы из

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) = \frac{(n-1)\big((n-1)+1\big)}{2}$$

получить

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Понятно, как это сделать, прибавив n?

В таких обозначениях легче объяснить, в чём польза от метода математической индукции. Нас просят доказать A_n для произвольного n. Индукция даёт нам некоторое послабление и разрешает принять на веру предыдущее утверждение A_{n-1} (если оно есть). Ясное дело, что от этого наша задача может стать легче. Опять же вернёмся к примеру с суммированием: найти сумму $1 + 2 + \ldots + (n-1) + n$ становится легче, если нам разрешено использовать формулу для $1 + 2 + \ldots + (n-1)$ (достаточно прибавить n).

Можно пойти ещё немного дальше и разрешить себе использовать не одно, а *все* предыдущие утверждения. Это изменит шаг индукции следующим образом.

- **Шаг индукции:** надо доказать (для произвольного n), что утверждение A_n верно, предполагая что все предыдущие утверждения $(A_1, A_2, \ldots, A_{n-1})$ верны.

Такой вариант принципа индукции не меняет сути дела: раньше мы доказывали, что A_n верно исходя из того, что верно A_{n-1}, а поскольку n было произвольным, то, перед тем как доказать, что верно A_{n-1}, мы доказали, что верно A_{n-2}, и так вплоть до утверждения A_2, которое следует из утверждения A_1, истинность которого мы установили, доказав базис.

Более того, в такой формулировке можно даже не разделять базис индукции и шаг индукции: когда мы доказываем A_1, «принимая на веру все предыдущие», этих самых «всех предыдущих» нет, принимать на веру нечего, и мы должны доказать A_1 «с чистого листа», что и даёт базис индукции.

Много лет назад, когда в ходу были трёх- и пятикопеечные монеты (последние называли «пятаки»), этот приём было легко проиллюстрировать такой задачей.

Задача 1.3. Докажите, что любое целое число копеек, начиная с восьми, можно заплатить такими монетами.

Понятно, как это доказать? Начнём пробовать: $8=3+5$, $9=3+3+3$, $10=5+5$, но что дальше? А дальше можно добавлять одну трёхкопеечную монету и из 8 получится 11, из 9 получится 12, из 10 получится 13, потом из 11 получится 14 и т. д.

Более формально это рассуждение можно пересказать так. Мы должны доказать утверждение A_n: *можно заплатить n копеек монетами в 3 и 5 копеек* при всех $n \geqslant 8$. При этом, рассуждая по индукции, считаем известными все предыдущие утверждения A_m (при $8 \leqslant m < n$). Тут есть четыре случая:

- $n=8$: платим $5+3$;
- $n=9$: платим $3+3+3$;
- $n=10$: платим $5+5$;
- $n \geqslant 11$: тогда $m=n-3$ будет больше или равно 8 и меньше n; рассуждая по индукции, мы считаем, что A_m уже известно, т. е. что m копеек уплатить можно, и осталось добавить одну трёхкопеечную монету, чтобы заплатить $m+3=n$.

Вот ещё один пример задачи, когда полезно использовать *все* предыдущие утверждения, а не только последнее.

Задача 1.4. Пусть выпуклый 1000-угольник разрезан на треугольники диагоналями, которые не пересекаются во внутренних точках (но могут иметь общие вершины). Докажите, что получилось 998 треугольников.

Будем доказывать это по индукции — точнее, конечно, не это, а общее утверждение о том, что если выпуклый n-угольник (при $n \geqslant 3$) разрезан на треугольники диагоналями, то этих треугольников $n-2$. Итак, докажем это для какого-то n, считая известным для всех меньших n. Посмотрим на какую-то диагональ, по которой разрезали. (Если диагоналей нет, то $n=3$ и этот треугольник уже разрезан на $(n-2)$ треугольников.) Представим себе, что по этой диагонали разрезали первой. Что тогда получится? С одной стороны будет какой-то k-угольник, а с другой стороны — какой-то l-угольник. Оба числа k и l будут меньше n. При этом $k+l$ будет равно $n+2$, поскольку, считая вершины сначала k-угольника, а потом l-угольника, мы посчитаем все вершины многоугольника, причём концы диагонали посчитаем дважды. По предположению индукции при разрезании на треугольники получится $(k-2)$ и $(l-2)$ треугольников, всего $(k-2)+(l-2)=k+l-4=(n+2)-4=(n-2)$ треугольников, что и требовалось доказать.

1.3.3. ПЕРЕФОРМУЛИРОВКА: ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ЧИСЛА

То же самое решение задачи про монеты можно изложить, и не упоминая индукцию. Будем рассуждать, как говорят математики, от противного. Предположим, что утверждение неверно, и покажем, что такого быть не может: что-то с чем-то не сойдётся («придём к противоречию»).

Пусть не при всех $n \geqslant 8$ сумму в n копеек можно заплатить трёх- и пятикопеечными монетами. *Возьмём наименьшую сумму, которую заплатить нельзя*. Пусть это будет какое-то n. Может ли n быть равно 8, 9 или 10? Нет, потому что мы знаем, как заплатить столько. Значит, $n \geqslant 11$ и $n-3 \geqslant 8$. Поскольку n было наименьшим «плохим» числом (которое нельзя заплатить) среди чисел от 8, то $(n-3)$ заплатить можно. В чём противоречие? Понятно: $(n-3)$ заплатить можно, а n нельзя, хотя видно, что можно (надо добавить трёхкопеечную монету к $(n-3)$).

По существу, это то же самое рассуждение, но только ссылку на принцип индукции мы заменили ссылкой на следующий принцип.

Принцип наименьшего числа. Если есть натуральные числа, обладающие каким-то свойством, то найдётся и наименьшее число с этим свойством.

В приведённом примере мы использовали свойство «неуплачиваемости». Этот принцип равносилен принципу математической индукции[2].

1.4. КАК НЕ НАДО

В жизни всегда есть место ошибкам, и рассуждения по индукции — не исключение. Мы сейчас приведём несколько (намеренно) неверных рассуждений, надеясь, что вы проявите бдительность и скажете: «Какая глупость, здесь же [...]», — указав на ошибку.

Пример 1.5. Докажем, что любое натуральное число n больше 100. В самом деле, принцип индукции позволяет это доказывать, считая известным это утверждение для всех меньших чисел. В частности, мы можем предполагать, что утверждение верно для $n-1$, т. е. $n-1>100$. Тогда $n>101$ и тем более $n>100$, что и требовалось доказать.

Понятно, где тут обман? Вот чуть более сложный пример.

[2] Эта формулировка о равносильности на самом деле требует уточнений. Что значит, что два принципа равносильны, если каждый из них очевиден? Равносильны ли утверждения $2\times 2=4$ и $3\times 3=9$? Уточнение может быть сделано по-разному, один из вариантов мы обсудим в лекции 9.

Пример 1.6. Докажем, что произведение любых $n \geqslant 0$ чисел равно нулю, используя индукцию по n. Базис индукции очевиден: при $n=0$ сомножителей нет, так что перемножать нечего. Шаг индукции. Пусть утверждение верно для некоторого n, т. е. произведение любых n чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равно нулю. Докажем то же утверждение для любых $(n+1)$ чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$. Рассуждая по индукции, мы считаем известным, что

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 0.$$

Умножим это равенство на a_{n+1}, получится

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot a_{n+1} = 0 \cdot a_{n+1} = 0,$$

что и требовалось.

Наверное, и здесь ошибка видна сразу, так что попробуем что-то похитрее.

Пример 1.7. Докажем по индукции такое утверждение A_n: «в любом наборе из n натуральных чисел все числа равны». (Здесь $n = 1, 2, 3, \ldots$)

С базисом индукции всё в порядке: A_1 означает тривиальное утверждение «каждое число равно самому себе».

Докажем законность индуктивного перехода. Пусть A_n верно, докажем A_{n+1}. Рассмотрим набор из $(n+1)$ чисел

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}).$$

Применим утверждение A_n к наборам

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad \text{и} \quad (a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}).$$

Каждый из этих наборов состоит из n чисел, поэтому к ним можно применить A_n (и ничего страшного, что его надо применить дважды: верное утверждение и несколько раз тоже верно). Таким образом, числа и в том, и в другом наборе равны, т. е.

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n$$

и

$$a_2 = a_3 = \ldots = a_{n+1}.$$

Отсюда

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a_{n+1},$$

т. е. утверждение A_{n+1} верно. Применяя принцип математической индукции, получаем, что A_n верно для всех n.

Если и это рассуждение вы легко разоблачили, вот наш последний пример. Коварство этого примера в том, что мы будем доказывать правильное утверждение, неправильным будет только доказательство.

Пример 1.8. Дадим более простое решение задачи 1.4: если разрезать n-угольник диагоналями[3] на треугольники, то получится $(n-2)$ треугольников.

Это утверждение имеет смысл начиная с $n=3$, где оно очевидно (ничего разрезать не надо, и получается как раз: $n-2=1$ треугольник). Так что с базисом индукции всё в порядке.

Шаг индукции: предположим, что для n-угольника это уже известно, а теперь нам дан $(n+1)$-угольник. Так как $n \geqslant 3$, то $n+1 \geqslant 4$, так что можно выбрать две вершины, идущие через одну (разделённые одной вершиной). Соединим их диагональю, отрежется треугольник и останется n-угольник (без одной отрезанной вершины). Мы уже знаем, что он разрезается на $(n-2)$ треугольников (предположение индукции), и ещё надо учесть первый отрезанный, всего будет $n-1$, т. е. как раз $(n+1)-2$, т. е. мы доказали требуемое для $(n+1)$-угольника.

Ну что, понятно, в чём тут ошибка?

На всякий случай скажем, что было неправильно в приведённых рассуждениях.

В первом случае шаг индукции правильный, но с базисом проблема: первое же утверждение неверно.

Во втором случае мы начали со странного утверждения о произведении нуля сомножителей — которое якобы равно нулю, и переход к одному сомножителю был неправильным. (Если уж определять произведение нуля сомножителей, то его надо считать равным единице: тогда при умножении на ещё один сомножитель получится разумный результат.)

В третьем случае в цепочке индуктивных переходов есть разрыв: если мы хотим перейти от $n=1$ к $n=2$, то ничего не выйдет (у двух групп равных чисел не будет общего элемента).

Наконец, в четвёртом случае мы доказываем не то, что обещали: мы лишь показываем, что есть способ разрезать на $(n-2)$ треугольников, а не что любое разрезание содержит столько треугольников. Для доказательства второго (более сильного) утверждения нужна дополнительная лемма: при любом разрезании на треугольники есть диагональ, соединяющая вершины через одну[4].

[3] Точную формулировку см. в задаче 1.4.

[4] Это на самом деле верно, и это можно обосновать с использованием доказываемого утверждения: если n-угольник разрезан на $(n-2)$ треугольников, то сторон больше, чем треугольников, значит, две из них принадлежат одному треугольнику, а это может быть, лишь когда они соседние. Но это обоснование нам не подходит — нельзя ссылаться на то, что мы только ещё собираемся доказывать!

1.5. КАК ДОГАДАТЬСЯ, ЧТО ДОКАЗЫВАТЬ?

Мы уже доказали формулу

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

и это было совсем несложно. А если мы теперь хотим найти аналогичную формулу для суммы квадратов? Такая формула действительно есть.

Пример 1.9.

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Если кто-то сообщит нам эту формулу, мы без труда её докажем по индукции. Базис индукции ($n=1$):

$$1^2=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}.$$

Шаг индукции удобно записать как переход от $n-1$ к n. Для этого запишем нашу формулу для $n-1$:

$$1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}.$$

Прибавим к обеим частям предположения индукции по n^2:

$$\begin{aligned}1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2+n^2&=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+n^2=\\&=\frac{(n-1)n(2n-1)+6n^2}{6}=\frac{n\big((n-1)(2n-1)+6n\big)}{6}=\\&=\frac{n(2n^2-3n+1+6n)}{6}=\frac{n(2n^2+3n+1)}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\end{aligned}$$

что и требовалось. Формула доказана.

Хотя к этому доказательству и не придерёшься — всё корректно и по правилам, — но оно оставляет впечатление жульничества: как мы, собственно говоря, узнали, что надо доказывать именно это? Конечно, можно заявить, что это наше неотъемлемое право, что хотим, то и доказываем. Но всё-таки? На такие вопросы лекторы обычно отвечают «хороший вопрос» за неимением действительно убедительного ответа. В этом конкретном случае есть разные способы догадаться до такой формулы. Например, можно из некоторых общих соображений ожидать, что ответ задаётся многочленом третьей степени, и потом подобрать коэффициенты этого многочлена. Ну, или просто пробовать разные формулы, в конце концов, при современных компьютерах перебор такого рода вполне реалистичен (хотя, конечно, формула для суммы квадратов была известна задолго до компьютеров). Но в целом, да, увы, проблема есть: многие доказательства по индукции производят именно такое впечатление — доказать сравнительно несложно, если знать, что доказывать, но непонятно, как до этого можно было догадаться. Тем более что авторы математических статей и даже учебников не всегда считают себя обязанными распространяться о том, как они додумались до своих результатов, ограничиваясь доказательством того, что они верны.

Мы приведём ещё несколько примеров, где основная трудность именно понять, что надо доказывать, а само доказательство простое.

Пример 1.10. Докажите, что

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{100^2}<2.$$

Казалось бы, при чём тут индукция, если вообще нет никакого параметра? Но можно предположить (и это правильный ход), что на самом деле выбор числа 100 роли не играет, и надо доказывать неравенство

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<2, \tag{A_n}$$

при любом $n>1$. В соответствии с принципом математической индукции мы должны предположить, что A_n верно, и доказать A_{n+1}, т. е. доказать, что

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}<2, \tag{A_{n+1}}$$

Но как? Мы предположили, что некая сумма меньше 2, и должны доказать, что после прибавления к ней ещё одного (положительного) слагаемого $1/(n+1)^2$ она останется меньше 2. Но с какой стати? Сумма ведь увеличится, почему бы ей не пересечь границу и стать теперь больше двух? Кажется, у нас с этим рассуждением по индукции проблемы...

Оказывается, что индукцию всё же применить можно с помощью такого трюка. Будем доказывать *более сильное утверждение*, а именно неравенство

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n} \quad \text{при } n>1. \tag{A'_n}$$

Рассуждая по индукции, предположим, что A'_n верно. Нам надо вывести отсюда, что верно и A'_{n+1}, т. е. что

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}<2-\frac{1}{n+1}.$$

Что ж, прибавим к обеим частям A'_n величину $1/(n+1)^2$, получим, что

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}<2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2},$$

и это неравенство можно продолжить:

$$2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}<2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n(n+1)}=2-\frac{n+1-1}{n(n+1)}=2-\frac{1}{n+1},$$

тем самым получается требуемое A'_{n+1}. Ловко? Ведь действительно возразить нечего — и доказали мы даже больше, чем надо (что не просто меньше 2, а даже ещё на $1/n$ меньше), и индукция теперь сработала. . .

В следующем примере усиление доказываемого утверждения, пожалуй, выглядит ещё более неожиданным.

Пример 1.11. На встрече компании из 15 человек некоторые из участников пожали друг другу руки. Могло ли получиться так, что каждый из 15 участников сделал три рукопожатия (пожал руки трём другим)? Докажите, что нет.

Тут уж совсем непонятно, как можно рассуждать по индукции: числовых параметров тут два (15 и 3), и кажется, что ни один из них не подходит, чтобы сделать его переменным и вести индукцию по нему. И действительно, мы будем действовать иным образом. Во-первых, мы забудем и про 15, и про 3, а будем доказывать общее утверждение: *число участников, сделавших нечётное число рукопожатий, чётно.* Это действительно более сильное утверждение — потому что если все 15 участников сделали по три рукопожатия, то оно нарушается.

Но остаётся вопрос: индукция будет по чему? По какому параметру? Вот по какому: будем представлять себе, что рукопожатия происходят не одновременно, а по очереди (в произвольном порядке), и будем доказывать, что после любого числа рукопожатий наше утверждение о чётности выполнено. То есть параметр индукции — это число рукопожатий.

После такой подготовки само индуктивное рассуждение уже совсем простое. Базис индукции: не сделано ни одного рукопожатия, все участники сделали ноль (чётное число) рукопожатий, количество участников, сделавших нечётное число рукопожатий (ноль), чётно.

Шаг индукции. Пусть сделано ещё одно рукопожатие. Посмотрим на то, сколько перед этим рукопожатий было у его участников. Есть три возможности:

- К моменту рукопожатия оба участника сделали нечётное число рукопожатий. Тогда после него число сделанных каждым из двух участников рукопожатий окажется чётным, т. е. количество «нечётных» участников уменьшится на 2 и останется чётным (раз было чётным по предположению индукции).
- К моменту рукопожатия оба участника сделали чётное число рукопожатий. Тогда после него число сделанных каждым из двух участников рукопожатий окажется нечётным, т. е. количество «нечётных»

участников увеличится на 2 и останется чётным (раз было чётным по предположению индукции).

- Один из двух участников к моменту рукопожатия был «чётным», а другой «нечётным». Тогда после увеличения на 1 они поменяются ролями: чётный станет нечётным и наоборот. Общее количество нечётных участников не изменится и останется чётным.

Задача решена — правда, всё просто (хотя и загадочно)?

1.6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ПО ИНДУКЦИИ И БЕЗ ИНДУКЦИИ

Как говорил председатель акустической комиссии у Булгакова, «разоблачение совершенно необходимо. Без этого ваши блестящие номера оставят тягостное впечатление. Зрительская масса требует объяснения». И впрямь, можно ли как-то «разоблачить перед зрителями» эти наши фокусы?

Частично — да, хотя в некоторых случаях это будет, пожалуй, уже другое доказательство, а не просто изложение того же самого на более понятном языке. Попробуем это сделать для некоторых из наших примеров.

Сумму $S=1+2+3+\ldots+n$ можно вычислить так. Запишем её дважды, причём во второй раз в обратном порядке:

$$\begin{aligned} 2S = 1 \quad &+ \quad 2 \quad + \quad 3 \quad + \ldots + n + \\ + n \quad &+ (n-1) + (n-2) + \ldots + 1. \end{aligned}$$

Теперь посчитаем её по столбикам, в каждом сумма $n+1$, а всего их n, так что $2S=n(n+1)$ и $S=n(n+1)/2$.

Про разрезание n-угольника на треугольники можно рассуждать так. Сумма углов в каждом треугольнике равна 180°. Сложим все углы всех треугольников. С одной стороны, получится $180^\circ\cdot$(число треугольников). С другой стороны, если складывать углы, группируя не по треугольникам, а по вершинам, то получится сумма углов n-угольника, которая — как известно из школьной геометрии — равна $180^\circ(n-2)$. Значит[5], всего треугольников будет $(n-2)$.

Оценить сверху сумму обратных квадратов

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{100^2}$$

[5] В этом рассуждении есть тонкое место. Одно из доказательств формулы для суммы углов n-угольника состоит в том, что многоугольник разрезают на треугольники и замечают, что их $(n-2)$. Если опираться на такое доказательство (что необязательно, есть и другие), получается порочный круг — вроде как мы используем то, что хотим доказать. На самом деле не совсем (вспомните ошибку в доказательстве по индукции): при вычислении суммы углов важно, что *существует* хотя бы одно разрезание n-угольника на $(n-2)$ треугольников, а это сразу ясно: можно провести $(n-3)$ диагоналей из одной вершины.

можно так. Заметим, что при уменьшении знаменателя дроби сама дробь увеличивается, поэтому если мы заменим (начиная с $n=2$) дробь

$$\frac{1}{n^2}$$

на

$$\frac{1}{n(n-1)}=\frac{n-(n-1)}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n},$$

то сумма может только возрасти, и достаточно доказать, что новая сумма меньше 2. Но эта новая сумма «сворачивается» (по-английски есть даже выразительное выражение telescoping sum — напоминающее о трубе телескопа из нескольких частей, вытягивающихся одна из другой), и получается

$$1+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{98}-\frac{1}{99}\right)+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)=1+1-\frac{1}{100}<2.$$

В этом доказательстве видно, как появляется усиление оценки на $1/n$ (в данном случае — $1/100$).

Теперь о рукопожатиях. Пусть-таки действительно каждый из 15 человек в компании сделал по 3 рукопожатия. Сколько всего будет рукопожатий? Очевидно, $15\cdot 3=45$? На самом деле нет: в каждом рукопожатии участвуют двое, и оно будет посчитано дважды — как рукопожатие одного и второго участников. Поэтому мы посчитали удвоенное число рукопожатий, а их было $15\cdot 3/2=45/2=22{,}5$. Получилась ерунда — нецелое число рукопожатий? А почему? Потому что мы предположили, что каждый из 15 человек сделал по три рукопожатия — значит, так не бывает, что и требовалось доказать.

Понятно, как таким способом доказать и наше более сильное утверждение: что число «нечётных» участников чётно? (Если сумма целых чисел чётна, то количество нечётных слагаемых в ней чётно.)

Даже и самую первую задачу — о разрезании плоскости n прямыми и о раскраске частей в два цвета — можно объяснить, не говоря открыто об индукции. Например, можно сказать так. Каждая прямая на (координатной) плоскости задаётся уравнением $ax+by+c=0$, где a, b, c — какие-то числа, причём одно из чисел a и b должно быть ненулевым. Эта прямая делит плоскость на две полуплоскости, в одной из них $ax+by+c$ положительно, в другой — отрицательно.

Ну и что? А вот что. Пусть у нас есть много разных прямых

$$a_1x+b_1y+c_1=0,\quad a_2x+b_2y+c_2=0,\quad \ldots,\quad a_nx+b_ny+c_n=0.$$

Объединение этих прямых задаётся уравнением

$$(a_1x+b_1y+c_1)\cdot(a_2x+b_2y+c_2)\cdot\ldots\cdot(a_nx+b_ny+c_n)=0.$$

Вне прямых левая часть не равна нулю, и в каждой из областей сохраняет знак (либо всюду положительна, либо всюду отрицательна)[6]. Будем красить положительные области в один цвет, а отрицательные в другой.

Почему эта раскраска удовлетворяет условию? Если перейти с одной стороны границы на другую, то мы пересекаем граничную прямую, и соответствующий сомножитель в произведении меняет знак, а остальные его сохраняют — значит, всё произведение меняет знак. Поэтому цвета областей по разные стороны от общего участка границы разные.

В завершение раздела скажем, что наше разделение доказательств на «по индукции» и «без индукции» глубокого смысла не имеет, это, скорее, вопрос изложения. Специалисты по математической логике и компьютерным системам проверки доказательств хорошо знают, что безобидные слова «и так далее», «складывая все эти неравенства» и им подобные на самом деле скрывают ссылку на принцип математической индукции, и если действительно честно интересоваться, что можно сформулировать и доказать без аксиомы индукции, то это нужно делать гораздо более аккуратно (и окажется, что почти ничего).

Однако неглубокий смысл в таком различении становится понятным, как только вы попробуете решать задачи, а не только читать их решения. Заранее трудно сказать, какое рассуждение проще придумать — использующее индукцию явно или опирающееся на другие простые соображения.

Вот ещё пример доказательства, в котором мы ничего не говорим про индукцию явно.

Пример 1.12. Рассмотрим *последовательность Фибоначчи*

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ \ldots,$$

в которой первые два числа равны единице, а каждое следующее равно сумме двух предыдущих. Мы хотим доказать, что *в последовательности Фибоначчи нет двух подряд идущих чётных чисел.*

Почему? Закон образования этой последовательности можно переформулировать так: если a, b, c — подряд идущие члены, то $a = c - b$. Значит, если b и c два подряд идущих чётных члена, то и a тоже чётное (разность двух чётных чисел чётна), так что пара чётных соседей встречается и раньше (a и b). А тогда и предыдущее число чётно, и т. д. до начала последовательности (а первый член нечётный — противоречие).

Как это сказать более формально? Можно сослаться на принцип наименьшего числа и сказать, что из всех пар соседних чётных членов мы берём первую, а потом замечаем, что она не первая. А можно использовать принцип индукции — понятно, как сформулировать утверждение A_n?

[6] Тут тоже есть проблема с обоснованием, по-хорошему надо бы сослаться на непрерывность. Впрочем, если честно, то мы ведь не определяли, что такое «области, на которые прямые делят плоскость», так что тут одной такой ссылкой не обойтись.

Один из вариантов такой: *из двух последовательных членов F_{n-1} и F_n последовательности Фибоначчи хотя бы один нечётный*. Докажем, что из A_n следует A_{n+1}, т. е. что из чисел F_n и F_{n+1} хотя бы одно нечётное. Два варианта: если F_n нечётно, то доказывать нечего, а если F_n чётно, то из предположения индукции следует, что F_{n-1} нечётно. Тогда $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$ есть сумма нечётного и чётного чисел, т. е. нечётное число.

Понятно, почему все три рассуждения — это разные варианты, по существу, одного и того же доказательства?

1.7. ИНДУКЦИЯ И РЕКУРСИЯ

Приём сведения к меньшим значениям параметра знаком и математикам, и программистам. Математики называют его индукцией, а программисты — рекурсией. Мы сравним их подходы на примере старинной головоломки о «ханойских башнях».

Есть три штырька, на которые можно надевать диски. Есть n дисков разного размера. Сначала все диски расположены на одном штырьке от большего к меньшему (рис. 1.5).

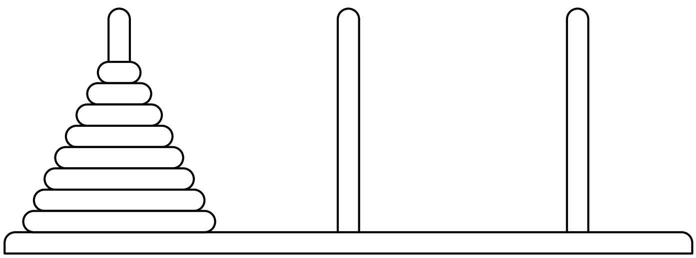

Рис. 1.5. Начальное положение

Задание состоит в том, чтобы *переместить эту пирамидку на другой штырёк, соблюдая правила игры*. Правила эти такие (рис. 1.6). За один ход разрешается переносить верхний в стопке диск на любой другой штырек, но нельзя класть больший диск на меньший.

Почему поставленная задача разрешима при любом n? Математик будет доказывать это индукцией по n. Если $n = 1$, т. е. диск всего один, никаких препятствий нет. Задача решается за один ход.

(Прежде чем читать рассуждение дальше, попробуйте решить задачу для случая двух и трёх дисков — для проверки скажем, что понадобится минимум 3 и 7 ходов соответственно.)

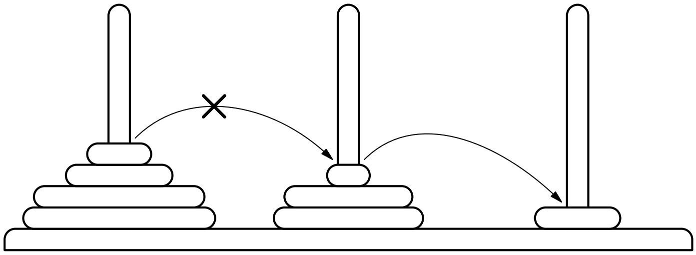

Рис. 1.6. Верхний диск с левого штырька можно переложить на правый, но не на средний, потому что там он ляжет на меньший диск

Продолжаем рассуждение: шаг индукции. Пусть известно, что для n дисков задача разрешима. Надо перенести $n+1$. Это можно сделать в три стадии (рис. 1.7).

I. Перенесём верхние n дисков с первого штырька на второй. Предположение индукции говорит, что это возможно — правда, в отсутствие самого большого диска. Но он тихо и спокойно лежит себе на первом штырьке и ничему не мешает (на него можно класть что угодно).

II. Перенесём самый большой диск с первого штырька на третий.

III. Перенесём n дисков со второго штырька на третий. На третьем штырьке уже лежит самый большой диск, он ничему не мешает, а после завершения этой стадии все диски будут на третьем штырьке в нужном порядке.

Программист — не математик, и его, скорее, интересует не принципиальная разрешимость задачи, а алгоритм её решения. Он скажет: давайте напишем рекурсивную процедуру переноса n дисков со штырька с номером i на штырёк с номером j (считаем, что штырьки пронумерованы от 1 до 3).

```
Move(i, j, n): // перенести n ⩾ 1 верхних дисков с i на j,
               // предполагая, что остальные диски больше
    if n = 1:
        перенести диск с i на j
    else
        k = 6 − i − j // хак: k — третий штырёк, ибо 1 + 2 + 3 = 6
        Move(i, k, n − 1)
        перенести диск с i на j
        Move(k, j, n − 1)
```

Три стандартных вопроса, которые должны возникать по поводу любого алгоритма:

- Почему он правильный?
- Сколько шагов он потребует?
- А нет ли лучшего алгоритма (с меньшим числом шагов)?

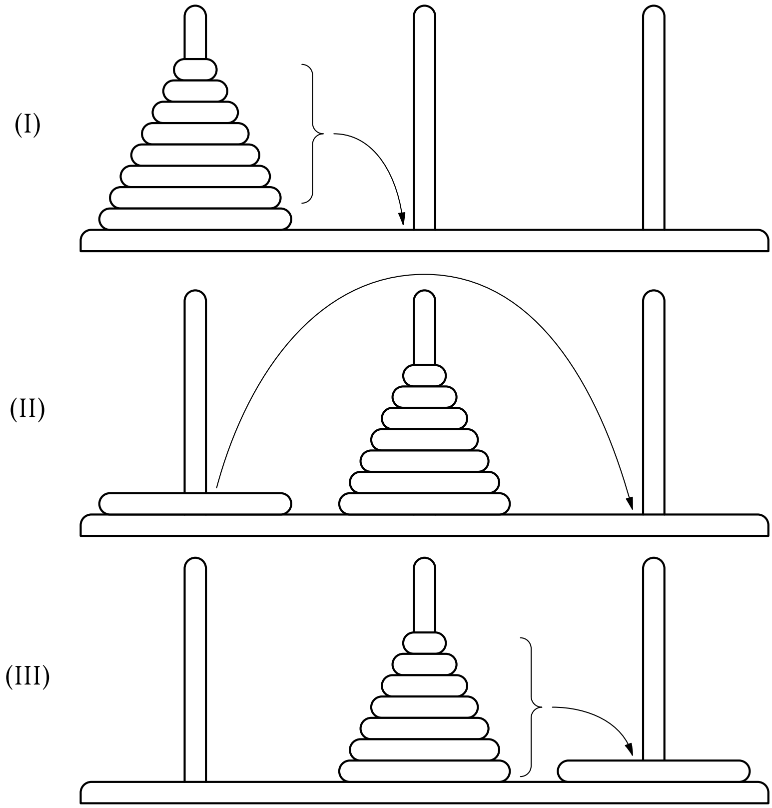

Рис. 1.7. Шаг индукции для «ханойских башен»

Математик и программист, наверное, легко согласятся, что алгоритм правильный (единственная тонкость, про которую важно не забыть, — объяснить, почему лежащие на штырьках бо́льшие диски не мешают).

Число шагов они тоже совместными усилиями легко вычислят: если считать только переносы дисков и обозначить через $T(n)$ число переносов дисков для задачи с n дисками, то из текста процедуры видно, что

- $T(1) = 1$;
- $T(n) = 2T(n-1) + 1$ при $n > 1$.

Отсюда $T(2) = 3$, $T(3) = 7$, $T(4) = 15$, $T(5) = 31$ и т. д. Программист (который, разумеется, наизусть помнит степени двойки) сразу же предположит, что

$$T(n) = 2^n - 1,$$

а математик обрадуется и сразу скажет, что это легко доказать по индукции: если $T(n) = 2^n - 1$, то $T(n+1) = 2T(n) + 1 = 2 \cdot (2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$. Довольные, они разойдутся по домам, и по пути домой математик сообразит, как доказать, что меньшим числом переносов не обойтись. Это тоже делается по индукции: пусть $T'(n)$ — число переносов при самом экономном решении задачи для n дисков. При решении задачи для $(n+1)$ дисков нам не избежать переноса самого большого диска. (Может быть, его будут двигать несколько раз, но рассмотрим какой-то из них, скажем, первый.) В момент этого переноса два штырька (откуда и куда переносят наибольший диск) должны быть свободны. Значит, все диски (и в единственно возможном порядке — пирамидка) должны быть на третьем диске. То есть до выбранного момента (перенос самого большого диска) и после мы волей-неволей будем решать задачу переноса n дисков. Отсюда $T'(n+1) \geqslant 2T'(n)+1$, откуда индукцией получаем $T'(n) \geqslant 2^n - 1$.

Для порядка скажем ещё (следуя французской Википедии), что эту задачу придумал французский математик XIX в. Эдуард Люка, равно как и название «ханойские башни» и байку о том, что буддийские монахи перекладывают пирамидку из 64 дисков в ожидании конца света (который настанет, как мы теперь знаем, через $(2^{64}-1)$ шагов, — не так и долго при современных мощностях процессоров).

1.8. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА НЕРАВЕНСТВ ПО ИНДУКЦИИ

До сих пор мы приводили разные примеры рассуждений по индукции не потому, что именно эти результаты зачем-то важны, а потому, что они показывали, как индукция работает. Теперь мы потренировались и можем перейти к более важным результатам. В этом разделе мы используем индукцию для доказательства двух неравенств.

1.8.1. НЕРАВЕНСТВО БЕРНУЛЛИ

Первое из них совсем простое и называется неравенством Бернулли в честь математика XVII в. Якоба Бернулли (хотя, вероятно, и до него это мало кого удивило бы). Оно говорит, что если каждый год деньги в банке растут на 1%, то за 100 лет они более чем удвоятся. Более чем — потому, что платят 1% не от исходной суммы, а от текущей, которая больше (это иногда называют «сложными процентами»). Велика ли разница? Можно подсчитать:

$$(1+0{,}01)^{100} \approx 2{,}7048\ldots > 2$$

В курсе математического анализа объясняется, что так получаются приближения к основанию натуральных логарифмов e, но нас сейчас интересуют более простые вещи.

Теорема 1.3 (неравенство Бернулли).

$$(1+h)^n \geqslant 1+nh$$

при любом действительном $h \geqslant -1$ и любом натуральном n.

При $h \geqslant 0$ доказательство, по существу, уже дано: при вычислении очередной степени мы умножаем число (уже большее 1) на $(1+h)$ и потому увеличиваем его по крайней мере на h. При $h<0$ это рассуждение применять нельзя, потому что $(1+h)^n$ меньше 1. Но неравенство тоже легко доказать наглядно. Изменим знак у h и будем доказывать, что

$$(1-h)^n \geqslant 1-nh$$

при $0<h<1$ и любом натуральном n. Что это значит в банковских терминах? Это значит, что если в год берут, скажем, 1% за хранение (отрицательные проценты реально бывают, кстати), то за 10 лет возьмут не больше 10% исходной суммы. И понятно почему: в следующие годы возьмут процент с текущего капитала, и это будет меньше, чем от начального.

Интересно, что при доказательстве по индукции различать эти два случая нет необходимости.

Базис индукции. При $n=0$ неравенство Бернулли очевидно: $1 \geqslant 1$.

Шаг индукции. Пусть $(1+h)^n \geqslant 1+nh$ при некотором натуральном n (индуктивное предположение). Поскольку $h \geqslant -1$, то $1+h \geqslant 0$ и умножение на $1+h$ обеих частей индуктивного предположения сохраняет неравенство. Получается

$$(1+h)^{n+1} = (1+h)^n(1+h) \geqslant (1+nh)(1+h) = \\ = 1+(n+1)h+nh^2 \geqslant 1+(n+1)h$$

(в последнем переходе мы использовали, что квадрат всегда неотрицателен независимо от знака h).

Задача 1.13. Докажите, что $0{,}99^{100} \leqslant 1/2$.

1.8.2. СРЕДНЕЕ АРИФМЕТИЧЕСКОЕ И СРЕДНЕЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ

Среднее арифметическое n чисел $a_1, \ldots, a_n$ определяется как

$$\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}.$$

Слово «среднее» тут уместно в том смысле, что среднее арифметическое находится между наименьшим и наибольшим из чисел (понятно почему?). Но, конечно, оно не будет «средним» в обычном смысле: из пяти чисел 1, 2, 3, 4, 10 среднее арифметическое равно 4, а не 3. Статистики скажут, что среднее равно 4, а *медиана* равна 3 — наверное, вы слышали сетования, что из-за сильного неравенства медианный доход сильно меньше среднего.

Так или иначе, нас сейчас интересует сравнение среднего арифметического со *средним геометрическим*. Это второе определяется для положительных чисел как

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

Теорема 1.4 (неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом). *Среднее геометрическое положительных чисел не больше их среднего арифметического.*

Скажем, среднее геометрическое чисел 1 и 9 равно 3 и меньше их среднего арифметического (которое равно 5).

Для двух чисел получается неравенство

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

Если умножить его на 2 и возвести в квадрат, то получится равносильное неравенство

$$4ab \leqslant (a+b)^2,$$

или (перенося всё в правую часть)

$$a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0.$$

В левой части легко узнать квадрат разности, так что для двух чисел неравенство доказано (и заодно видно, что оно обращается в равенство лишь при $a = b$ — понятно почему?).

Но как доказать его для большего количества чисел? Есть много разных способов. Например, любители математического анализа заметили бы, что среднее геометрическое получается, если перейти к логарифмам, взять среднее арифметическое, а потом вернуться обратно. Свойство функции «логарифм», называемое выпуклостью вверх и проверяемое вычислением знака второй производной, говорит, что после этого перехода туда-обратно получится меньше, чем просто среднее арифметическое.

Но мы обойдёмся без таких экскурсов, рассуждая по индукции. Для начала сформулируем такое следствие неравенства:

> *Если произведение n положительных чисел равно 1, то их сумма не меньше n.*

Это частный случай неравенства, когда среднее геометрическое равно единице (понятно почему?).

Теперь заметим, что достаточно доказать этот частный случай, от него можно перейти к общему. В самом деле, если умножить все n чисел на какую-то константу $c > 0$, то и среднее арифметическое, и среднее геометрическое умножатся на c, поэтому неравенство между ними останется верным, если оно было верным, и останется неверным, если было неверным. Поэтому, если мы хотим доказать неравенство о средних для произвольных чисел, можно поделить все их на такую константу, чтобы среднее геометрическое стало равным 1 (т. е. на это самое среднее геометрическое), затем воспользоваться следствием и потом вернуться обратно.

Итак, осталось доказать следствие. Мы сделаем это по индукции.

Базис индукции: при $n = 1$ есть единственное число, равное 1, и сумма с единственным таким слагаемым не меньше 1. (Тут всё чисто, но если у вас есть сомнение, не будет ли какой-то беды от рассмотрения суммы с единственным слагаемым, заметьте, что случай $n=2$ мы уже тоже разобрали, и, в крайнем случае, можно сослаться на него.)

Шаг индукции. Пусть для n чисел это уже известно, и мы рассматриваем $(n+1)$ чисел, для которых

$$a_1 a_2 \cdot a_n \cdot a_{n+1} = 1.$$

Надо показать, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} \geqslant n+1$. Как воспользоваться предположением индукции? Откуда взять n чисел, произведение которых равно 1? Ничего лучшего, чем соединить два числа в одно, тут в голову не приходит, так что попробуем так: пусть $a = a_1 a_2$, тогда

$$a \cdot a_3 \cdot \ldots a_n a_{n+1} = 1,$$

и потому

$$a + a_3 + \ldots + a_n + a_{n+1} \geqslant n,$$

другими словами,

$$a_1 a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_{n+1} \geqslant n.$$

Чего мы добились таким способом? В левой части у нас $a_1 a_2$, а нужно $a_1 + a_2$, а в правой части n, а нужно $n+1$. Чтобы перейти от того, что есть, к тому, что нужно, нам хорошо было бы знать, что

$$a_1 + a_2 \geqslant a_1 a_2 + 1, \qquad (*)$$

но надежды на это мало: числа a_1 и a_2 могут быть произвольными, и видно, скажем, что при $a_1 = a_2 = 2$ левая часть 4, а правая 5, и неравенство $(*)$ не выполняется.

Можно даже понять, когда неравенство $(*)$ выполняется и когда нет. Перенесём всё в правую часть и перепишем его в равносильном виде

$$a_1 a_2 + 1 - a_1 - a_2 \leqslant 0.$$

Левую часть теперь можно разложить на множители:

$$(a_1 - 1)(a_2 - 1) \leqslant 0,$$

и видно, что $(*)$ выполняется, когда одно из чисел a_1 меньше единицы, а второе больше (и равенство тоже допустимо). Но этого нам никто не гарантирует. Что же делать?

В этом месте пора кричать «Эврика!», как Архимед в ванне. Да, нам никто не гарантирует, что $a_1 \leqslant 1$ и $a_2 \geqslant 1$ (или наоборот). Но ведь числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ все равноправны, мы можем их переставлять в любом порядке, от этого ни сумма, ни произведение не изменятся. Раз их произведение равно единице, то среди них обязательно должно быть число, не большее единицы (если они все были бы больше, то и произведение было бы больше). Произведение остальных чисел не меньше единицы, значит, среди них есть число, не меньшее единицы. Так и возьмём их в качестве a_1 и a_2, и наше рассуждение пройдёт!

Другими словами, нужно рассуждать так: заметим, что в произведении $(n+1)$ чисел можно взять сомножитель, не больший 1, а из оставшихся выбрать сомножитель, не меньший 1, и *именно эти два сомножителя* объединить, применив предположение индукции к их произведению и к оставшимся $(n-1)$ числам. При таком подходе рассуждение благополучно завершается, и наше следствие, а с ним и неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом доказаны.

1.9. ПРИМЕР ИЗ АЛГЕБРЫ: СИСТЕМЫ ОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ

Есть такая народная мудрость: если в задаче n неизвестных, то чтобы все их определить, нужно составить n уравнений, меньшего числа не хватит, останется неоднозначность. Иногда ещё говорят, что есть n «степеней свободы», каждое уравнение отбирает одну из них, и если уравнений меньше n, то какая-то свобода останется.

Как всегда, при буквальном понимании это неверно: скажем, уравнение $x^2+y^2=0$ определяет сразу две переменные: $x=0$ и $y=0$ (иначе сумма квадратов положительна). И таких примеров много, скажем, уравнение $x^2-2xy+2y^2-2y+1=0$ тоже однозначно определяет обе переменные (и люди, недавно готовившиеся к «вступительным экзаменам», это сразу же увидят). Но принцип этот тем не менее имеет смысл и в каких-то ситуациях работает, и в этом разделе мы рассмотрим самую простую такую ситуацию.

Теорема 1.5. *Система линейных однородных уравнений, в которой уравнений меньше, чем неизвестных, имеет ненулевое решение.*

Надо только объяснить употребляемые термины. *Линейное уравнение* — это уравнение вида

$$a_1x_1+\ldots+a_nx_n=b.$$

Здесь $x_1,\ldots,x_n$ — *переменные* (или, как ещё говорят, *неизвестные*), а $a_1,\ldots,a_n$ — числа, называемые *коэффициентами*; число b называется *свободным членом*. Если свободный член равен нулю, то уравнение называется *однородным*. Набор значений переменных называется *решением* уравнения, если при этих значениях уравнение обращается в равенство. Если есть несколько уравнений, или, как говорят, *система уравнений*, то её решением называют набор значений, при которых все уравнения обращаются в равенства. Например, набор из нулей является решением любого однородного уравнения (и любой системы однородных уравнений).

Теорема говорит о ситуации, когда есть и другие решения (ненулевые — не все переменные равны нулю, хотя некоторые переменные и могут).

В формулировке теоремы есть одна тонкость: как мы считаем, в уравнении $0x_1+7x_2=0$ сколько переменных — одна или две? Мы будем считать, что две, пусть одна из них входит с нулевым коэффициентом.

Если не бояться формул, то теорему можно сформулировать так: если $m<n$, то для любых чисел $a_{11}, a_{12} \ldots, a_{1n}, a_{21}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{mn}$ найдутся числа $x_1, \ldots, x_n$, не все одновременно равные нулю, для которых

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Полезно ещё уточнить, что m и n тут целые положительные числа (тогда не надо уточнять, как относиться к системе из нуля уравнений или с нулём неизвестных, хотя это и можно было бы сделать), а коэффициенты и неизвестные — действительные числа. (Можно было бы взять и рациональные, или комплексные, или вообще из любого поля, если знать, что это такое, но рассуждение от этого тоже не изменится, так что будем считать числа действительными.)

Докажем эту теорему индукцией по числу уравнений. План действий такой. Возьмём какую-то переменную. Если она вообще не входит ни в одно уравнение (коэффициенты нулевые), то доказывать нечего, можно взять ненулевое значение для этой переменной и нулевые значения для остальных. Если она входит в какое-то уравнение, то её можно выразить из этого уравнения и подставить это выражение в остальные уравнения, при этом число переменных и уравнений уменьшится на 1, и можно воспользоваться предположением индукции.

Теперь подробно. **Базис индукции:** одно уравнение с $n>1$ переменными. Тут есть два варианта.

(а) Все коэффициенты уравнения нулевые:

$$0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + \ldots + 0\cdot x_n = 0.$$

Любой набор значений переменных является решением такого уравнения. Утверждение теоремы в этом случае выполняется.

(б) В уравнении

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$$

есть хотя бы один ненулевой коэффициент. Без ограничения общности можно считать, что он первый, т. е. что $a_1 \neq 0$ (перенумеруем переменные).

Выберем какие-нибудь ненулевые значения для переменных $x_2, \ldots, x_n$, скажем,

$$x_2 = \ldots = x_n = 1.$$

Значение x_1 выразим из уравнения:

$$x_1 = \frac{1}{a_1}\,(-a_2 - a_3 - \ldots - a_n).$$

Получили ненулевой набор значений переменных, на котором уравнение обращается в истинное равенство:

$$a_1 \cdot \frac{1}{a_1}(-a_2 - a_3 - \ldots - a_n) + a_2 \cdot 1 + \ldots + a_n \cdot 1 =$$
$$= -a_2 - a_3 - \ldots - a_n + a_2 + \ldots + a_n = 0.$$

Поэтому утверждение теоремы в этом случае выполняется. (Понятно, где использовано условие на число переменных? Что нарушится, если переменная только одна?)

Шаг индукции. Мы проводим этот шаг по числу уравнений, поэтому надо предположить, что утверждение выполняется для систем из m уравнений с $n > m$ переменными, и доказать, что оно выполняется и для систем из $(m+1)$ уравнений с $n > m+1$ переменными.

Пусть дана такая система с $(m+1)$ уравнениями. Возьмём первое уравнение

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0.$$

Тут тоже есть два случая.

(а) Если все его коэффициенты нулевые, то любой набор значений переменных обращает это уравнение в равенство. Поэтому можно взять ненулевое решение системы из оставшихся m уравнений с $n > m+1 > m$ переменными, которое существует в силу индуктивного предположения.

(б) Не все коэффициенты первого уравнения нулевые. Без ограничения общности можно считать, что $a_{11} \neq 0$ (перенумеруем переменные). Тогда первое уравнение равносильно уравнению

$$x_1 = -\frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n). \qquad (*)$$

Из этого уравнения значение переменной x_1 однозначно выражается через значения остальных переменных. Подставляя это выражение в уравнение с номером $i > 1$, получаем

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n =$$
$$= -\frac{a_{i1}}{a_{11}}\,(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n) + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n =$$
$$= \Big(a_{i2} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}\,a_{12}\Big)x_2 + \ldots + \Big(a_{in} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}\,a_{1n}\Big)x_n = a'_{i2}x_2 + \ldots + a'_{in}x_n = 0.$$

(Здесь через a'_{ij} обозначены выражения в соответствующих скобках.) При условии первого уравнения эти преобразования сохраняют равносильность, поэтому исходная система равносильна уравнению $(*)$, к которому добавлена система уравнений с m уравнениями и $(n-1)$ переменными

$$\begin{cases} a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = 0, \\ a'_{32}x_2 + \ldots + a'_{3n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a'_{(m+1)2}x_2 + \ldots + a'_{(m+1)n}x_n = 0. \end{cases} \qquad (**)$$

Пока мы не изменили число переменных и уравнений, но разделили систему на части: есть одно уравнение, выражающее x_1 через остальные переменные, и система $(**)$ из m уравнений с $(n-1)$ переменными. У нас было $n > m+1$, поэтому $n-1 > m$, и к системе $(**)$ можно применить предположение индукции, что есть ненулевое решение. У неё есть ненулевое решение (набор значений переменных $x_2, \ldots, x_n$, причём не все эти значения равны нулю). Добавим к нему значение переменной x_1 согласно $(*)$. Получим ненулевое решение исходной системы.

Задача 1.14. Пусть в матрице (прямоугольной таблице) из целых чисел больше столбцов, чем строк. Тогда можно вычеркнуть некоторые (но не все) столбцы таким образом, чтобы в оставшейся матрице сумма чисел в любой строке была чётной.

Указание. Эта задача является вариантом основного результата раздела для случая поля из двух элементов, и можно рассуждать аналогично. Можно рассуждать и иначе, применив принцип Дирихле ко всем суммам множеств столбцов.

1.10. КОДЫ ГРЕЯ

Есть такая игра, когда в столбик пишутся слова, и в каждом следующем можно изменить одну букву:

НОРА
КОРА
КОРТ
КАРТ
.....

Коды Грея — это то же самое, только мы:

- пишем не русские слова, а любые комбинации букв;

- берём не обязательно русские буквы, а любой набор символов (*алфавит*);
- (главное) требуем, чтобы любая комбинация данной длины встречалась по разу и чтобы круг замкнулся, т. е. от последнего слова можно было перейти к первому, тоже изменив одну букву.

Пример 1.15 (двоичные слова). Например, можно рассматривать *двоичные слова*, т. е. слова в алфавите $\{0, 1\}$. Если брать слова длины два, то их четыре:

$$00, 01, 10, 11.$$

Чтобы выполнить требования, достаточно их расположить в таком порядке:

$$\begin{array}{c} 00 \\ 01 \\ 11 \\ 10 \end{array}$$

Заметьте, что от каждого слова к следующему мы переходим, меняя только одну букву, и от последнего слова так же можно перейти к первому.

Геометрически можно представлять себе эти четыре двоичных слова как четыре вершины квадрата, заданные коодинатами, — и ясно, что код Грея соответствует обходу всех вершин по одному разу с возвращением в начало.

Аналогичным образом можно расположить восемь двоичных слов длины 3, для этого их удобно представлять себе в виде вершин куба (рис. 1.8). Можно сделать это и для четырёхбуквенных двоичных слов, если уметь рисовать четырёхмерный куб.

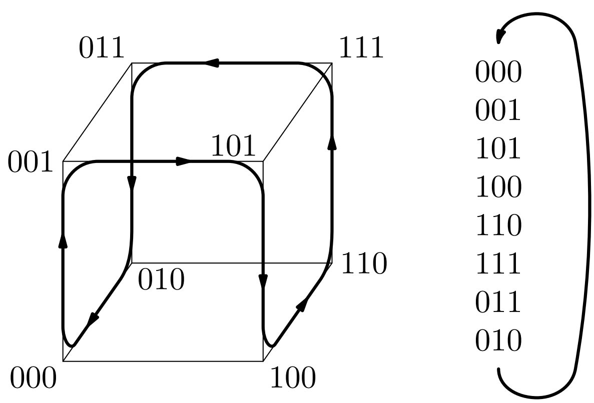

Рис. 1.8. Код Грея для двоичных слов длины 3

Оказывается, что такое возможно для слов произвольной длины n — и не обязательно двоичных, но мы рассмотрим только двоичный случай, поскольку доказательство для него немного проще.

Теорема 1.6. *Можно написать все двоичные слова длины n в таком порядке, чтобы любые два соседних слова, а также первое и последнее слова различались только в одной позиции.*

Доказательство проведём индукцией по n. Мы уже видели, как это сделать для $n=2$ и $n=3$, а для $n=1$ это очевидно (любой из порядков 0, 1 и 1, 0 годится). Поэтому надо провести лишь шаг индукции.

Пусть слова длины n (их ровно 2^n, так как каждый новый бит увеличивает количество слов вдвое) уже расположены в нужном порядке:

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_N,$$

где $N=2^n$. «Нужный порядок» тут означает, что x_i и x_{i+1} (а также x_1 и x_N) отличаются только в одной позиции. Как из этого списка получить список всех слов длины $n+1$? Можно к каждому слову приписать сначала 0, а потом 1 (два варианта для последнего бита комбинируются с N вариантами для предыдущих). Получится

$$x_10,\ x_11,\ x_20,\ x_21,\ x_30,\ x_31,\ \ldots,\ x_N0,\ x_N1.$$

Но этот порядок нам не годится: хотя на первом шаге всё хорошо, x_10 и x_11 отличаются ровно в одной позиции (последней), на втором шаге x_11 и x_20 отличаются в двух позициях: в последней и там, где отличались x_1 от x_2. (Аналогичная проблема будет и при переходе от x_N1 к x_10.)

И что же делать? Возможно, вы уже догадались: надо каждый второй раз добавлять сначала 1, а потом 0, т. е. использовать порядок

$$x_10,\ x_11,\ x_21,\ x_20,\ x_30,\ x_31,\ x_41,\ x_40,\ \ldots,\ x_N1,\ x_N0.$$

В последней паре сначала будет 1, а потом 0, поскольку $N=2^n$ чётно, так что всё корректно замыкается по циклу.

Можно действовать и иначе: сначала ко всем добавить 0, а потом 1, идя в обратном порядке:

$$x_10,\ x_20,\ x_30,\ \ldots,\ x_N0,\ x_N1,\ \ldots,\ x_31,\ x_21,\ x_11.$$

И здесь тоже замыкается правильно. Шаг индукции проведён (и даже двумя способами).

Символически разница между этими двумя способами изображена на рис. 1.9 (вертикальная координата соответствует изменению последнего бита, а движение по кривой — изменению первых N битов), но если эта абстрактная живопись воспринимается как бессмысленная мазня, то и ладно — нужный порядок формально описан выше.

Задача 1.16. Докажите аналогичный результат для произвольного алфавита.

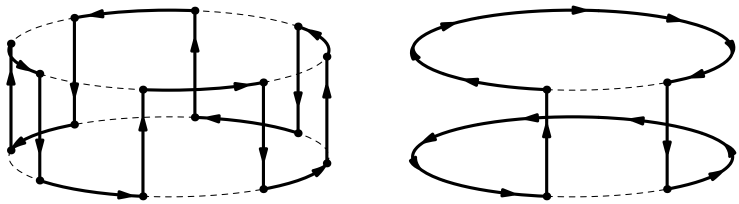

Рис. 1.9. Два варианта индуктивного перехода при построении кодов Грея

Указание. При первом способе будет трудность, если размер алфавита нечётный, но при втором её можно обойти: у нас будет не два уровня, а несколько, и можно перескакивать с уровня на уровень в разных местах цикла.

1.11. ТЕОРЕМА ХОЛЛА О ПРЕДСТАВИТЕЛЯХ

Мы старались выбрать разнообразные примеры рассуждений по индукции, но все они были достаточно простыми. Однако в заключение надо всё-таки привести пример более сложного рассуждения, в качестве которого мы выбрали знаменитую теорему Холла о представителях. Она играет важную роль в теории графов, но её можно переформулировать, и ничего не говоря о графах, почти как олимпиадную задачу для школьников, и сейчас мы приведём утверждение и доказательство этой теоремы в таких терминах.

Пусть в школе имеется несколько кружков (на разные темы). Администрация хочет назначить в каждом кружке старосту из числа участников этого кружка. При этом нельзя, чтобы один и тот же школьник был старостой сразу в нескольких кружках. Ясно, что это не всегда возможно: скажем, если школьник Петя ходит в два кружка, а больше никто в эти кружки не ходит, то требования невыполнимы — он не может быть одновременно старостой в обоих, а других школьников там нет. Другой (ещё более вырожденный) случай — когда есть один кружок, в который вообще никто не ходит. Вообще, если имеется k кружков, в которые всего ходят меньше k школьников (если собрать все кружки в одном помещении, в нём будет меньше k человек), то задача неразрешима — кандидатов меньше, чем должностей. Оказывается, что это единственное препятствие.

Теорема 1.7 (теорема Холла о представителях). *Если для любых k кружков общее число школьников, которые ходят хотя бы в один из них, не меньше k, то назначение старост возможно.*

«Представители» — это более научный термин для старост. По-английски это утверждение называют Hall's marriage theorem (попробуйте догадаться почему), а доказал её английский математик Филипп Холл в 1935 г.

Доказательство. Индукция по общему числу кружков. Если кружок один, то всё понятно (назначаем старостой любого его участника). Пусть кружков n, и для меньшего количества кружков утверждение теоремы верно. Попробуем волюнтаристский подход: выберем какой-то кружок, назначим там старосту произвольно — пусть это будет Лена — и предложим остальным $(n-1)$ кружкам после этого самим разобраться со своими назначениями, разумеется, уже не назначая Лену старостой.

Если им это удастся, то всё хорошо. Если же не удастся, то мы знаем (индуктивное предположение) причину: есть некоторые s кружков, у которых вместе меньше s школьников (не считая Лены). А раньше? Раньше — с Леной — у них было *ровно* s школьников (больше быть не могло, раз стало строго меньше — а меньше быть не могло по условию). При этом $s>0$ (поскольку меньше нуля школьников быть не может) и $s<n$ (потому что один кружок мы отбросили).

Итак, достаточно рассмотреть случай, когда *некоторые s кружков в объединении включают ровно s школьников, причём* $0<s<n$. Выберем s кружков с таким свойством и назовём их «особыми». То есть в s особых кружков ходят ровно s школьников. Будем теперь решать задачу отдельно для особых и неособых кружков. И тех, и других меньше n, так что можно воспользоваться предположением индукции. Сначала сделаем это для особых — назначим им старост любым разрешённым способом (таковой существует по предположению индукции). После этого с неособыми кружками сложнее: мы не можем просто так воспользоваться предположением индукции, так как s участников особых кружков уже назначили старостами и их назначать нельзя. Поступим так: всех участников особых кружков исключим из всех неособых кружков и проверим, что после этого всё равно можно воспользоваться индуктивным предположением. Для этого надо убедиться, что в любые t неособых кружков ходят не меньше t школьников, не посещающих особые кружки. В самом деле, если бы их было меньше t, то вместе с s особыми кружками мы получили бы $(s+t)$ кружков, в которые ходит меньше $(s+t)$ школьников, что противоречит предположению теоремы. Шаг индукции завершён. ■

Это доказательство, хотя и не очень сложное, производит странное впечатление волшебства (или жульничества, если выражаться менее деликатно): вроде мы ничего интересного не делаем, скорее, переливаем из пустого в порожнее, а почему-то в итоге всё получается. Это бывает с индуктивными рассуждениями, и иногда можно придумать более наглядное (хотя, возможно, и более длинное) доказательство, которое лучше объясняет, «почему» теорема верна. В случае с теоремой Холла о представителях такое доказательство получается, если выводить эту теорему из общего утверждения о потоках в сетях (о перевозке грузов по сети дорог с ограниченной пропускной способностью), но мы сейчас про это говорить не будем — мы хотели проиллюстрировать возможности индуктивных рассуждений.

1.12. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

17. Докажите, что для любого целого положительного n выполняется
a) $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$;
b) $1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\ldots+n\cdot 2^n=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$;
c) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}>\dfrac{n}{2}+1$.

18. Докажите равенства
a) $1\cdot(n-1)+2\cdot(n-2)+\ldots+(n-1)\cdot 1=\dfrac{(n-1)n(n+1)}{6}$;
b) $\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx=\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}-\dfrac{1}{2}$.

19. Докажите неравенства
a) $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}>\dfrac{2}{3}\cdot n\sqrt{n}$;
b) $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}<\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

20. Докажите, что 1 можно представить в виде суммы a) 2017; b) 2018 различных обыкновенных дробей с числителем 1 и положительным знаменателем.

21. В зачёте участвовало несколько студентов и преподавателей. Известно, что в комнату, где происходил зачёт, каждый участник зачёта вошёл лишь однажды и что каждый преподаватель поговорил с каждым студентом. Докажите, что в какой-то момент зачёта в комнате присутствовали либо все студенты (и, может быть, кто-то из преподавателей), либо все преподаватели (и, может быть, кто-то из студентов).

22. В прямоугольнике $3\times n$ стоят фишки трёх цветов по n штук каждого цвета. Докажите, что можно переставить фишки в каждой строке так, чтобы в каждом столбце были фишки всех цветов.

23. На доске написаны 100 цифр — нули и единицы (в любой комбинации). Разрешается выполнять два действия:

1) заменять первую цифру (нуль на единицу и наоборот);

2) заменять цифру, стоящую после первой единицы.

Докажите, что после нескольких таких замен можно получить любую комбинацию из 100 нулей и единиц.

24. На краю пустыни имеются большой запас бензина и машина, которая при полной заправке может проехать 50 километров. Имеются (в неограниченном количестве) канистры, в которые можно сливать бензин из бензобака машины и оставлять на хранение (в любой точке пустыни). Доказать, что машина может проехать любое расстояние. (Канистры с бензином возить не разрешается, пустые можно возить в любом количестве.)

25. На кольцевой дороге стоит некоторое количество одинаковых автомобилей. Суммарного количества бензина в их бензобаках достаточно, чтобы один автомобиль мог совершить полный круг. Докажите, что найдётся автомобиль, который, начав двигаться против часовой стрелки и забирая бензин по ходу движения у стоящих на дороге автомобилей, сможет совершить полный круг.

26. a) Докажите, что любой квадрат $2^n \times 2^n$, из которого вырезана угловая клетка, можно разрезать на уголки из трёх клеток.

b) Докажите, что на уголки можно разрезать любой квадрат $2^n \times 2^n$, из которого вырезана любая (не обязательно угловая) клетка.

27*. Целые положительные числа a_1, $a_2, \ldots$, a_n таковы, что $a_k \leqslant k$ и сумма всех этих чисел чётна и равна $2S$. Докажите, что эти числа можно разбить на две группы, сумма по каждой из которых равна S.

28*. Лабиринтом называется клетчатый квадрат 10×10, некоторые пары соседних узлов в котором соединены отрезком — «стеной» — таким образом, что, переходя из клетки в соседнюю по стороне клетку и не проходя через стены, можно посетить все клетки квадрата. Границу квадрата будем также считать обнесённой стеной. В некоторой клетке некоторого лабиринта стоит робот. Он понимает 4 команды — Л, П, В, Н, по которым соответственно идёт влево, вправо, вверх и вниз, а если перед ним «стена», то стоит на месте. Как написать программу для робота, выполняя которую он обойдёт все клетки независимо от лабиринта и от своего начального положения?