ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В учебнике «Микроэкономика рыночного равновесия» изложен теоретический материал, сопровождаемый упражнениями с решениями. При определении тем, вошедших в учебник, мы руководствовались следующим: соответствующие разделы в других учебниках и пособиях по микроэкономике изложены таким образом, что для наглядной демонстрации развития экономической модели в единой стилистике их требуется существенно дополнить. Под дополнением не подразумевается техническое усложнение, речь идет о согласованном изложении теории в рамках единого подхода.

Здесь не излагаются начальные темы микроэкономического анализа (поведение потребителя и производителя в условиях определенности), поскольку существует ряд общепризнанных учебников, таких, например, как «Микроэкономика: промежуточный уровень. Современный подход» Хэла Вэриана, где содержащие эти темы разделы представлены последовательно и без перегрузки техническими деталями. Однако даже в таких высокопрофессиональных изданиях при переходе к темам, для которых эти базовые разделы должны были стать теоретическим фундаментом (например, к общему равновесию или провалам рынка), у неподготовленного читателя может сложиться впечатление, что пройденный ранее материал представлял собой замкнутую теорию, не имеющую развития, а теперь необходимо изучить совершенно новый раздел.

В учебнике рассматриваются следующие темы: экономика обмена, выбор потребителя в условиях неопределенности, экономика обмена контингентными благами, равновесие в экономике с производством (включая модель частичного равновесия) и провалы рынка (экстерналии и общественные блага).

Глава «Экономика обмена» включена во все учебники микроэкономики бакалаврского уровня. Однако, поскольку в дальнейшем идеи общего равновесия не развиваются, она воспринимается некой далекой от реальности абстракцией, тогда как по сути именно эта модель является базовой для модели общего равновесия, получившей прикладное развитие в направлении «Расчетные модели общего равновесия». В предлагаемом учебнике это первая глава, в которой задается общая структура изучения модели: что является допустимым состоянием экономики, какие состояния экономики оптимальны по Парето и что произойдет, если предоставить возможность каждому из агентов действовать самостоятельно. Именно этой структуре мы следуем на протяжении всего изложения, вводя все новые и новые предпосылки, «совершенствуя» модель. Несмотря на «абстрактность» модель экономики обмена дает возможность сформулировать важные утверждения микроэкономического анализа: первую и вторую теоремы благосостояния, связывающие понятия равновесия по Вальрасу и Парето-оптимального распределения.

Во второй главе, «Выбор и обмен в условиях неопределенности», рассматривается моделирование поведения потребителя в ситуации, когда выбор может привести к различным исходам, и анализируются взаимодействия потребителей в таких условиях. В главе излагается подход к моделированию поведения потребителя, отличающийся, в виду новых предпосылок модели, от используемого в первой главе. Кроме этого, показан важный прием экономико-математического моделирования, а именно, каким образом совершенно новая задача может быть сведена к уже хорошо известной с тем, чтобы применить освоенный инструментарий для получения новых результатов: выбор потребителя в условиях неопределенности, не предполагающий выбора наборов благ, тем не менее может быть представлен аналогично выбору потребителя в условиях определенности. По сути, этой же идее посвящен и параграф «Экономика обмена контингентными благами»: переинтерпретация известной модели экономики обмена помогает получить ответы на новые вопросы.

Как следует из названия, в главе «Экономика с производством» в модель общего равновесия вводится технология. Максимально подробно, в соответствии со структурой, заданной в главе «Экономика обмена», здесь рассматривается самый простой случай, когда в экономике только один производитель и один потребитель — с тем, чтобы заложить базу для изучения следующих глав. В дальнейшем показывается, как обобщить модель для случая двух потребителей. Ни один учебник по микроэкономике не обошелся без рассмотрения перекрещивающихся кривых спроса и предложения, и этот не стал исключением. Однако в нашем изложении о модели частичного равновесия (а речь идет именно о ней) говорится в контексте развития модели общего равновесия с производством. И более того, в учебнике показано, как естественно из модели частичного равновесия вытекает модель монополии. На основании своего многолетнего опыта можем утверждать, что такое изложение, позволяющее видеть связь разделов, упрощает освоение курса.

Последнее верно и для четвертой главы, «Провалы рынка», включающей темы «Экстерналии» и «Общественные блага». В учебнике, помимо того, что глава, посвященная провалам рынка, рассматривается в контексте модели общего равновесия, для большей наглядности рассматривается опять же случай частичного равновесия — чтобы еще раз продемонстрировать, каким образом можно в уже известную модель вводить дополнительные предположения. Оторванное от предыдущего материала изложение способствует формированию у читателей неверного представления о том, что в микроэкономике для каждой новой проблемы нужна новая модель, с новыми предпосылками и новым подходом к решению.

Степень формализации изложения в предлагаемом учебнике выше степени формализации изложения в учебнике Х. Вэриана, однако ненамного, и касается это в основном записи определений. Математические знания, требующиеся для освоения материала, выходят за рамки средней школы только в том, что касается взятия частной производной. Метод множителей Лагранжа, часто используемый в курсах продвинутого уровня, применяется один раз и не в основном тексте, а в приложении, поэтому легко может быть опущен. Все понятия и утверждения в учебнике иллюстрируются большим количеством рисунков для упрощения восприятия материала.

Отметим, что этот подход был успешно протестирован на студентах НИУ ВШЭ, МФТИ (ГУ), МШЭ МГУ, которым мы благодарны за вопросы и даже за ошибки при выполнении заданий, поскольку это помогало нам лучше структурировать материал.

Мы всегда рады возможности публично сердечно поблагодарить ординарного профессора НИУ ВШЭ Бусыгина Владимира Петровича за помощь в профессиональном становлении, поддержку и критический подход. Мы благодарим ординарного профессора НИУ ВШЭ Левина Марка Иосифовича, возглавлявшего кафедру микроэкономического анализа НИУ ВШЭ, за возможность профессионального роста. И ни в коем случае мы не можем обойти благодарностью за удовольствие от совместной работы и продуктивное сотрудничество старшего преподавателя РАНХиГС, ведущего эксперта Проектной лаборатории развития интеллектуальных состязаний по экономике НИУ ВШЭ Балакину Татьяну Петровну.

Е.А. Левина, Е.В. Покатович

1 ГЛАВА

ЭКОНОМИКА ОБМЕНА

Рассмотрим наиболее простой вариант модели замкнутой экономики — экономику, в которой отсутствует производство и все сделки между экономическими агентами носят обменный характер. Такую экономику принято называть *экономикой обмена*. Предложение благ в ней формируется за счет экзогенно заданного первоначального запаса благ у потребителей. Будем также исходить из следующих предпосылок: 1) всем потребителям открыт доступ на все рынки, где блага торгуются по одинаковым для всех потребителей ценам, которые они принимают заданными (т.е. имеет место совершенная конкуренция); 2) отсутствуют прямые внешние воздействия (экстерналии) потребителей друг на друга; 3) отсутствует асимметрия информации между потребителями относительно цен и свойств благ.

1.1. ДОПУСТИМЫЕ И ПАРЕТО-ОПТИМАЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим экономику с двумя благами (1 и 2) и двумя потребителями (A и B). Объем потребления блага i, $i = 1, 2$, потребителем k, $k = \mathrm{A}, \mathrm{B}$, обозначим через x_i^k. Таким образом, объем потребления, скажем, первого блага потребителем B обозначается через x_1^{B}. Пусть предпочтения потребителей представимы непрерывными функциями полезности $u^{\mathrm{A}}\left(x_1^{\mathrm{A}}, x_2^{\mathrm{A}}\right)$ и $u^{\mathrm{B}}\left(x_1^{\mathrm{B}}, x_2^{\mathrm{B}}\right)$. Потребители владеют первоначальными запасами благ $\omega^{\mathrm{A}} = \left(\omega_1^{\mathrm{A}}, \omega_2^{\mathrm{A}}\right)$ и $\omega^{\mathrm{B}} = \left(\omega_1^{\mathrm{B}}, \omega_2^{\mathrm{B}}\right)$. Для удобства введем обозначения для суммарного запаса каждого блага в экономике, $\omega_1 = \omega_1^{\mathrm{A}} + \omega_1^{\mathrm{B}}$ и $\omega_2 = \omega_2^{\mathrm{A}} + \omega_2^{\mathrm{B}}$, а также для вектора первоначальных запасов, $\omega = \left(\omega^{\mathrm{A}}, \omega^{\mathrm{B}}\right)$. Будем считать, что отдельный потребитель может не иметь запаса одного из благ, но совокупный запас каждого блага в экономике положителен.

Определение 1.1. *Распределением* (состоянием экономики) в двухтоварной экономике с двумя потребителями будем называть набор, специфицирующий объем потребления каждого блага каждым потребителем: $x = \left(x_1^{\mathrm{A}}, x_2^{\mathrm{A}}, x_1^{\mathrm{B}}, x_2^{\mathrm{B}}\right)$. ■

Поскольку в экономике обмена отсутствует производство и объем каждого блага, доступный для потребления, определяется экзогенно заданным совокупным запасом, то распределения, в которых совокупное потребление хотя бы одного блага превышает имеющийся запас этого блага в экономике, не могут реализоваться или, как говорят, являются недопустимыми.

Определение 1.2. *Допустимым распределением* будем называть распределение $x = \left(x_1^{\mathrm{A}},\, x_2^{\mathrm{A}},\, x_1^{\mathrm{B}},\, x_2^{\mathrm{B}}\right)$, такое, что $x_1^{\mathrm{A}} + x_1^{\mathrm{B}} = \omega_1$ и $x_2^{\mathrm{A}} + x_2^{\mathrm{B}} = \omega_2$[1]. ■

Для иллюстрации понятий, изучаемых в двухтоварной экономике обмена с двумя потребителями, удобно использовать такой графический инструмент, как *ящик Эджворта*. Изобразим этот ящик по следующему алгоритму. Сначала нарисуем стандартные оси для потребителя А. Затем отметим по оси $0^{\mathrm{A}}x_1^{\mathrm{A}}$ значение ω_1, а по оси $0^{\mathrm{A}}x_2^{\mathrm{A}}$ — значение ω_2. Через эти метки проведем оси для системы координат потребителя В. При этом оси по каждому благу для потребителя В направлены в противоположные стороны по отношению к осям соответствующих благ для потребителя А, как показано на рис. **1.1**. Таким образом, по построению размеры ящика Эджворта определяются совокупными запасами благ, любое допустимое состояние экономики отмечается в ящике Эджворта одной точкой, а сам он представляет собой множество всех допустимых распределений благ в экономике.

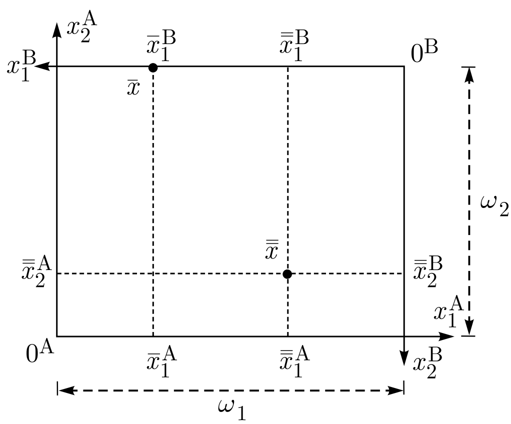

Рис. 1.1. Ящик Эджворта

На рис. **1.1** в ящике Эджворта отмечены два распределения, $\bar{x} = \left(\bar{x}_1^{\mathrm{A}}, \bar{x}_2^{\mathrm{A}}, \bar{x}_1^{\mathrm{B}}, \bar{x}_2^{\mathrm{B}}\right)$ и $\bar{\bar{x}} = \left(\bar{\bar{x}}_1^{\mathrm{A}}, \bar{\bar{x}}_2^{\mathrm{A}}, \bar{\bar{x}}_1^{\mathrm{B}}, \bar{\bar{x}}_2^{\mathrm{B}}\right)$. В распределении $\bar{\bar{x}}$ каждый

[1] Вообще говоря, распределения, в которых совокупное потребление каждого блага меньше совокупного запаса этого блага, также возможны. Однако в дальнейшем для упрощения анализа мы будем считать, как отмечено в определении **1.2**, что условия допустимости выполняются как равенства.

потребитель обладает положительным количеством каждого блага — такие распределения будем называть *внутренними*. В распределении $\overline{x}$ в наборе потребителя В отсутствует второе благо (соответственно весь совокупный запас второго блага принадлежит потребителю А). Распределения, в которых хотя бы у одного потребителя в наборе отсутствует хотя бы одно благо, будем называть *граничными*. Для того чтобы проиллюстрировать процесс обмена в ящике Эджворта, рассмотрим переход из точки $\overline{x}$ в точку $\overline{\overline{x}}$. Для потребителя А это означает отказ от $\left(\omega_2 - \overline{\overline{x}}_2^{\text{A}}\right)$ единиц второго блага в обмен на $\left(\overline{\overline{x}}_1^{\text{A}} - \overline{x}_1^{\text{A}}\right)$ единиц первого блага, а для потребителя В, наоборот, такое перераспределение благ приводит к уменьшению количества первого блага на $\left(\overline{x}_1^{\text{B}} - \overline{\overline{x}}_1^{\text{B}} = \omega_1 - \overline{x}_1^{\text{A}} - \left(\omega_1 - \overline{\overline{x}}_1^{\text{A}}\right) = \overline{\overline{x}}_1^{\text{A}} - \overline{x}_1^{\text{A}}\right)$ в обмен на увеличение количества второго блага на $\overline{\overline{x}}_2^{\text{B}} = \omega_2 - \overline{\overline{x}}_2^{\text{A}}$.

В отношении допустимых распределений возникает три основных вопроса: какие из них эффективны с точки зрения общества в целом? какие из них являются результатом рыночного взаимодействия экономических агентов, рационально заинтересованных только в максимизации собственного благосостояния? И, наконец, как соотносятся распределения, являющиеся ответом на первый и второй вопросы? Далее в гл. 1 будут последовательно рассмотрены все эти вопросы, а пока займемся первым из них.

Традиционно в микроэкономической литературе под эффективным, или оптимальным, распределением понимают такое допустимое распределение, что перераспределение благ между потребителями неизбежно ухудшит положение хотя бы одного потребителя, т.е. в эффективном распределении исчерпаны все возможности взаимовыгодного обмена между потребителями. Такой критерий оптимальности распределения ресурсов в экономике был предложен В. Парето и поэтому носит его имя.

Определение 1.3. Допустимое распределение $\overline{x} = \left(\overline{x}_1^{\text{A}}, \overline{x}_2^{\text{A}}, \overline{x}_1^{\text{B}}, \overline{x}_2^{\text{B}}\right)$ называется *Парето-оптимальным*, если нельзя улучшить положение одного потребителя, не ухудшая положения другого[2], т.е. не найдется другого допустимого распределения $\widehat{x} = \left(\widehat{x}_1^{\text{A}}, \widehat{x}_2^{\text{A}}, \widehat{x}_1^{\text{B}}, \widehat{x}_2^{\text{B}}\right)$, такого, что $u^{\text{A}}\left(\widehat{x}_1^{\text{A}}, \widehat{x}_2^{\text{A}}\right) \geqslant u^{\text{A}}\left(\overline{x}_1^{\text{A}}, \overline{x}_2^{\text{A}}\right)$ и $u^{\text{B}}\left(\widehat{x}_1^{\text{B}}, \widehat{x}_2^{\text{B}}\right) \geqslant u^{\text{B}}\left(\overline{x}_1^{\text{B}}, \overline{x}_2^{\text{B}}\right)$, причем хотя бы одно из неравенств выполнено как строгое. ■

Другими словами, допустимое распределение является Парето-оптимальным, если для него невозможно построить *Парето-улучшения*, т.е. нельзя допустимым образом перераспределить ресурсы между потребителями, чтобы положение одного потребителя улучшилось, а другого — не ухудшилось.

---

[2] Или других, если в экономике — более двух потребителей.

Следует заметить, что критерий Парето-оптимальности никак не характеризует распределение благ в обществе с точки зрения справедливости и равенства[3]. Действительно, рассмотрим, например, экономику обмена с двумя потребителями, имеющими строго монотонные предпочтения (т.е. такие, что увеличение (уменьшение) объема хотя бы одного блага в наборе потребителя приводит к улучшению (ухудшению) положения потребителя[4]). Будет ли распределение ресурсов, в котором у потребителя A имеется весь совокупный запас обоих благ, а в наборе потребителя B отсутствуют оба блага (точка начала координат потребителя B в ящике Эджворта), Парето-оптимальным? Попробуем построить Парето-улучшение. Потребитель A, имея весь запас обоих благ, в распределении $\left(x_1^{\mathrm{A}} = \omega_1,\, x_2^{\mathrm{A}} = \omega_2,\, x_1^{\mathrm{B}} = 0,\, x_2^{\mathrm{B}} = 0\right)$ достигает максимально возможного уровня благосостояния на множестве всех допустимых распределений, следовательно, его положение улучшить уже не удастся. У потребителя B, наоборот, в этом распределении — минимально возможный уровень полезности, поэтому можно попробовать улучшить положение B, не ухудшая положения A. Но для того чтобы повысить благосостояние B, в силу строгой монотонности предпочтений нужно так перераспределить ресурсы, чтобы потребитель B получил положительное количество хотя бы одного блага, что неизбежно ухудшит положение потребителя A, поскольку в его наборе объем этого блага уменьшится. Таким образом, при строго монотонных предпочтениях потребителей построить Парето-улучшение для распределения $\left(x_1^{\mathrm{A}} = \omega_1,\, x_2^{\mathrm{A}} = \omega_2,\, x_1^{\mathrm{B}} = 0,\, x_2^{\mathrm{B}} = 0\right)$ невозможно, а следовательно, данное распределение является Парето-оптимальным.

Пример 1.1. Рассмотрим экономику обмена с двумя потребителями, предпочтения которых представимы функциями полезности вида $u^k\left(x^k\right) = \min\left\{x_1^k, x_2^k\right\}$, $k = \mathrm{A}, \mathrm{B}$. Пусть совокупный запас обоих благ в экономике одинаков: $\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega > 0$ (ящик Эджворта имеет форму квадрата). Найдем Парето-оптимальные распределения в этой экономике.

Начнем с графической иллюстрации, изобразив схематично в ящике Эджворта типичные кривые безразличия[5] потребителей — пунктирной линией для потребителя B и сплошной для потребителя A. Для обоих потребителей блага являются взаимодополняющими (комплементарными) в пропорции один к одному. Уравнение произвольной кривой безразличия

[3] Различные подходы к анализу справедливости распределения ресурсов, как правило, обсуждаются в рамках экономики общественного сектора, и, стараясь быть последовательными в изложении микроэкономического анализа рынков, мы оставим эти подходы за рамками текущего изложения.

[4] Формальное определение строгой монотонности предпочтений приведено в приложении 2 к этой главе.

[5] Определение кривых безразличия приведено в приложении 2 к этой главе.

потребителя k, $k = \mathrm{A}, \mathrm{B}$, имеет вид: $\min\left\{x_1^k, x_2^k\right\} = \overline{u}^k$, где $\overline{u}^k$ — неотрицательная константа. Наборы, удовлетворяющие этому уравнению, можно записать так: $x_1^k = \overline{u}^k$, $x_2^k \geqslant \overline{u}^k$ и $x_1^k \geqslant \overline{u}^k$, $x_2^k = \overline{u}^k$. Таким образом, кривые безразличия представляют собой «уголки», «вершины» которых лежат на луче $x_1^k = x_2^k$, $k = \mathrm{A}, \mathrm{B}$.

В силу того, что совокупные запасы обоих благ одинаковы, прямые $x_1^{\mathrm{A}} = x_2^{\mathrm{A}}$ и $x_1^{\mathrm{B}} = x_2^{\mathrm{B}}$ в ящике Эджворта совпадают и представляют собой его диагональ (рис. **1.2**).

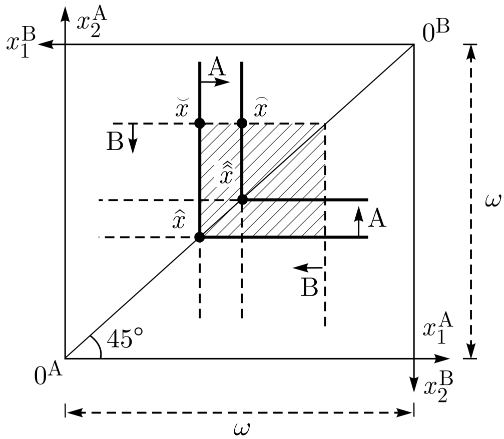

Рис. 1.2. Ящик Эджворта и типичные кривые безразличия потребителей в экономике из примера **1.1** (стрелками указано направление роста полезности)

Построение кривых безразличия в ящике Эджворта условно делит его на три области: распределения, лежащие на, выше и ниже диагонали.

Рассмотрим внутренние распределения на диагонали, подобные отмеченным на рис. **1.2** точкам $\widehat{x}$ и $\widehat{\widehat{x}}$. Как видно из рисунка, в этих точках, как и во всех точках на диагонали, кривые безразличия соприкасаются «вершинами» «уголков», соответственно множество наборов не хуже данного для одного потребителя не пересекается с множеством наборов лучше данного для другого потребителя, а это означает, что для любого такого распределения нельзя построить Парето-улучшение. Действительно, в распределениях, лежащих на диагонали, $x_1^k = x_2^k$, $k = \mathrm{A}, \mathrm{B}$, и $u^k\left(x_1^k = x_2^k\right) = \min\left\{x_1^k, x_2^k\right\} = x_1^k = x_2^k$. Тогда для того, чтобы улучшить положение потребителя, нужно предложить такое перераспределение благ, чтобы потребитель получил большее количество каждого блага (увеличение количества только одного блага в наборе потребителя не изменит уровня его полезности). Но увеличив количество каждого блага, например, в наборе потребителя A, на $\varepsilon_i > 0$, $i = 1,\ 2$, на эту же величину уменьшим количество каждого блага в наборе потребителя B, придя к распределению $\left(x_1^{\mathrm{A}} + \varepsilon_1, x_2^{\mathrm{A}} + \varepsilon_2, x_1^{\mathrm{B}} - \varepsilon_1, x_2^{\mathrm{B}} - \varepsilon_2\right)$. Тогда полезность потребителя B снизится: $u^k\left(x_1^{\mathrm{B}} - \varepsilon_1, x_2^{\mathrm{B}} - \varepsilon_2\right) = \min\{x_1^{\mathrm{B}} - \varepsilon_1, x_2^{\mathrm{B}} - \varepsilon_2\} < x_1^{\mathrm{B}} = x_2^{\mathrm{B}}$. При некоторых $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 > 0$ для точки $\widehat{x}$ на рис. **1.2** такое перераспределение означает переход в точку $\widehat{\widehat{x}}$. Следовательно, внутренние распределения на диагонали ящика Эджворта являются Парето-оптимальными. Граничные распределения, соответствующие точкам начала координат, также лежащие на диагонали, тоже являются Парето-оптимальными. Например, возьмем точку начала координат потребителя A: $\left(x_1^{\mathrm{A}} = 0, x_2^{\mathrm{A}} = 0, x_1^{\mathrm{B}} = \omega, x_2^{\mathrm{B}} = \omega\right)$. В этой точке полезность потребителя A равна 0 — минимально возможному уровню среди всех допустимых распределений, а полезность потребителя B равна ω — максимально возможному уровню среди всех допустимых распределений. Попытка улучшить положение потребителя A за счет увеличения в его наборе объема каждого блага неизбежно ухудшит положение потребителя B, а улучшить его положение в данной экономике невозможно. Аналогичные рассуждения можно провести о точке начала координат потребителя B. Таким образом, диагональ ящика Эджворта, включая граничные точки, представляет собой множество Парето-оптимальных распределений.

Проанализируем теперь множество распределений, лежащих выше диагонали, подобных точкам $\breve{x}$ и $\widehat{x}$ на рис. **1.2**. Рассмотрим, например, точку $\breve{x}$. Если провести через нее кривые безразличия потребителей A и B и отметить множество наборов не хуже данного для одного потребителя и лучше — для другого, то получим заштрихованный на рисунке прямоугольник. Распределения, принадлежащие этому прямоугольнику, представляют собой множество Парето-улучшений для распределения $\breve{x}$, а следовательно, распределение $\breve{x}$ не является Парето-оптимальным. Приведем пример построения Парето-улучшения для распределения $\breve{x}$. В точке $\breve{x}$, как и в любой точке, лежащей выше диагонали ящика Эджворта, выполнено: $\breve{x}_1^{\mathrm{A}} < \breve{x}_2^{\mathrm{A}}$ и $\breve{x}_1^{\mathrm{B}} > \breve{x}_2^{\mathrm{B}}$, соответственно $u^{\mathrm{A}}\left(\breve{x}^{\mathrm{A}}\right) = \breve{x}_1^{\mathrm{A}}$ и $u^{\mathrm{B}}\left(\breve{x}^{\mathrm{B}}\right) = \breve{x}_2^{\mathrm{B}}$. Рассмотрим распределение $\widehat{x} = \left(\widehat{x}_1^{\mathrm{A}} = \breve{x}_1^{\mathrm{A}} + \delta, \widehat{x}_2^{\mathrm{A}} = \breve{x}_2^{\mathrm{A}}, \widehat{x}_1^{\mathrm{B}} = \breve{x}_1^{\mathrm{B}} - \delta, \widehat{x}_2^{\mathrm{B}} = \breve{x}_2^{\mathrm{B}}\right)$, где $\delta > 0$, $\widehat{x}_1^{\mathrm{A}} = \breve{x}_1^{\mathrm{A}} + \delta < \widehat{x}_2^{\mathrm{A}} = \breve{x}_2^{\mathrm{A}}$ и $\widehat{x}_1^{\mathrm{B}} = \breve{x}_1^{\mathrm{B}} - \delta > \widehat{x}_2^{\mathrm{B}} = \breve{x}_2^{\mathrm{B}}$. Заметим, что поскольку неравенства строгие, такое положительное число δ всегда найдется, и распределение $\widehat{x}$ допустимо в силу допустимости распределения $\breve{x}$. Тогда $u^{\mathrm{A}}\left(\widehat{x}^{\mathrm{A}}\right) = \widehat{x}_1^{\mathrm{A}} = \breve{x}_1^{\mathrm{A}} + \delta > \breve{x}_1^{\mathrm{A}} = u^{\mathrm{A}}\left(\breve{x}^{\mathrm{A}}\right)$, т.е. в распределении $\widehat{x}$ положение потребителя A лучше, чем в распределении $\breve{x}$, тогда как положение потребителя B осталось неизменным, поскольку $u^{\mathrm{B}}\left(\widehat{x}^{\mathrm{B}}\right) = \widehat{x}_2^{\mathrm{B}} = \breve{x}_2^{\mathrm{B}} = u^{\mathrm{B}}\left(\breve{x}^{\mathrm{B}}\right)$. Аналогично можно построить Парето-улучшение для любого распределения, лежащего выше диагонали ящика Эджворта.

Действуя по той же схеме, можно построить Парето-улучшение для любого распределения, лежащего ниже диагонали ящика Эджворта. Таким образом, в данном случае множество Парето-оптимальных распределений совпадает с диагональю ящика Эджворта, т.е. его характеристика имеет вид: $x_2^{\mathrm{A}} = x_1^{\mathrm{A}}$, где $0 \leqslant x_1^{\mathrm{A}} \leqslant \omega$. ■

В примере **1.1** кривые безразличия потребителей имели простой вид, что позволило найти множество Парето-оптимальных распределений, действуя непосредственно по определению Парето-оптимума. В случае предпочтений с кривыми безразличия более сложной формы использование такого подхода может оказаться весьма затруднительным, поэтому возникает необходимость в простом критерии, характеризующем Парето-оптимальные распределения.

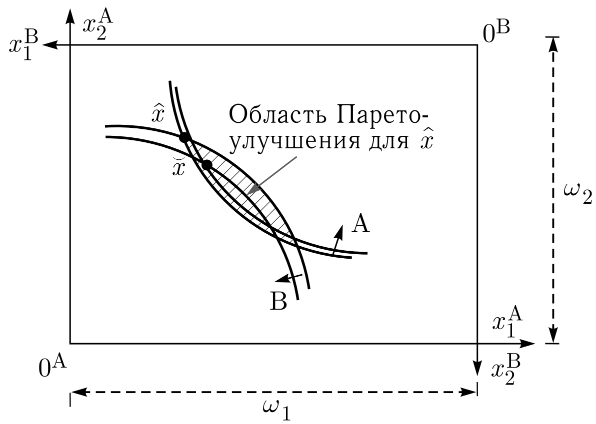

Рис. 1.3. Поиск внутренних Парето-оптимальных распределений в экономике с двумя потребителями, имеющими стандартные предпочтения. Заштрихована область Парето-улучшения для распределения $\widehat{x}$ (стрелками указано направление роста полезности)

Рассмотрим произвольное внутреннее распределение $\widehat{x}$ для случая, когда оба потребителя имеют стандартные предпочтения (строго монотонные и выпуклые предпочтения[6] с гладкими кривыми безразличия) на рис. **1.3**. Проведем через точку $\widehat{x}$ кривые безразличия потребителей и предположим, что они в рассматриваемой точке пересеклись. Будет ли она Парето-оптимальной? Перераспределив ресурсы, сместившись из точки $\widehat{x}$ в любую точку внутри заштрихованной области на рисунке, например, в точку $\breve{x}$, можно повысить благосостояние каждого из потребителей. А при перемещении в любую точку на границе указанной области, т.е. оставшись на одной из кривых безразличия, проходящих через точку $\widehat{x}$, можно улучшить положение одного потребителя, не меняя уровня благосостояния другого. Таким образом, заштрихованная область на рис. **1.3** представляет собой область Парето-улучшения для распределения $\widehat{x}$, а следовательно, распределение $\widehat{x}$ не является Парето-оптимальным[7].

[6] Определения строгой монотонности и строгой выпуклости предпочтений приведены в приложении 2 к этой главе.

[7] Обратите внимание, что распределение $\breve{x}$, хотя и является Парето-улучшением для распределения $\widehat{x}$, само не Парето-оптимально.

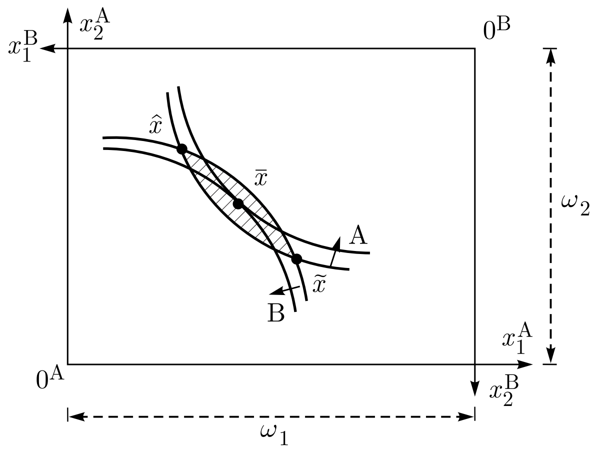

Рис. 1.4. $\overline{x}$ — внутреннее Парето-оптимальное распределение (стрелками указано направление роста полезности)

Тогда внутреннее допустимое распределение будет Парето-оптимальным, когда пропадет линзообразная область, полученная за счет пересечения кривых безразличия, т.е. если в этом распределении будет иметь место касание кривых безразличия (рис. **1.4**). Другими словами, при возрастающих дифференцируемых функциях полезности потребителей во внутренней Парето-оптимальной точке $\overline{x} > 0$ должно быть выполнено условие равенства предельных норм замещения[8] потребителей:

$$MRS_{12}^{\mathrm{A}}\left(\overline{x}^{\mathrm{A}}\right) = MRS_{12}^{\mathrm{B}}\left(\overline{x}^{\mathrm{B}}\right). \tag{1.1}$$

Утверждение 1.1. Пусть функции полезности потребителей дифференцируемы, причем $\dfrac{\partial u^k\left(x^k\right)}{\partial x_i^k} > 0$[9] для любого потребителя $k = \mathrm{A}$, B и любого

[8] Предельная норма замещения второго блага первым, MRS_{12} (от *англ.* marginal rate of substitution), показывает, от какого максимального количества малых (дифференциально малых) единиц второго блага готов отказаться потребитель в обмен на одну малую единицу первого блага, т.е. представляет собой наклон (с обратным знаком) кривой безразличия потребителя в пространстве благ (x_1, x_2): $MRS_{12}(x) = -\dfrac{dx_2}{dx_1} = \dfrac{\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_2}}$.

[9] Это условие гарантирует строгую монотонность предпочтений потребителей. Обратное утверждение (что из строгой монотонности следует, что значение предельной полезности по каждому благу положительно) не всегда верно, так как в некоторых точках предельная полезность может быть равна нулю. Однако далее в тексте для упрощения изложения мы будем предполагать, что если предпочтения строго монотонны, то значения указанных в утверждении частных производных всегда положительны.

блага $i = 1, 2$ при $x_i^k > 0$. Пусть $\overline{x} = \left(\overline{x}_1^{\mathrm{A}}, \overline{x}_2^{\mathrm{A}}, \overline{x}_1^{\mathrm{B}}, \overline{x}_2^{\mathrm{B}}\right)$ — внутреннее Парето-оптимальное распределение, тогда $MRS_{12}^{\mathrm{A}}\left(\overline{x}^{\mathrm{A}}\right) = MRS_{12}^{\mathrm{B}}\left(\overline{x}^{\mathrm{B}}\right)$.

Доказательство. В первую очередь следует заметить, что поскольку в распределении $\overline{x}$ каждый потребитель имеет положительный объем каждого блага, то всегда существует возможность так перераспределить блага между потребителями, чтобы потребление блага отдельным потребителем как возросло, так и снизилось.

Докажем утверждение от противного: пусть существует внутреннее Парето-оптимальное распределение $\overline{x} = \left(\overline{x}_1^{\mathrm{A}}, \overline{x}_2^{\mathrm{A}}, \overline{x}_1^{\mathrm{B}}, \overline{x}_2^{\mathrm{B}}\right)$, в котором $MRS_{12}^{\mathrm{A}}\left(\overline{x}^{\mathrm{A}}\right) \neq MRS_{12}^{\mathrm{B}}\left(\overline{x}^{\mathrm{B}}\right)$. Тогда возможны два случая: 1) $MRS_{12}^{\mathrm{A}}\left(\overline{x}^{\mathrm{A}}\right) > MRS_{12}^{\mathrm{B}}\left(\overline{x}^{\mathrm{B}}\right)$ (как в точке $\widehat{x}$ на рис. **1.4**); 2) $MRS_{12}^{\mathrm{A}}\left(\overline{x}^{\mathrm{A}}\right) < MRS_{12}^{\mathrm{B}}\left(\overline{x}^{\mathrm{B}}\right)$ (как в точке $\widetilde{x}$ на рис. **1.4**). Рассмотрим первый из них. Поскольку $MRS_{12}^{\mathrm{A}}\left(\overline{x}^{\mathrm{A}}\right) > MRS_{12}^{\mathrm{B}}\left(\overline{x}^{\mathrm{B}}\right)$, то потребитель A в этом распределении ценит первое благо выше, чем потребитель B, следовательно, есть возможность для взаимовыгодного обмена на множестве допустимых распределений. Действительно, потребитель A готов отказаться от $MRS_{12}^{\mathrm{A}}\left(\overline{x}^{\mathrm{A}}\right)$ малых единиц второго блага в обмен на одну малую единицу первого блага. Тогда, в силу строгой монотонности предпочтений, если потребитель A получит одну малую единицу первого блага, отказавшись от меньшего количества второго блага, скажем, от $\dfrac{MRS_{12}^{\mathrm{A}}\left(\overline{x}^{\mathrm{A}}\right) + MRS_{12}^{\mathrm{B}}\left(\overline{x}^{\mathrm{B}}\right)}{2} < MRS_{12}^{\mathrm{A}}\left(\overline{x}^{\mathrm{A}}\right)$, то его положение улучшится. Но как скажется такое перераспределение ресурсов на потребителе B? Он готов отказаться от одной малой единицы первого блага в обмен на $MRS_{12}^{\mathrm{B}}\left(\overline{x}^{\mathrm{B}}\right)$ малых единиц второго блага, а если вместо этого он получит $\dfrac{MRS_{12}^{\mathrm{A}}\left(\overline{x}^{\mathrm{A}}\right) + MRS_{12}^{\mathrm{B}}\left(\overline{x}^{\mathrm{B}}\right)}{2}$ малых единиц второго блага, то его благосостояние возрастет, поскольку $\dfrac{MRS_{12}^{\mathrm{A}}\left(\overline{x}^{\mathrm{A}}\right) + MRS_{12}^{\mathrm{B}}\left(\overline{x}^{\mathrm{B}}\right)}{2} > MRS_{12}^{\mathrm{B}}\left(\overline{x}^{\mathrm{B}}\right)$. Таким образом, в результате предложенного допустимого перераспределения благ положение обоих потребителей улучшилось, следовательно, мы пришли к противоречию, и исходное распределение не является Парето-оптимальным.

Предположим теперь, что $MRS_{12}^{\mathrm{A}}\left(\overline{x}^{\mathrm{A}}\right) < MRS_{12}^{\mathrm{B}}\left(\overline{x}^{\mathrm{B}}\right)$. Находясь в точке $\overline{x}$, потребитель B по определению предельной нормы замещения готов отказаться от $MRS_{12}^{\mathrm{B}}\left(\overline{x}^{\mathrm{B}}\right)$ малых единиц второго блага в обмен на получение одной малой единицы первого блага, чтобы остаться на той же кривой безразличия. В то же время потребитель A готов обменять одну малую единицу первого блага на $MRS_{12}^{\mathrm{A}}\left(\overline{x}^{\mathrm{A}}\right)$ малых единиц второго блага. Таким образом, если отказ от одной малой единицы первого блага для потребителя A будет компенсирован получением $MRS_{12}^{\mathrm{B}}\left(\overline{x}^{\mathrm{B}}\right)$ малых единиц второго блага, то в силу строгой монотонности предпочтений его благосостояние возрастет, поскольку $MRS_{12}^{\mathrm{B}}\left(\overline{x}^{\mathrm{B}}\right) > MRS_{12}^{\mathrm{A}}\left(\overline{x}^{\mathrm{A}}\right)$. Следовательно, в резуль-

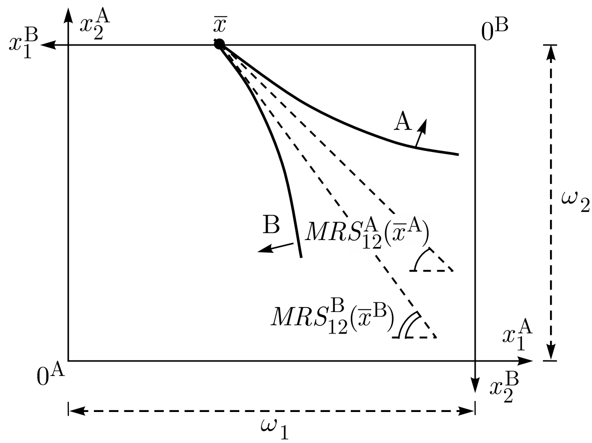

Рис. 1.5. $\overline{x}$ — граничное Парето-оптимальное распределение (стрелками указано направление роста полезности)

тате такого допустимого перераспределения ресурсов положение потребителя A улучшится, а положение потребителя B останется неизменным; это означает, что распределение $\overline{x}$ не является Парето-оптимальным. ■

Заметим, во-первых, что в утверждении **1.1** говорится о внутренних Парето-оптимальных распределениях. В граничных Парето-оптимальных точках оно может быть и неверным[10]. Так, на рис. **1.5** изображено граничное Парето-оптимальное распределение $\overline{x}$, в котором $MRS_{12}^{\mathrm{A}}\left(\overline{x}^{\mathrm{A}}\right) < MRS_{12}^{\mathrm{B}}\left(\overline{x}^{\mathrm{B}}\right)$. Неравенство предельных норм замещения в граничных Парето-оптимальных точках также проиллюстрировано в примере **1.2**.

Пример 1.2. Рассмотрим экономику обмена с двумя потребителями, предпочтения которых представимы функциями полезности вида $u^k\left(x^k\right) = \alpha^k x_1^k + x_2^k$, $k = \mathrm{A}, \mathrm{B}$, где $\alpha^{\mathrm{A}} > \alpha^{\mathrm{B}} > 0$. Найдем множество Парето-оптимальных распределений в этой экономике при произвольных положительных совокупных запасах благ.

Согласно данным функциям полезности каждый потребитель всегда готов заменить α^k единиц второго блага на одну единицу первого блага. Другими словами, $MRS_{12}^k\left(x^k\right) = \alpha^k$ для любого $k = \mathrm{A}, \mathrm{B}$, и кривые безразличия представляют собой прямые с наклоном $\left(-\alpha^k\right)$. Поскольку по условию $\alpha^{\mathrm{A}} > \alpha^{\mathrm{B}}$, то кривые безразличия потребителя A в ящике Эджворта всюду более крутые (т.е. вертикальнее), чем кривые безразличия потребителя B, соответственно ни в одной точке ящика Эджворта не может иметь место касание кривых безразличия. Тогда согласно утверждению **1.1** в данной экономике отсутствуют внутренние Парето-оптимальные распре-

[10] Подробнее о характеристике граничных Парето-оптимальных распределений см. в приложении 1 к этой главе.

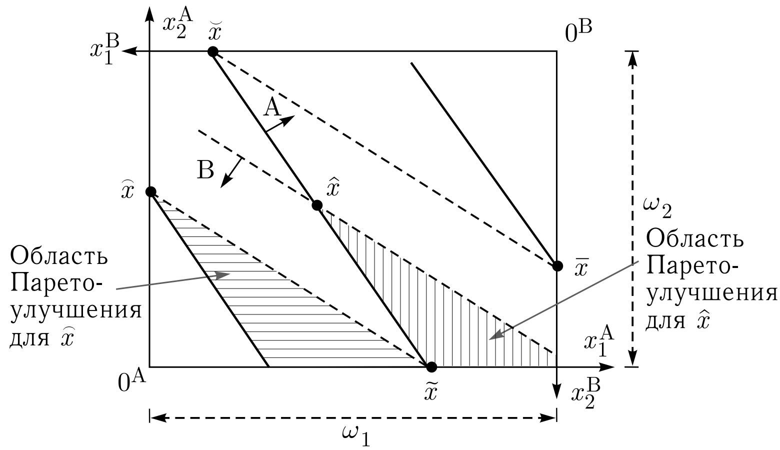

Рис. 1.6. Поиск Парето-оптимальных распределений в экономике, описанной в примере **1.2** (стрелками указано направление роста полезности)

деления. Найдем множество граничных Парето-оптимальных распределений с помощью графической иллюстрации, приведенной на рис. **1.6**, где кривые безразличия потребителя А — сплошные линии, а кривые безразличия потребителя В — пунктирные.

На рис. **1.6** вертикальной штриховкой отмечено множество Парето-улучшений для произвольного внутреннего распределения $\widehat{x}$. Хотя внутренняя точка ожидаемо оказалась не Парето-оптимальной, расположение соответствующей области Парето-улучшения наводит на мысль, что Парето-оптимальные распределения стоит искать на нижней и правой стенках ящика Эджворта. Действительно, в любой точке на нижней стенке ящика Эджворта, подобных точке $\widetilde{x}$, множество наборов не хуже $\widetilde{x}$ для одного потребителя не пересекается с множеством наборов лучше $\widetilde{x}$ для другого потребителя, а следовательно, данное распределение Парето-оптимально. Аналогичная картина наблюдается и для любого распределения на правой стенке ящика Эджворта (см., например, распределение $\overline{x}$ на рис. **1.6**). Если же возьмем точку на левой стенке ящика Эджворта, например $\widehat{x}$, то увидим, что для нее существует область Парето-улучшения, отмеченная на рисунке горизонтальной штриховкой. Аналогично можно показать, что точки на верхней стенке ящика Эджворта, подобные точке $\breve{x}$, не являются Парето-оптимальными.

Точки начала координат для обоих потребителей Парето-оптимальны по определению, поскольку предпочтения потребителей в данной экономике строго монотонны. Таким образом, Парето-оптимальные распределения лежат на нижней и правой стенках ящика Эджворта, где $0 \leqslant x_1^{\mathrm{A}} \leqslant \omega_1$ при $x_2^{\mathrm{A}} = 0$ и $0 \leqslant x_2^{\mathrm{A}} \leqslant \omega_2$ при $x_1^{\mathrm{A}} = \omega_1$. Все Парето-оптимальные распределения являются граничными, и в любой Парето-оптимальной точке $MRS_{12}^{\mathrm{A}}\left(x^{\mathrm{A}}\right) > MRS_{12}^{\mathrm{B}}\left(x^{\mathrm{B}}\right)$. ■

Во-вторых, согласно утверждению **1.1** равенство предельных норм замещения — необходимое условие внутреннего Парето-оптимума, но будет ли это условие также и достаточным? Другими словами, когда, найдя внутреннее допустимое распределение, в котором имеет место касание кривых безразличия, можно быть уверенным, что найден Парето-оптимум? На рис. **1.7** во внутреннем распределении $\widetilde{x}$ выполнено условие равенства предельных норм замещения, однако распределение $\widetilde{x}$ не является Парето-оптимальным: например, в допустимом распределении $\overline{\overline{x}}$ по сравнению с распределением $\widetilde{x}$ благосостояние потребителя B выше, тогда как положение потребителя A остается неизменным. Проблема в том, что предпочтения потребителя A на рис. **1.7** не являются выпуклыми, и общая касательная к кривым безразличия не позволяет отделить множество наборов не хуже данного для одного потребителя от множества наборов лучше данного для другого. Однако следует отметить, что в Парето-оптимальном распределении $\overline{x}$ по-прежнему имеет место касание кривых безразличия.

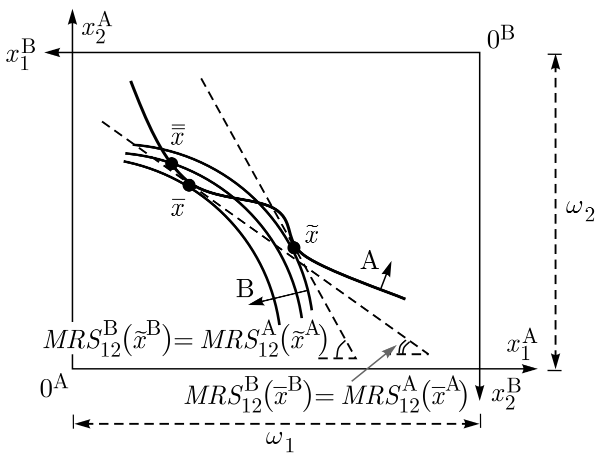

Рис. 1.7. Предпочтения потребителя A не являются выпуклыми. Распределение $\widetilde{x}$, в котором $MRS_{12}^A(\widetilde{x}^A) = MRS_{12}^B(\widetilde{x}^B)$, не является оптимальным по Парето, а распределение $\overline{x}$, в котором $MRS_{12}^A(\overline{x}^A) = MRS_{12}^B(\overline{x}^B)$ — Парето-оптимально (стрелками указано направление роста полезности)

Проблемы может создать и отсутствие строгой монотонности предпочтений, как показано на рис. **1.8**, где $\widetilde{x}$ — точка (глобального) насыщения для потребителя A. Как видно из рисунка, во внутреннем распределении $\overline{\overline{x}}$ кривая безразличия потребителя B касается кривой безразличия потребителя A, т.е. $MRS_{12}^A\left(\overline{\overline{x}}^A\right) = MRS_{12}^B\left(\overline{\overline{x}}^B\right)$, однако это распределение не является Парето-оптимальным. В качестве примера Парето-улучшения можно привести распределение $\widetilde{x}$, где положение обоих потребителей лучше, чем в точке $\overline{\overline{x}}$. При этом в Парето-оптимальном распределении $\overline{x}$ на рис. **1.8** имеет место равенство предельных норм замещения.

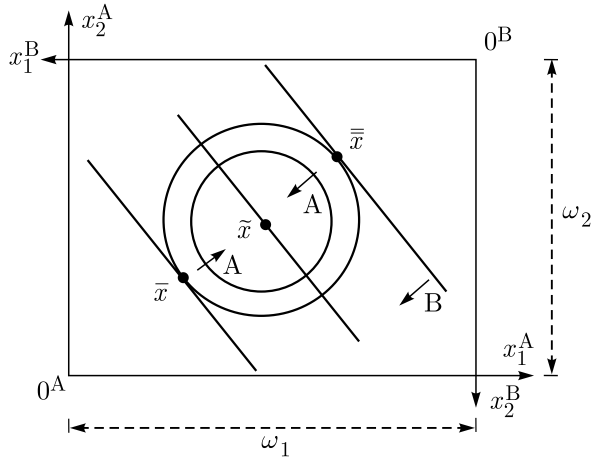

Рис. 1.8. Предпочтения потребителя А не являются монотонными. Во внутреннем допустимом распределении $\overline{\overline{x}}$ выполнено условие $MRS_{12}^{\mathrm{A}}\left(\overline{\overline{x}}^{\mathrm{A}}\right) = MRS_{12}^{\mathrm{B}}\left(\overline{\overline{x}}^{\mathrm{B}}\right)$, но распределение $\overline{\overline{x}}$ не является Парето-оптимальным (стрелками указано направление роста полезности)

Утверждение 1.2. Пусть функции полезности потребителей дифференцируемы, предпочтения строго монотонны и выпуклы, тогда условие равенства предельных норм замещения является не только необходимым, но и достаточным условием внутреннего Парето-оптимума.

Без доказательства. ■

Согласно утверждению **1.2**, если предпочтения потребителей выпуклы и строго монотонны, то, вычислив внутреннее допустимое распределение, в котором достигается равенство предельных норм замещения, мы можем быть уверены, что нашли Парето-оптимальное распределение. Если же предпочтения хотя бы одного потребителя не удовлетворяют хотя бы одному из этих свойств, то внутреннее допустимое распределение, в котором имеет место касание кривых безразличия, может как быть Парето-оптимальным, так и не являться таковым.

Приведем пример поиска Парето-оптимальных распределений в экономике обмена в случае, когда предпочтения потребителей представимы функциями полезности Кобба–Дугласа.

Пример 1.3. Пусть предпочтения потребителей представимы функциями полезности $u^{\mathrm{A}}\left(x_1^{\mathrm{A}}, x_2^{\mathrm{A}}\right) = \left(x_1^{\mathrm{A}}\right)^{\alpha}\left(x_2^{\mathrm{A}}\right)^{1-\alpha}$ и $u^{\mathrm{B}}\left(x_1^{\mathrm{B}}, x_2^{\mathrm{B}}\right) = \left(x_1^{\mathrm{B}}\right)^{\beta}\left(x_2^{\mathrm{B}}\right)^{1-\beta}$, где $0 < \alpha < 1$ и $0 < \beta < 1$. Совокупный начальный запас блага i в экономике составляет $\omega_i > 0$, $i = 1, 2$. Охарактеризуем множество Парето-оптимальных распределений в этой экономике.

Начнем с анализа внутренних распределений.

Предпочтения, представимые функциями полезности Кобба–Дугласа, являются монотонными (на внутренних наборах — строго монотонными) и выпуклыми (на внутренних наборах — строго выпуклыми). А значит, условие равенства предельных норм замещения является не только необходимым, но и достаточным условием внутреннего Парето-оптимума. Поскольку $MRS_{12}^{\mathrm{A}}\left(x^{\mathrm{A}}\right) = \dfrac{\alpha x_2^{\mathrm{A}}}{(1-\alpha)\, x_1^{\mathrm{A}}}$ и $MRS_{12}^{\mathrm{B}}\left(x^{\mathrm{B}}\right) = \dfrac{\beta x_2^{\mathrm{B}}}{(1-\beta)\, x_1^{\mathrm{B}}}$, то во внутреннем Парето-оптимальном распределении выполнено:

$$\frac{\alpha x_2^{\mathrm{A}}}{(1-\alpha)\, x_1^{\mathrm{A}}} = \frac{\beta x_2^{\mathrm{B}}}{(1-\beta)\, x_1^{\mathrm{B}}}.$$

Из ограничений допустимости получим, что $x_i^{\mathrm{B}} = \omega_i - x_i^{\mathrm{A}}$ для $i = 1,\ 2$. Таким образом, $\dfrac{\alpha x_2^{\mathrm{A}}}{(1-\alpha)\, x_1^{\mathrm{A}}} = \dfrac{\beta\left(\omega_2 - x_2^{\mathrm{A}}\right)}{(1-\beta)\left(\omega_1 - x_1^{\mathrm{A}}\right)}$. Отсюда после преобразований получим $x_2^{\mathrm{A}}\left(x_1^{\mathrm{A}}\right) = \dfrac{\beta(1-\alpha)\,\omega_2 x_1^{\mathrm{A}}}{\alpha\omega_1(1-\beta) + x_1^{\mathrm{A}}(\beta-\alpha)}$, причем при $x_1^{\mathrm{A}} \to 0$ $x_2^{\mathrm{A}} \to 0$, а при $x_1^{\mathrm{A}} \to \omega_1$ $x_2^{\mathrm{A}} \to \omega_2$.

Для того чтобы корректно изобразить в ящике Эджворта множество внутренних Парето-оптимальных распределений, исследуем функцию $x_2^{\mathrm{A}}\left(x_1^{\mathrm{A}}\right)$. Первая производная больше нуля, $\left(x_2^{\mathrm{A}}\left(x_1^{\mathrm{A}}\right)\right)' = \dfrac{\alpha\beta(1-\alpha)(1-\beta)\,\omega_1\omega_2}{\left(\alpha\omega_1(1-\beta) + x_1^{\mathrm{A}}(\beta-\alpha)\right)^2} > 0$, следовательно, функция $x_2^{\mathrm{A}}\left(x_1^{\mathrm{A}}\right)$ возрастает. Продолжим анализ, чтобы уточнить вид графика функции, вычислив вторую производную: $\left(x_2^{\mathrm{A}}\left(x_1^{\mathrm{A}}\right)\right)'' = (-2)(\beta-\alpha)\dfrac{\alpha\beta(1-\alpha)(1-\beta)\,\omega_1\omega_2}{\left(\alpha\omega_1(1-\beta) + x_1^{\mathrm{A}}(\beta-\alpha)\right)^3}$.

Заметим, что множитель $\alpha\beta(1-\alpha)(1-\beta)\,\omega_1\omega_2$ всегда положителен.

Если $\beta = \alpha$, то $\left(x_2^{\mathrm{A}}\left(x_1^{\mathrm{A}}\right)\right)'' = 0$, это означает, что график функции $x_2^{\mathrm{A}}\left(x_1^{\mathrm{A}}\right)$ — прямая. Если $\beta > \alpha$, то $(\beta-\alpha) > 0$ и $\left(\underbrace{\alpha\omega_1(1-\beta)}_{>0} + \underbrace{x_1^{\mathrm{A}}(\beta-\alpha)}_{>0}\right)^3 > 0$, тогда $\left(x_2^{\mathrm{A}}\left(x_1^{\mathrm{A}}\right)\right)'' < 0$, следовательно, функция $x_2^{\mathrm{A}}\left(x_1^{\mathrm{A}}\right)$ строго вогнута, т.е. ее график лежит в ящике Эджворта выше диагонали.

Если $\beta < \alpha$, то знак знаменателя, а следовательно, и всего выражения, не так очевиден, как в предыдущем случае, поскольку $\alpha\omega_1(1-\beta) > 0$, но $x_1^{\mathrm{A}}(\beta-\alpha) < 0$. Максимальное значение, которое может принимать x_1^{A}, составляет ω_1, причем $x_1^{\mathrm{A}} = \omega_1$ для граничного распределения. Если распределение внутреннее, то $x_1^{\mathrm{A}} < \omega_1$. Подставив в выражение в знаменателе

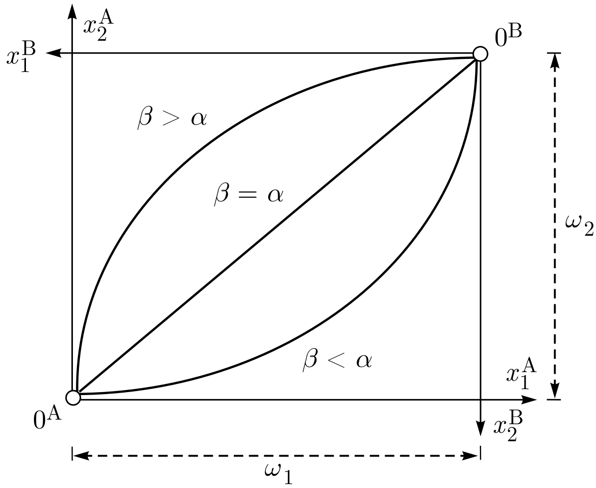

Рис. 1.9. Множество внутренних Парето-оптимальных распределений в экономике обмена из примера **1.3**

вместо x_1^{A} значение ω_1, получим $\underbrace{\alpha\omega_1(1-\beta)}_{>0}+\underbrace{\omega_1(\beta-\alpha)}_{<0}=\beta\,(1-\alpha)\,\omega_1>0$.
Если при максимальном значении x_1^{A} знаменатель больше нуля, то и при меньших значениях x_1^{A} знаменатель больше нуля. Следовательно, $\left(x_2^{\mathrm{A}}\left(x_1^{\mathrm{A}}\right)\right)'' > 0$, а значит, функция $x_2^{\mathrm{A}}\left(x_1^{\mathrm{A}}\right)$ строго выпукла, т.е. ее график лежит в ящике Эджворта ниже диагонали. Графически множество внутренних Парето-оптимальных распределений изображено на рис. **1.9**.

Рассмотрим теперь граничные Парето-оптимальные распределения.

Начнем с распределения $\left(x_1^{\mathrm{A}} = x_2^{\mathrm{A}} = 0,\ x_1^{\mathrm{B}} = \omega_1,\ x_2^{\mathrm{B}} = \omega_2\right)$. Это распределение допустимо. Не существует допустимого распределения, в котором благосостояние B было бы выше, поскольку у потребителя B в этом распределении — весь начальный запас благ. Чтобы увеличить благосостояние потребителя A, необходимо уменьшить потребление обоих благ потребителем B, что приведет к снижению его благосостояния. Таким образом, невозможно повысить благосостояние хотя бы одного из потребителей так, чтобы не снизилось благосостояние другого, что означает Парето-оптимальность данного распределения. Аналогичным образом можно показать, что распределение $\left(x_1^{\mathrm{A}} = \omega_1,\ x_2^{\mathrm{A}} = \omega_2,\ x_1^{\mathrm{B}} = x_2^{\mathrm{B}} = 0\right)$ также является Парето-оптимальным.

Проанализируем существование других граничных Парето-оптимальных распределений. Например, рассмотрим граничное распределение $\left(x_1^{\mathrm{A}} = 0,\ 0 < x_2^{\mathrm{A}} < \omega_2,\ x_1^{\mathrm{B}} = \omega_1,\ x_2^{\mathrm{B}} = \omega_2 - x_2^{\mathrm{A}} > 0\right)$. В этом распределении потребители получают следующие уровни полезности: $u^{\mathrm{A}}\left(0,\ x_2^{\mathrm{A}}\right) = 0$ и $u^{\mathrm{B}}\left(\omega_1,\ \omega_2 - x_2^{\mathrm{A}}\right) = (\omega_1)^{\beta}\left(\omega_2 - x_2^{\mathrm{A}}\right)^{1-\beta}$. Это распределение не является Парето-оптимальным, поскольку существует другое допустимое распределение $\left(x_1^{\mathrm{A}} = 0,\, x_2^{\mathrm{A}} = 0,\, x_1^{\mathrm{B}} = \omega_1,\, x_2^{\mathrm{B}} = \omega_2\right)$, в котором положение потребителя A осталось неизменным, $u^{\mathrm{A}}\left(0,\, x_2^{\mathrm{A}}\right) = 0 = u^{\mathrm{A}}(0,\, 0)$, а положение потребителя B улучшилось: $u^{\mathrm{B}}(\omega_1,\, \omega_2) = (\omega_1)^{\beta}(\omega_2)^{1-\beta} > > u^{\mathrm{B}}\left(\omega_1,\, \omega_2 - x_2^{\mathrm{A}}\right) = (\omega_1)^{\beta}\left(\omega_2 - x_2^{\mathrm{A}}\right)^{1-\beta}$.

Полученный результат можно обобщить: в экономике, где предпочтения потребителей представимы функциями полезности Кобба–Дугласа, для любого допустимого распределения, в котором хотя бы у одного потребителя в наборе есть только одно благо в положительном количестве, можно построить Парето-улучшение, перераспределив блага так, чтобы у потребителя с одним благом в наборе не осталось благ, а весь запас имеющихся благ был в наборе другого потребителя. Это означает, что, кроме граничных точек, в которых совокупный начальный запас оказывается только у одного из потребителей, других граничных оптимальных по Парето распределений нет.

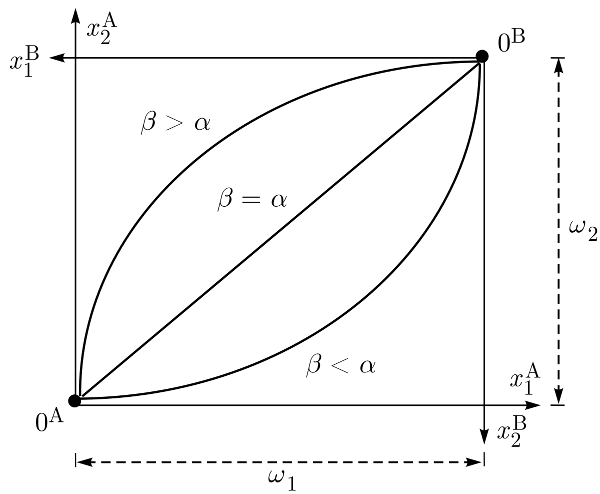

Рис. 1.10. Множество Парето-оптимальных распределений в экономике обмена из примера **1.3**

Таким образом, в данной экономике существует только два граничных Парето-оптимальных распределения, $\left(x_1^{\mathrm{A}} = x_2^{\mathrm{A}} = 0,\, x_1^{\mathrm{B}} = \omega_1,\, x_2^{\mathrm{B}} = \omega_2\right)$ и $\left(x_1^{\mathrm{A}} = \omega_1,\, x_2^{\mathrm{A}} = \omega_2,\, x_1^{\mathrm{B}} = x_2^{\mathrm{B}} = 0\right)$, и окончательно характеристику множества Парето-оптимальных распределений можно записать так: $x_2^{\mathrm{A}}\left(x_1^{\mathrm{A}}\right) = = \dfrac{\beta(1-\alpha)\,\omega_2 x_1^{\mathrm{A}}}{\alpha\omega_1(1-\beta) + x_1^{\mathrm{A}}(\beta-\alpha)}$ при $0 \leqslant x_1^{\mathrm{A}} \leqslant \omega_1$ (рис. **1.10**). ■

Формально Парето-оптимальное распределение является решением задач максимизации полезности одного потребителя при условии, что второй потребитель получает уровень полезности не ниже заданного, и выполнении условий допустимости:

$$\begin{cases} u^{\mathrm{A}}\left(x_1^{\mathrm{A}}, x_2^{\mathrm{A}}\right) \to \max\limits_{x_1^{\mathrm{A}}, x_2^{\mathrm{A}}, x_1^{\mathrm{B}}, x_2^{\mathrm{B}} \geqslant 0} \\ u^{\mathrm{B}}\left(x_1^{\mathrm{B}}, x_2^{\mathrm{B}}\right) \geqslant \overline{u}^{\mathrm{B}} \\ x_1^{\mathrm{A}} + x_1^{\mathrm{B}} = \omega_1 \\ x_2^{\mathrm{A}} + x_2^{\mathrm{B}} = \omega_2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} u^{\mathrm{B}}\left(x_1^{\mathrm{B}}, x_2^{\mathrm{B}}\right) \to \max\limits_{x_1^{\mathrm{A}}, x_2^{\mathrm{A}}, x_1^{\mathrm{B}}, x_2^{\mathrm{B}} \geqslant 0} \\ u^{\mathrm{A}}\left(x_1^{\mathrm{A}}, x_2^{\mathrm{A}}\right) \geqslant \overline{u}^{\mathrm{A}} \\ x_1^{\mathrm{A}} + x_1^{\mathrm{B}} = \omega_1 \\ x_2^{\mathrm{A}} + x_2^{\mathrm{B}} = \omega_2 \end{cases}. \quad (1.2)$$

В первой задаче максимизируется полезность потребителя A при ограничении на полезность потребителя B, а во второй — наоборот. Если предпочтения потребителей строго монотонны, то решения обеих задач будут одинаковыми, и в решении задач ограничение на полезность второго потребителя выполняется как равенство, поскольку в противном случае можно было так перераспределить ресурсы, не нарушая ограничений задачи, чтобы получить большее значение целевой функции.

Более подробно задача на поиск Парето-оптимальных распределений обсуждается в приложении 1 к этой главе, а здесь лишь отметим, что она становится интуитивно понятной, если «прочитать» ее графически. Рассмотрим первую из задач в (1.2), где в качестве целевой функции выступает функция полезности потребителя A. Зафиксируем кривую безразличия потребителя B, соответствующую полезности $\overline{u}^{\mathrm{B}}$ (выполнение условия $u^{\mathrm{B}}\left(x_1^{\mathrm{B}}, x_2^{\mathrm{B}}\right) = \overline{u}^{\mathrm{B}}$), и, двигаясь вдоль нее в ящике Эджворта (выполнение условий допустимости), найдем точку, где достигается наибольшая полезность потребителя A (максимизируем целевую функцию) (рис. **1.11**). На рис. **1.11** при заданной кривой безразличия потребителя B среди всех допустимых распределений наибольшая полезность потребителя A достигается в точке $\overline{x}$, которая является Парето-оптимальной. Зафиксировав

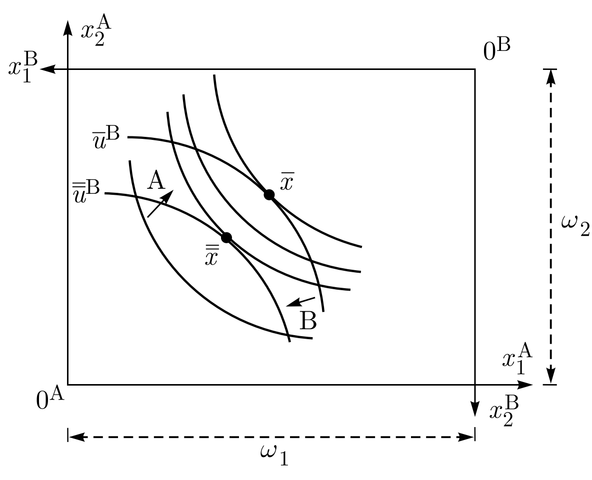

Рис. 1.11. Графическая интерпретация задачи (1.2) (стрелками указано направление роста полезности)

другую кривую безразличия потребителя В, например, на уровне $\overline{\overline{u}}^{\mathrm{B}}$, и действуя по тому же алгоритму, найдем другую Парето-оптимальную точку $\overline{\overline{x}}$, и т.д.

1.2. ЗАКОН ВАЛЬРАСА И РАВНОВЕСИЕ ПО ВАЛЬРАСУ

До сих пор рассматривалось централизованное распределение ресурсов в экономике. Другими словами, такое, как будто существующий над потребителями благожелательный «верховный правитель» распределяет имеющиеся в экономике блага в соответствии с собственным критерием, в качестве которого был выбран критерий оптимальности по Парето. Теперь предположим, что индивиды предоставлены сами себе. Они распоряжаются своим начальным запасом, рационально руководствуясь исключительно собственными интересами, но при этом каждый из них не знает ничего о запасе другого.

Будем считать, что цены благ положительны, и обозначим через p_i цену единицы блага i, $i = 1, 2$. Тогда задача индивида k, $k = \mathrm{A}, \mathrm{B}$, заключается в выборе такого набора благ, который на бюджетном множестве (при условии, что доход потребителя задан стоимостью начальных запасов) доставляет максимум полезности потребителя:

$$\begin{cases} u^k\left(x_1^k,\, x_2^k\right) \to \max\limits_{x_1^k,\, x_2^k \geqslant 0} \\ p_1 x_1^k + p_2 x_2^k \leqslant p_1 \omega_1^k + p_2 \omega_2^k \end{cases}.$$

Как проиллюстрировать подобное поведение в ящике Эджворта? Если бы речь шла о каждом потребителе в отдельности, то на этот вопрос было бы несложно ответить, так как рисунок представлял бы собой иллюстрацию к стандартной задаче потребителя, как показано на рис. **1.12**.

Бюджетная линия проходит через точку начальных запасов каждого потребителя, так как при любых ценах стоимость набора, представляющего собой начальные запасы, равна доходу потребителя. Кривые безразличия на рисунках изображены схематично. Но как совместить эти рисунки в ящике Эджворта? В первую очередь необходимо понять, как бюджетные линии будут расположены друг относительно друга. Отметим, что точки начальных запасов потребителей в ящике Эджворта совпадают. Кроме того, поскольку свои задачи потребители решают при одинаковых ценах, то их бюджетные линии будут иметь одинаковый наклон. Следовательно, в ящике Эджворта бюджетные линии потребителей совпадут.

Это можно показать и формально. Уравнение бюджетной линии потребителя А имеет вид: $p_1 x_1^{\mathrm{A}} + p_2 x_2^{\mathrm{A}} = p_1 \omega_1^{\mathrm{A}} + p_2 \omega_2^{\mathrm{A}}$, а потребителя В соответственно — $p_1 x_1^{\mathrm{B}} + p_2 x_2^{\mathrm{B}} = p_1 \omega_1^{\mathrm{B}} + p_2 \omega_2^{\mathrm{B}}$. Воспользовавшись тем, что в ящике Эджворта $x_1^{\mathrm{B}} = \omega_1^{\mathrm{A}} + \omega_1^{\mathrm{B}} - x_1^{\mathrm{A}}$ и $x_2^{\mathrm{B}} = \omega_2^{\mathrm{A}} + \omega_2^{\mathrm{B}} - x_2^{\mathrm{A}}$, запишем

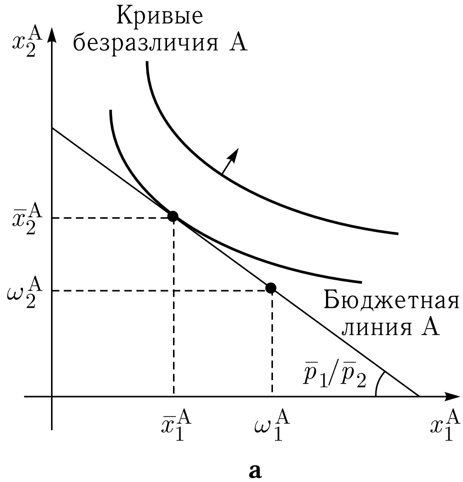

Рис. 1.12. Иллюстрация к решению задач потребителей (стрелками указано направление роста полезности)

уравнение бюджетной линии потребителя B в виде $p_1\left(\omega_1^{\mathrm{A}}+\omega_1^{\mathrm{B}}-x_1^{\mathrm{A}}\right)+$ $+\,p_2\left(\omega_2^{\mathrm{A}}+\omega_2^{\mathrm{B}}-x_2^{\mathrm{A}}\right)=p_1\omega_1^{\mathrm{B}}+p_2\omega_2^{\mathrm{B}}$, откуда получим уравнение бюджетной линии A: $p_1x_1^{\mathrm{A}}+p_2x_2^{\mathrm{A}}=p_1\omega_1^{\mathrm{A}}+p_2\omega_2^{\mathrm{A}}$.

Однако, поскольку потребители не знают о начальных запасах друг друга, то может оказаться, что их выбор лежит за границами ящика Эджворта. Но даже если выбор каждого лежит внутри ящика, итоговое распределение может быть недопустимым, как на рис. **1.13**.

Поскольку высота ящика равна совокупному начальному запасу второго блага, на рис. **1.13** при ценах $\dfrac{\overline{p}_1}{\overline{p}_2}$ выполнено $\overline{x}_2^{\mathrm{A}}+\overline{x}_2^{\mathrm{B}}>\omega_2^{\mathrm{A}}+\omega_2^{\mathrm{B}}$, т.е. по-

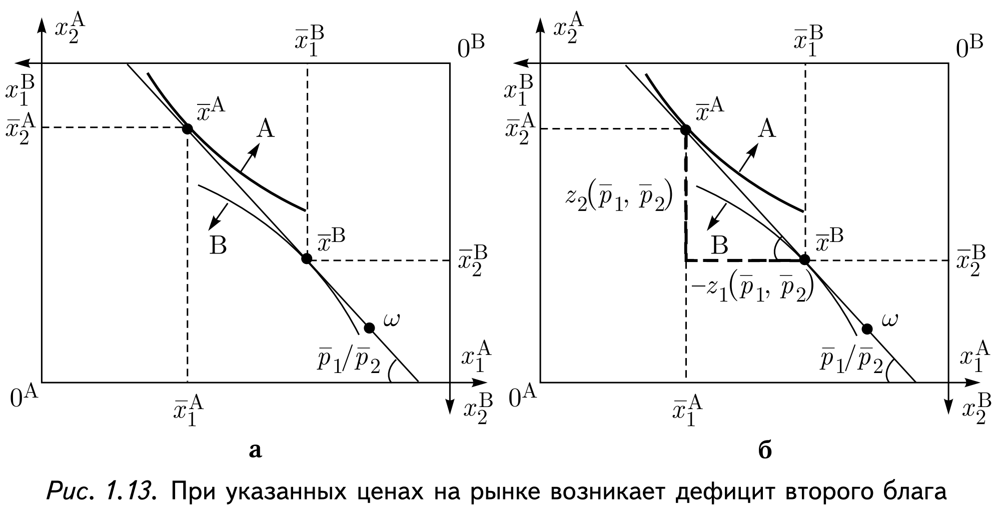

Рис. 1.13. При указанных ценах на рынке возникает дефицит второго блага и профицит первого (стрелками указано направление роста полезности)

требители в сумме хотят купить второго блага больше, чем есть в экономике. Первое благо, наоборот, остается недораспределенным, поскольку $\overline{x}_1^{\mathrm{A}} + \overline{x}_1^{\mathrm{B}} < \omega_1^{\mathrm{A}} + \omega_1^{\mathrm{B}}$. Несмотря на то что цены выбраны произвольно, такая ситуация неслучайна: это следствие закона, называемого законом Вальраса. Однако, чтобы сформулировать этот закон, требуется ввести новое понятие — «функция избыточного спроса».

Определение 1.4. В экономике обмена с двумя благами и двумя потребителями (А и В) функция избыточного спроса на благо i, $i = 1, 2$, при ценах p_1, p_2 имеет вид: $z_i(p_1, p_2) = x_i^{\mathrm{A}}(p_1, p_2) + x_i^{\mathrm{B}}(p_1, p_2) - \omega_i^{\mathrm{A}} - \omega_i^{\mathrm{B}}$, где $x_i^k(p_1, p_2)$ — функция спроса потребителя k, $k = \mathrm{A}, \mathrm{B}$, на благо i. ■

Другими словами, функция избыточного спроса при каждом уровне цен показывает, на сколько объем спроса превышает имеющийся в экономике запас (предложение) блага. Таким образом, на рис. **1.13** $z_2(\overline{p}_1, \overline{p}_2) > 0$, т.е. имеет место дефицит второго блага. Значение избыточного спроса на рынке первого блага при указанных ценах — меньше нуля, так как в сумме потребители хотели бы приобрести меньше блага, чем его совокупный запас. Следовательно, если требуется указать, какое количество единиц составляет профицит первого блага, то необходимо перед значением избыточного спроса поставить знак «минус», т.е. $(-z_1(\overline{p}_1, \overline{p}_2)) > 0$. На рис. **1.13 (б)** отмечены значения дефицита и профицита. Таким образом, в образовавшемся прямоугольном треугольнике известны значения катетов $((-z_1(\overline{p}_1, \overline{p}_2))$ и $z_2(\overline{p}_1, \overline{p}_2))$ и тангенса угла, прилегающего к горизонтальному катету, $\dfrac{\overline{p}_1}{\overline{p}_2}$. Воспользовавшись тем, что тангенс угла в прямоугольном треугольнике равен отношению противолежащего катета к прилежащему, запишем $\dfrac{\overline{p}_1}{\overline{p}_2} = \dfrac{z_2(\overline{p}_1, \overline{p}_2)}{-z_1(\overline{p}_1, \overline{p}_2)}$, что после преобразования можно представить в виде $\overline{p}_1 z_1(\overline{p}_1, \overline{p}_2) + \overline{p}_2 z_2(\overline{p}_1, \overline{p}_2) = 0$. Полученное выражение означает, что при ценах $(\overline{p}_1, \overline{p}_2)$ стоимость совокупного избыточного спроса равна нулю. Этот результат верен не только для ситуации, изображенной на рис. **1.13**, но и в более общем случае и носит название закона Вальраса. Сформулируем соответствующее утверждение и докажем его.

Утверждение 1.3. Если предпочтения потребителей монотонны[11], то при любых ценах, при которых определен избыточный спрос, выполнен закон Вальраса: $p_1 z_1(p_1, p_2) + p_2 z_2(p_1, p_2) = 0$.

Доказательство. Монотонность предпочтений означает, что при увеличении в наборе потребителя обоих благ его полезность возрастает[12]. При выполнении этого свойства решение задачи потребителя всегда лежит

[11] Определение монотонности предпочтений приведено в приложении 2 к этой главе.

[12] Напомним, что, по предположению, предпочтения потребителей представимы непрерывными функциями полезности.

на бюджетной линии, поскольку для любой точки внутри бюджетного множества найдется другая доступная потребителю точка, в которой обоих благ будет больше, а значит, она будет более предпочтительной.

Таким образом, для потребителей A и B, если решения задач потребителей существуют, выполнено соответственно $p_1 x_1^A(p_1, p_2) + p_2 x_2^A(p_1, p_2) = p_1\omega_1^A + p_2\omega_2^A$ и $p_1 x_1^B(p_1, p_2) + p_2 x_2^B(p_1, p_2) = p_1\omega_1^B + p_2\omega_2^B$. Просуммировав эти тождества и преобразовав, получим следующее: $p_1\big(x_1^A(p_1, p_2) + x_1^B(p_1, p_2) - \omega_1^A - \omega_1^B\big) + p_2\big(x_2^A(p_1, p_2) + x_2^B(p_1, p_2) - \omega_2^A - \omega_2^B\big) = 0$. Полученное выражение означает, что при всех ценах, при которых задачи потребителей имеют решения, выполнен закон Вальраса: $p_1 z_1(p_1, p_2) + p_2 z_2(p_1, p_2) = 0$. Что и требовалось доказать. ■

Заметим, что в утверждении **1.3** условием выполнения закона Вальраса названа монотонность. Однако доказательство верно при выполнении любого свойства предпочтений, гарантирующего, что решение задачи потребителя лежит на бюджетной линии. В курсах микроэкономики продвинутого уровня вводится свойство локальной ненасыщаемости предпочтений, при выполнении которого в сколь угодно малой окрестности любого набора найдется набор, который лучше его. Из монотонности предпочтений следует их локальная ненасыщаемость, однако обратное неверно. И, безусловно, закон Вальраса будет выполнен при строго монотонных предпочтениях, поскольку из строгой монотонности предпочтений следует их монотонность.

Для того чтобы гарантировать отсутствие дефицита и профицита в экономике, необходимо (и достаточно) потребовать равенства значения избыточного спроса на каждом рынке нулю. В ящике Эджворта в этом случае наборы, выбираемые потребителями, совпадут, как показано на рис. **1.14**.

Это означает, что потребители независимо выберут наборы, являющиеся компонентами допустимого распределения, называемого равновесным

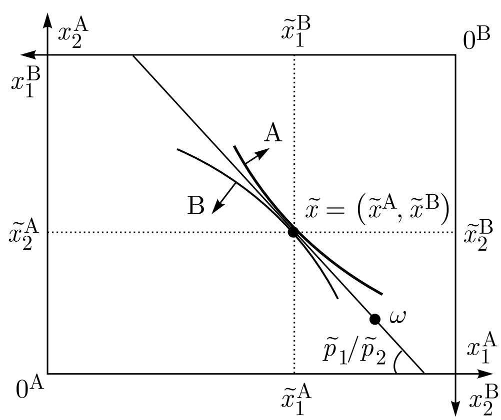

Рис. 1.14. Иллюстрация равновесия по Вальрасу в ящике Эджворта (стрелками указано направление роста полезности)

по Вальрасу, а цены, при которых был сделан такой выбор, называются равновесными. Формальное определение равновесия по Вальрасу дано ниже.

Определение 1.5. Равновесием по Вальрасу в экономике обмена с двумя благами и двумя потребителями называется набор $\left(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2, \widetilde{x}_1^{\mathrm{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathrm{A}}, \widetilde{x}_1^{\mathrm{B}}, \widetilde{x}_2^{\mathrm{B}}\right)$, такой, что:

1) $\left(\widetilde{x}_1^{\mathrm{A}}, \widetilde{x}_2^{\mathrm{A}}\right)$ — решение задачи потребителя A при равновесных ценах $\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2$:

$$\begin{cases} u^{\mathrm{A}}\left(x_1^{\mathrm{A}}, x_2^{\mathrm{A}}\right) \to \max\limits_{x_1^{\mathrm{A}}, x_2^{\mathrm{A}} \geqslant 0} \\ p_1 x_1^{\mathrm{A}} + p_2 x_2^{\mathrm{A}} \leqslant p_1 \omega_1^{\mathrm{A}} + p_2 \omega_2^{\mathrm{A}} \end{cases};$$

2) $\left(\widetilde{x}_1^{\mathrm{B}}, \widetilde{x}_2^{\mathrm{B}}\right)$ — решение задачи потребителя B при равновесных ценах $\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2$:

$$\begin{cases} u^{\mathrm{B}}\left(x_1^{\mathrm{B}}, x_2^{\mathrm{B}}\right) \to \max\limits_{x_1^{\mathrm{B}}, x_2^{\mathrm{B}} \geqslant 0} \\ p_1 x_1^{\mathrm{B}} + p_2 x_2^{\mathrm{B}} \leqslant p_1 \omega_1^{\mathrm{B}} + p_2 \omega_2^{\mathrm{B}} \end{cases};$$

3) выполнены условия сбалансированности рынков:

$$\widetilde{x}_1^{\mathrm{A}} + \widetilde{x}_1^{\mathrm{B}} = \omega_1 \quad \text{и} \quad \widetilde{x}_2^{\mathrm{A}} + \widetilde{x}_2^{\mathrm{B}} = \omega_2. \; \blacksquare$$

Обратите внимание, что в определении не фигурирует прилагательное «допустимое» в отличие от определения Парето-оптимальных распределений. Однако условия сбалансированности рынков совпадают с условиями допустимости, и, таким образом, равновесное по Вальрасу распределение допустимо по определению.

Важно также отметить, что равновесные цены определяются с точностью до множителя. Это связано с тем, что решение задачи потребителя зависит от отношения цен, а не от их абсолютных значений. Другими словами, потребитель выберет при векторе цен $\widetilde{p} = (\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2)$ такой же набор, как при векторе $\overline{p} = (\lambda\widetilde{p}_1, \lambda\widetilde{p}_2)$, где $\lambda > 0$. Следовательно, если цены $\widetilde{p}$ являются равновесными, то равновесными являются и цены $\overline{p}$, причем равновесное распределение в этих случаях будет одним и тем же (или же одними и теми же в случае, если равновесное распределение не единственно). Таким образом, при поиске равновесия определяется только равновесное отношение цен $\dfrac{p_1}{p_2}$. Поэтому иногда удобно пронормировать одну из цен, например, приравняв ее к единице. В этом случае поиск равновесных цен сведется к поиску другой, непронормированной цены.

Если в экономике выполнен закон Вальраса, то достаточно уравновесить рынок одного блага (неважно, первого или второго), так как другой рынок будет уравновешен автоматически. Действительно, если при ценах $\widetilde{p} = (\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2)$ выполнено, например, $z_1(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2) = 0$, т.е. на рынке первого блага нет ни дефицита, ни профицита, а значит, он уравновешен, то из закона Вальраса, $\widetilde{p}_1 z_1(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2) + \widetilde{p}_2 z_2(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2) = 0$, следует[13], что $z_2(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2) = 0$, т.е. уравновешен и рынок второго блага[14].

Пример 1.4. Пусть предпочтения потребителей представимы функциями полезности $u^{\mathrm{A}}\left(x_1^{\mathrm{A}}, x_2^{\mathrm{A}}\right) = \left(x_1^{\mathrm{A}}\right)^{\alpha}\left(x_2^{\mathrm{A}}\right)^{1-\alpha}$ и $u^{\mathrm{B}}\left(x_1^{\mathrm{B}}, x_2^{\mathrm{B}}\right) = \left(x_1^{\mathrm{B}}\right)^{\beta}\left(x_2^{\mathrm{B}}\right)^{1-\beta}$, где $0 < \alpha < 1$ и $0 < \beta < 1$. Пусть первоначальные запасы потребителей задаются векторами $\omega^{\mathrm{A}} = \left(\omega_1^{\mathrm{A}}, \omega_2^{\mathrm{A}}\right)$ и $\omega^{\mathrm{B}} = \left(\omega_1^{\mathrm{B}}, \omega_2^{\mathrm{B}}\right)$. Найдем равновесие в этой экономике, следуя определению равновесия **1.5**.

Напомним, каким образом могут быть выведены функции спроса, решив задачу потребителя A, которая имеет вид:

$$\begin{cases} \left(x_1^{\mathrm{A}}\right)^{\alpha}\left(x_2^{\mathrm{A}}\right)^{1-\alpha} \to \max\limits_{x_1^{\mathrm{A}},\, x_2^{\mathrm{A}} \geqslant 0} \\ p_1 x_1^{\mathrm{A}} + p_2 x_2^{\mathrm{A}} \leqslant p_1 \omega_1^{\mathrm{A}} + p_2 \omega_2^{\mathrm{A}} \end{cases}.$$

Начнем с графического представления бюджетного множества потребителя, т.е. всех наборов, которые ему доступны. Бюджетная линия, граница бюджетного множества — это множество наборов, стоимость которых равна доходу потребителя. Уравнение бюджетной линии для потребителя A имеет вид: $p_1 x_1^{\mathrm{A}} + p_2 x_2^{\mathrm{A}} = p_1 \omega_1^{\mathrm{A}} + p_2 \omega_2^{\mathrm{A}}$. Выразив переменную x_2^{A}, представим уравнение бюджетной линии в виде $x_2^{\mathrm{A}} = -\dfrac{p_1}{p_2} x_1^{\mathrm{A}} + \dfrac{p_1 \omega_1^{\mathrm{A}} + p_2 \omega_2^{\mathrm{A}}}{p_2}$. Таким образом, уравнение записано в виде, знакомом из школьного курса, — это прямая (отрезок прямой) с наклоном $\left(-\dfrac{p_1}{p_2}\right)$. Зная только о доступных потребителю наборах, невозможно сказать, какие для него более, а какие менее предпочтительны. Поэтому необходимо нанести на рисунок кривые безразличия. Уравнение произвольной кривой безразличия потребителя A имеет вид: $\left(x_1^{\mathrm{A}}\right)^{\alpha}\left(x_2^{\mathrm{A}}\right)^{1-\alpha} = \overline{u}$. Для $\overline{u} > 0$ кривая безразличия в осях $\left(x_1^{\mathrm{A}}, x_2^{\mathrm{A}}\right)$ представляет собой гиперболу, задаваемую уравнением $x_2^{\mathrm{A}} = \dfrac{(\overline{u})^{1/(1-\alpha)}}{\left(x_1^{\mathrm{A}}\right)^{\alpha/(1-\alpha)}}$. Чем выше значение полезности $\overline{u}$, тем дальше от начала координат расположена гипербола. Отдельно оговорим случай, когда полезность потребителя равна нулю, $\overline{u} = 0$. В этом случае по крайней мере одна из координат, x_1^{A} и (или) x_2^{A}, равна нулю, и соответствующая кривая безразличия совпадает с осями координат. Однако при положительном доходе потребитель никогда не выберет точку, в которой одна из координат равна нулю, так как в случае приобретения набора с положительным объемом каждого блага его полезность больше.

[13] Напомним, что мы ограничиваемся рассмотрением только положительных цен.

[14] Для случая $N \geqslant 2$ благ из закона Вальраса следует, что достаточно уравновесить $N - 1$ рынок, тогда N-й будет уравновешен автоматически.

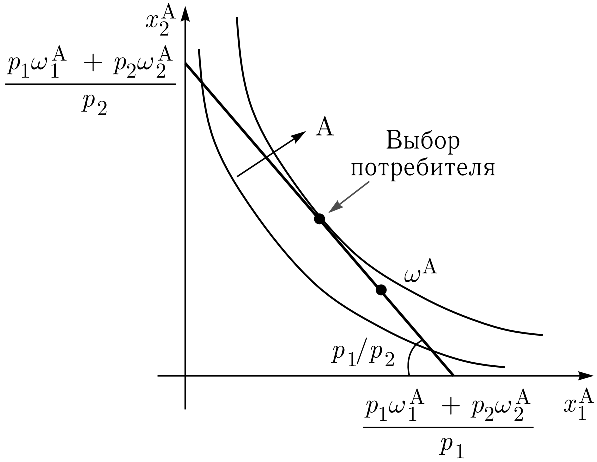

Рис. 1.15. Иллюстрация к задаче потребителя А в примере **1.4** (стрелкой указано направление роста полезности)

На рис. **1.15** изображены бюджетная линия и кривые безразличия. Максимальная полезность на бюджетном множестве достигается в точке, где кривая безразличия касается бюджетной линии.

Оптимальная точка лежит на бюджетной линии, т.е. удовлетворяет уравнению $p_1x_1^{\mathrm{A}} + p_2x_2^{\mathrm{A}} = p_1\omega_1^{\mathrm{A}} + p_2\omega_2^{\mathrm{A}}$. Запишем условие касания бюджетной линии и кривой безразличия, которое означает равенство наклонов кривой безразличия и бюджетной линии в искомой точке. Для функции полезности потребителя А выполнено $MRS_{12}^{\mathrm{A}}\left(x^{\mathrm{A}}\right) = \dfrac{\alpha x_2^{\mathrm{A}}}{(1-\alpha)x_1^{\mathrm{A}}}$, т.е. наклон кривой безразличия равен этой величине с обратным знаком. Наклон бюджетной линии известен — это отношение цен $\left(-\dfrac{p_1}{p_2}\right)$. Следовательно, координаты оптимальной точки должны быть такими, что, подставив их в выражение для предельной нормы замещения, получим $\dfrac{p_1}{p_2}$. Таким образом, второе условие, которому должна удовлетворять оптимальная точка: $\dfrac{\alpha x_2^{\mathrm{A}}}{(1-\alpha)x_1^{\mathrm{A}}} = \dfrac{p_1}{p_2}$. Решив систему $\begin{cases} p_1x_1^{\mathrm{A}} + p_2x_2^{\mathrm{A}} = p_1\omega_1^{\mathrm{A}} + p_2\omega_2^{\mathrm{A}} \\ \dfrac{\alpha x_2^{\mathrm{A}}}{(1-\alpha)x_1^{\mathrm{A}}} = \dfrac{p_1}{p_2} \end{cases}$, получим искомые функции спроса: $x_1^{\mathrm{A}}\left(p_1,\, p_2\right) = \dfrac{\alpha\left(p_1\omega_1^{\mathrm{A}} + p_2\omega_2^{\mathrm{A}}\right)}{p_1}$ и $x_2^{\mathrm{A}}\left(p_1,\, p_2\right) = \dfrac{(1-\alpha)\left(p_1\omega_1^{\mathrm{A}} + p_2\omega_2^{\mathrm{A}}\right)}{p_2}$.

Аналогично, решив задачу потребителя B, получим $x_1^{\mathrm{B}}\left(p_1,\, p_2\right) = \dfrac{\beta\left(\omega_1^{\mathrm{B}}p_1 + \omega_2^{\mathrm{B}}p_2\right)}{p_1}$, $x_2^{\mathrm{B}}\left(p_1,\, p_2\right) = \dfrac{(1-\beta)\left(\omega_1^{\mathrm{B}}p_1 + \omega_2^{\mathrm{B}}p_2\right)}{p_2}$.

Для нахождения функций спроса можно было также воспользоваться известным результатом, справедливым для предпочтений, представимых функцией полезности Кобба–Дугласа вида $u(x_1, x_2) = (x_1)^{\alpha}(x_2)^{\beta}$, где α, $\beta > 0$: потребитель всегда тратит фиксированную долю дохода на каждое благо. И эти доли определяются степенями, в которые возводятся количества благ в записи функции полезности. Так, доля расходов на первое благо в доходе потребителя составляет $\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$, соответственно $p_1 x_1 = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} m$, где m — доход потребителя. Откуда находим функцию спроса потребителя на первое благо при ценах p_1, p_2 и доходе m: $x_1(p_1, p_2, m) = \dfrac{\alpha m}{(\alpha+\beta)p_1}$. Соответственно доля расходов потребителя на второе благо составит $\dfrac{\beta}{\alpha+\beta} = 1 - \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$. Таким образом, функция спроса потребителя на второе благо имеет вид: $x_2(p_1, p_2, m) = \dfrac{\beta m}{(\alpha+\beta)p_2}$.

Далее, следуя определению равновесия, необходимо уравновесить рынки благ, т.е. найти такое соотношение цен, при котором избыточный спрос на каждом рынке равен нулю. Как следствие закона Вальраса, если при некотором соотношении цен уравновешен рынок одного блага, то рынок второго блага будет уравновешен автоматически. Уравновесим рынок первого блага: $x_1^{\mathrm{A}}(p_1, p_2) + x_1^{\mathrm{B}}(p_1, p_2) = \omega_1^{\mathrm{A}} + \omega_1^{\mathrm{B}}$. Подставив функции спроса потребителей на первое благо, получим $\dfrac{\alpha\left(p_1\omega_1^{\mathrm{A}} + p_2\omega_2^{\mathrm{A}}\right)}{p_1} + \dfrac{\beta\left(p_1\omega_1^{\mathrm{B}} + p_2\omega_2^{\mathrm{B}}\right)}{p_1} = \omega_1^{\mathrm{A}} + \omega_1^{\mathrm{B}}$, откуда найдем равновесное отношение цен: $\dfrac{\widetilde{p}_1}{\widetilde{p}_2} = \dfrac{\alpha\omega_2^{\mathrm{A}} + \beta\omega_2^{\mathrm{B}}}{(1-\alpha)\omega_1^{\mathrm{A}} + (1-\beta)\omega_1^{\mathrm{B}}}$. Найдем равновесное распределение, подставив равновесное соотношение цен в функции спроса потребителя A: $\widetilde{x}_1^{\mathrm{A}} = \alpha\omega_1^{\mathrm{A}} + \dfrac{\alpha\omega_2^{\mathrm{A}}\left((1-\alpha)\omega_1^{\mathrm{A}} + (1-\beta)\omega_1^{\mathrm{B}}\right)}{\alpha\omega_2^{\mathrm{A}} + \beta\omega_2^{\mathrm{B}}}$, $\widetilde{x}_2^{\mathrm{A}} = (1-\alpha)\omega_2^{\mathrm{A}} + \dfrac{(1-\alpha)\omega_1^{\mathrm{A}}\left(\alpha\omega_2^{\mathrm{A}} + \beta\omega_2^{\mathrm{B}}\right)}{(1-\alpha)\omega_1^{\mathrm{A}} + (1-\beta)\omega_1^{\mathrm{B}}}$, а равновесный набор потребителя B можно найти аналогично или из условий уравновешенности рынков: $\widetilde{x}_1^{\mathrm{B}} = \beta\omega_1^{\mathrm{B}} + \dfrac{\beta\omega_2^{\mathrm{B}}\left((1-\alpha)\omega_1^{\mathrm{A}} + (1-\beta)\omega_1^{\mathrm{B}}\right)}{\alpha\omega_2^{\mathrm{A}} + \beta\omega_2^{\mathrm{B}}}$, $\widetilde{x}_2^{\mathrm{B}} = (1-\beta)\omega_2^{\mathrm{B}} + \dfrac{(1-\beta)\omega_1^{\mathrm{B}}\left(\alpha\omega_2^{\mathrm{A}} + \beta\omega_2^{\mathrm{B}}\right)}{(1-\alpha)\omega_1^{\mathrm{A}} + (1-\beta)\omega_1^{\mathrm{B}}}$. Заметим, что при поиске равновесного распределения нормировка цен не проводилась. Можно было бы ввести, например, такую нормировку: $\widetilde{p}_1 = \alpha\omega_2^{\mathrm{A}} + \beta\omega_2^{\mathrm{B}}$, тогда $\widetilde{p}_2 = (1-\alpha)\omega_1^{\mathrm{A}} + (1-\beta)\omega_1^{\mathrm{B}}$, при этом равновесное распределение благ осталось бы неизменным. Графически равновесие в рассматриваемой экономике можно проиллюстрировать подобно тому, как показано на рис. **1.14**.

Как видно из рисунка, равновесное распределение Парето-оптимально. В этом нетрудно убедиться, проверив, что найденное равновесное распределение удовлетворяет характеристике Парето-оптимальных распределений, полученной для данной экономики в примере **1.3**. ■

1.3. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РАВНОВЕСИЯ

В примере **1.4**, следуя определению равновесия по Вальрасу, мы без труда нашли равновесное соотношение цен и равновесное распределение. Но всегда ли удастся это сделать? Другими словами, всегда ли равновесие по Вальрасу существует? Как показывает следующий пример, оказывается, в общем случае, при произвольных предпочтениях потребителей, нельзя ответить на этот вопрос утвердительно.

Пример 1.5. Пусть предпочтения потребителей представимы функциями полезности вида $u^{\mathrm{A}}\left(x^{\mathrm{A}}\right) = \left(x_1^{\mathrm{A}}\right)^2 + \left(x_2^{\mathrm{A}}\right)^2$ и $u^{\mathrm{B}}\left(x^{\mathrm{B}}\right) = x_1^{\mathrm{B}} + x_2^{\mathrm{B}}$. Первоначальные запасы потребителей заданы векторами $\omega^{\mathrm{A}} = (2,\ 9)$ и $\omega^{\mathrm{B}} = (8,\ 1)$.

Для того чтобы найти равновесие (или убедиться в его отсутствии), воспользуемся определением равновесия, т.е. уравновесим рынки. Для этого в первую очередь нужно, решив задачи потребителей, получить функции спроса на блага.

Начнем с потребителя A. Кривые безразличия потребителя A задаются уравнениями вида $\left(x_1^{\mathrm{A}}\right)^2 + \left(x_2^{\mathrm{A}}\right)^2 = \overline{u}$, где $\overline{u} \geqslant 0$, т.е. представляют собой секторы окружностей в области неотрицательных значений переменных; центры окружностей расположены в начале координат ($x_1^{\mathrm{A}} = 0,\ x_2^{\mathrm{A}} = 0$), а их радиус равен $\sqrt{\overline{u}}$. Соответственно полезность потребителя тем выше, чем дальше от начала координат расположен сектор окружности. Поскольку каждая кривая безразличия пересекает вертикальную и горизонтальную оси на одинаковом расстоянии от начала координат, то, как показано на рис. **1.16**, при ценах $\dfrac{p_1}{p_2} = 1$ (когда бюджетная линия также пересекает оси на одинаковом расстоянии от начала координат) оптимальными для потребителя A будут два набора, $\left(x_1^{\mathrm{A}} = 0,\ x_2^{\mathrm{A}} = \dfrac{p_1\omega_1^{\mathrm{A}} + p_2\omega_2^{\mathrm{A}}}{p_2}\right)$ и $\left(x_1^{\mathrm{A}} = \dfrac{p_1\omega_1^{\mathrm{A}} + p_2\omega_2^{\mathrm{A}}}{p_1},\ x_2^{\mathrm{A}} = 0\right)$. Обратите внимание, что предпочтения потребителя A не удовлетворяют свойству выпуклости, и в точке касания кривой безразличия и бюджетной линии достигается наименьшая, а не наибольшая полезность среди всех наборов, лежащих на бюджетной линии. В этом нетрудно убедиться, сравнив полезность потребителя в точке

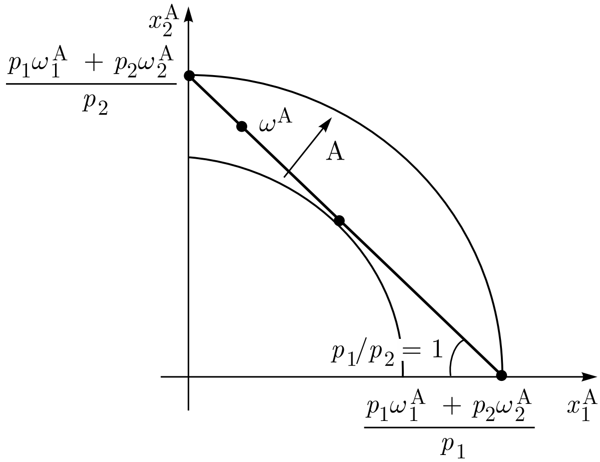

Рис. 1.16. Иллюстрация к задаче потребителя А в примере **1.5** при $p_1/p_2 = 1$ (стрелкой указано направление роста полезности)

на бюджетной линии, где $MRS_{12}^{\mathrm{A}}\left(x^{\mathrm{A}}\right) = \dfrac{p_1}{p_2}$, с полезностью в граничных точках.

Если соотношение цен меньше единицы, т.е. бюджетная линия по абсолютной величине имеет наклон $\dfrac{p_1}{p_2} < 1$, то решением задачи потребителя будет набор $\left(x_1^{\mathrm{A}} = \dfrac{p_1\omega_1^{\mathrm{A}} + p_2\omega_2^{\mathrm{A}}}{p_1},\ x_2^{\mathrm{A}} = 0\right)$ (рис. **1.17**). Соответственно при $\dfrac{p_1}{p_2} > 1$ для потребителя А оптимален набор $\left(x_1^{\mathrm{A}} = 0,\ x_2^{\mathrm{A}} = \dfrac{p_1\omega_1^{\mathrm{A}} + p_2\omega_2^{\mathrm{A}}}{p_2}\right)$.

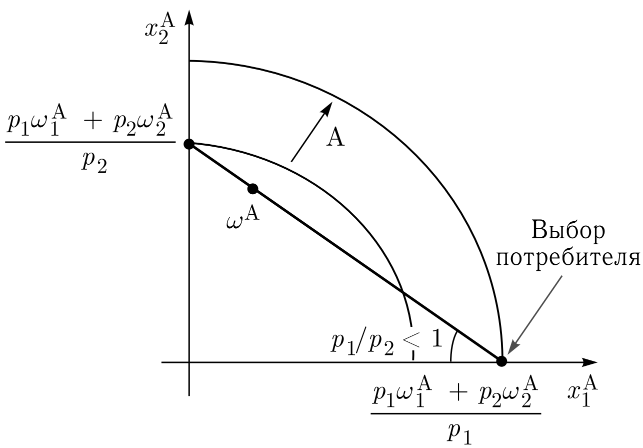

Рис. 1.17. Иллюстрация к задаче потребителя А в примере **1.5** при $p_1/p_2 < 1$ (стрелкой указано направление роста полезности)

Таким образом, при заданном первоначальном запасе благ функции (вообще говоря, отображения) спроса потребителя А имеют вид:

$$x_1^{\mathrm{A}}(p_1, p_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } \dfrac{p_1}{p_2} > 1 \\[2mm] \dfrac{2p_1 + 9p_2}{p_1}, & \text{если } \dfrac{p_1}{p_2} < 1 \\[2mm] 0 \text{ и } \dfrac{2p_1 + 9p_2}{p_1} = 11, & \text{если } \dfrac{p_1}{p_2} = 1 \\ \quad \text{при } p_1 x_1^{\mathrm{A}} + p_2 x_2^{\mathrm{A}} = 2p_1 + 9p_2 \end{cases},$$

$$x_2^{\mathrm{A}}(p_1, p_2) = \begin{cases} \dfrac{2p_1 + 9p_2}{p_2}, & \text{если } \dfrac{p_1}{p_2} > 1 \\[2mm] 0, & \text{если } \dfrac{p_1}{p_2} < 1 \\[2mm] 0 \text{ и } \dfrac{2p_1 + 9p_2}{p_2} = 11, & \text{если } \dfrac{p_1}{p_2} = 1 \\ \quad \text{при } p_1 x_1^{\mathrm{A}} + p_2 x_2^{\mathrm{A}} = 2p_1 + 9p_2 \end{cases}.$$

Обратите внимание, что запись функций спроса потребителя А подразумевает, что при ценах $\frac{p_1}{p_2} = 1$ существует два решения — $\left(x_1^{\mathrm{A}} = 0,\ x_2^{\mathrm{A}} = \frac{2p_1 + 9p_2}{p_2} = 11\right)$ и $\left(x_1^{\mathrm{A}} = \frac{2p_1 + 9p_2}{p_1} = 11,\ x_2^{\mathrm{A}} = 0\right)$. При $\frac{p_1}{p_2} > 1$ на первое благо потребитель А предъявляет нулевой спрос, а на второе благо тратит весь доход. С учетом того, что $\frac{p_1}{p_2} > 1$, количество второго блага, на которое предъявляет спрос А, превышает 11 единиц, так как $\frac{2p_1 + 9p_2}{p_2} = 2\frac{p_1}{p_2} + 9 > 11$. Аналогично, при $\frac{p_1}{p_2} < 1$, в решении задачи потребителя А — нулевой объем потребления второго блага, а количество первого блага превышает 11.

Для потребителя В блага 1 и 2 являются субститутами: он всегда готов заменить одно благо другим в пропорции один к одному. Соответственно кривые безразличия представляют собой прямые с наклоном, равным (по абсолютной величине) $MRS_{12}^{\mathrm{B}}\left(x^{\mathrm{B}}\right) = 1$, причем чем дальше от начала координат расположена кривая безразличия, тем лучше положение потребителя.

Функции спроса потребителя B при заданных первоначальных запасах имеют вид:

$$x_1^{\text{B}}(p_1, p_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } \dfrac{p_1}{p_2} > 1 \\ \dfrac{8p_1 + p_2}{p_1}, & \text{если } \dfrac{p_1}{p_2} < 1 \\ \left[0, \dfrac{8p_1 + p_2}{p_1}\right], & \text{если } \dfrac{p_1}{p_2} = 1 \\ \text{при } p_1 x_1^{\text{B}} + p_2 x_2^{\text{B}} = 8p_1 + p_2 \end{cases},$$

$$x_2^{\text{B}}(p_1, p_2) = \begin{cases} \dfrac{8p_1 + p_2}{p_2}, & \text{если } \dfrac{p_1}{p_2} > 1 \\ 0, & \text{если } \dfrac{p_1}{p_2} < 1 \\ \left[0, \dfrac{8p_1 + p_2}{p_2}\right], & \text{если } \dfrac{p_1}{p_2} = 1 \\ \text{при } p_1 x_1^{\text{B}} + p_2 x_2^{\text{B}} = 8p_1 + p_2 \end{cases}.$$

При ценах $\frac{p_1}{p_2} = 1$ одна из кривых безразличия совпадает с бюджетной линией, и поэтому задача потребителя B имеет множество решений: все точки на бюджетной линии для потребителя B оптимальны. В этом случае в записи функций спроса для значений x_1^{B} и x_2^{B} заданы интервалы. При этом, если значение x_1^{B}, например, выбрано из интервала, то значение x_2^{B} находится из уравнения бюджетной линии. Заметим, что при $\frac{p_1}{p_2} = 1$ верхняя граница интервалов составляет 9.

При $\frac{p_1}{p_2} < 1$ бюджетная линия более пологая, чем кривые безразличия, и максимум полезности потребителя на бюджетном множестве достигается при нулевом потреблении второго блага и максимально возможном объеме первого блага: $x_1^{\text{B}} = \frac{m^{\text{B}}}{p_1} = \frac{8p_1 + p_2}{p_1}$, где m^{B} — доход потребителя B. При $\frac{p_1}{p_2} > 1$ бюджетная линия, наоборот, более крутая, чем кривые безразличия. В этом случае потребитель потратит весь доход на второе благо: $x_2^{\text{B}} = \frac{m^{\text{B}}}{p_2} = \frac{8p_1 + p_2}{p_2}$ — и откажется от потребления первого.

Решив задачи потребителей, проверим, существуют ли цены, при которых рынки уравновешены.

1. Рассмотрим цены $\frac{p_1}{p_2} > 1$. В этом случае оба потребителя предъявляют нулевой спрос на первое благо, а значит, не выполнено условие сбалансированности рынков: $\widetilde{x}_1^{\text{A}} + \widetilde{x}_1^{\text{B}} = \omega_1$. Этого достаточно, чтобы сделать

вывод о том, что равновесия при указанных ценах не существует. Заметим, что так как предпочтения обоих потребителей монотонны[15], то в экономике выполнен закон Вальраса, а значит, если на рынке первого блага возникает профицит, то на рынке второго блага должен быть дефицит. Убедиться в этом можно, просуммировав $x_2^{\mathrm{A}}(p_1, p_2)$ и $x_2^{\mathrm{B}}(p_1, p_2)$ при соответствующих ценах:

$$\underbrace{\frac{2p_1 + 9p_2}{p_2}}_{x_2^{\mathrm{A}}} + \underbrace{\frac{8p_1 + p_2}{p_2}}_{x_2^{\mathrm{B}}} = 10\frac{p_1}{p_2} + 10 > \underbrace{10}_{\omega_2}.$$

2. При ценах $0 < \dfrac{p_1}{p_2} < 1$ оба потребителя предъявляют нулевой спрос на второе благо. В этом случае нарушается условие сбалансированности рынка второго блага: $\widetilde{x}_2^{\mathrm{A}} + \widetilde{x}_2^{\mathrm{B}} = \omega_2$. Аналогично случаю, рассмотренному выше, можно показать, что на рынке первого блага возникает дефицит.

3. При ценах $\dfrac{p_1}{p_2} = 1$ задача потребителя A имеет два решения. В одном из решений, где $x_2^{\mathrm{A}} = 0$, потребитель A хотел бы приобрести первого блага больше, чем есть в экономике: $\dfrac{2p_1 + 9p_2}{p_1} = 11 > \omega_1 = 10$. Во втором решении, где $x_1^{\mathrm{A}} = 0$, количество второго блага, которое хотел бы приобрести потребитель A, превышает его совокупный запас в экономике: $\dfrac{2p_1 + 9p_2}{p_2} = 11 > \omega_2 = 10$ (рис. **1.18**). Таким образом, равновесия в данной экономике не существует.

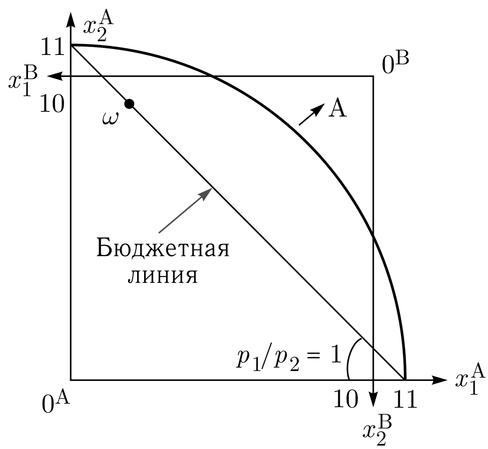

Рис. 1.18. Отсутствие равновесия при ценах $p_1/p_2 = 1$ в примере **1.5** (стрелкой указано направление роста полезности)

[15] Заданные предпочтения удовлетворяют даже более сильному свойству — строгой монотонности. Однако для гарантии выполнения закона Вальраса достаточно монотонности.

Причина в том, что функция спроса потребителя A является разрывной. Следовательно, не является непрерывной и функция избыточного спроса. Но если функция избыточного спроса терпит разрыв, то нет гарантии, что существуют цены такие, что $z_1(p_1, p_2) = 0$ и $z_2(p_1, p_2) = 0$. И как раз в рассматриваемой экономике, как было показано, такие цены отсутствуют.

Чтобы проиллюстрировать это, запишем избыточный спрос на первое благо. При ценах $\frac{p_1}{p_2} < 1$ избыточный спрос на первое благо равен

$$z_1(p_1, p_2) = \underbrace{\frac{2p_1 + 9p_2}{p_1}}_{x_1^{\mathrm{A}}} + \underbrace{\frac{8p_1 + p_2}{p_1}}_{x_1^{\mathrm{B}}} - \underbrace{10}_{\omega_1} = 10\frac{p_2}{p_1}.$$

При отношении цен $\frac{p_1}{p_2} = 1$ существует множество решений задачи потребителя B, при этом, подставив соответствующее отношение цен в функцию спроса, получим $x_1^{\mathrm{B}} \in [0, 9]$, и два решения задачи потребителя A, в одном из которых $x_1^{\mathrm{A}} = 0$, а в другом $x_1^{\mathrm{A}} = 11$. Если $x_1^{\mathrm{A}} = 0$, то избыточный спрос на первое благо — $z_1(p_1, p_2) \in [-10, -1]$. Если же $x_1^{\mathrm{A}} = 11$, то $z_1(p_1, p_2) \in [1, 10]$.

При $\frac{p_1}{p_2} > 1$ оба потребителя предъявляют нулевой спрос на первое благо. Следовательно, $z_1(p_1, p_2) = -10$.

Суммируя все вышесказанное, получим

$$z_1(p_1, p_2) = \begin{cases} 10\frac{p_2}{p_1}, & \frac{p_1}{p_2} < 1 \\ [-10, -1] \cup [1, 10], & \frac{p_1}{p_2} = 1 \\ -10, & \frac{p_1}{p_2} > 1 \end{cases}.$$

Графически результат представлен на рис. **1.19**.

Из рис. **1.19** видно, что не существует цен, при которых избыточный спрос на первое благо равен нулю — это обусловлено тем, что функция спроса потребителя A терпит разрыв. В свою очередь, отсутствие непрерывности функции спроса потребителя A вызвано тем, что его предпочтения не удовлетворяют свойству выпуклости. Отметим, однако, что разрывность функции избыточного спроса, вызванная невыпуклостью предпочтений, не всегда приводит к отсутствию равновесия. Например, в рассматриваемой экономике можно изменить вектор первоначальных запасов таким образом, что цены $\frac{p_1}{p_2} = 1$ будут равновесными. Для этого точка начальных запасов должна быть на или ниже диагонали, соединяющей точки $\left(x_1^{\mathrm{A}} = 0, x_2^{\mathrm{A}} = 10\right)$ и $\left(x_1^{\mathrm{A}} = 10, x_2^{\mathrm{A}} = 0\right)$.

Рассмотрим еще один способ представить ситуацию графически. Для этого изобразим в ящике Эджворта кривые цена–потребление. Напомним, что кривая цена–потребление — это множество оптимальных наборов при всех ценах, при которых существует решение задачи потребителя. Таким образом, если кривые цена–потребление пересекаются и точка пересечения выбирается потребителями при одинаковых ценах, то эта точка в ящике Эджворта является равновесным распределением, а цены, при которых потребители выбирают соответствующие наборы, являются равновесными. Нетрудно догадаться, что в рассматриваемом случае такого пересечения не будет.

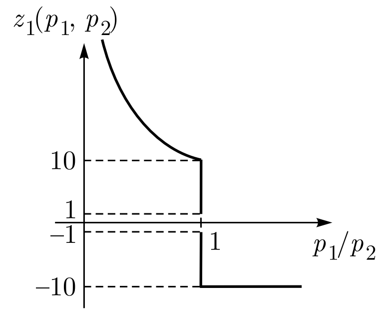

Рис. 1.19. График функции избыточного спроса на первое благо в примере **1.5**. Не существует цен, при которых $z_1(p_1, p_2) = 0$

Начнем с кривой цена–потребление потребителя A. Если $\frac{p_1}{p_2} = 1$, то существует два решения задачи: $\left(x_1^A = 0,\ x_2^A = 11\right)$ и $\left(x_1^A = 11,\ x_2^A = 0\right)$. Если же $0 < \frac{p_1}{p_2} < 1$, то во всех решениях $x_2^A = 0$. Причем чем меньше отношение цен $\frac{p_1}{p_2}$, тем больше первого блага может позволить себе потребитель.

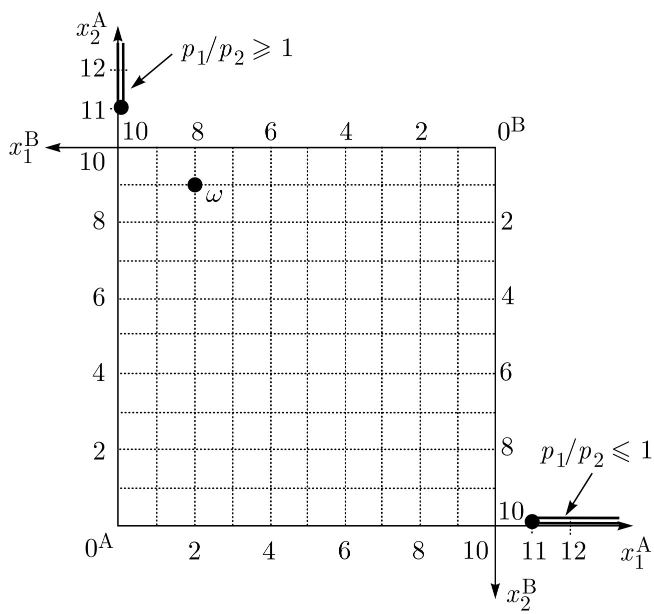

Рис. 1.20. Кривая цена–потребление потребителя A представляет собой два луча

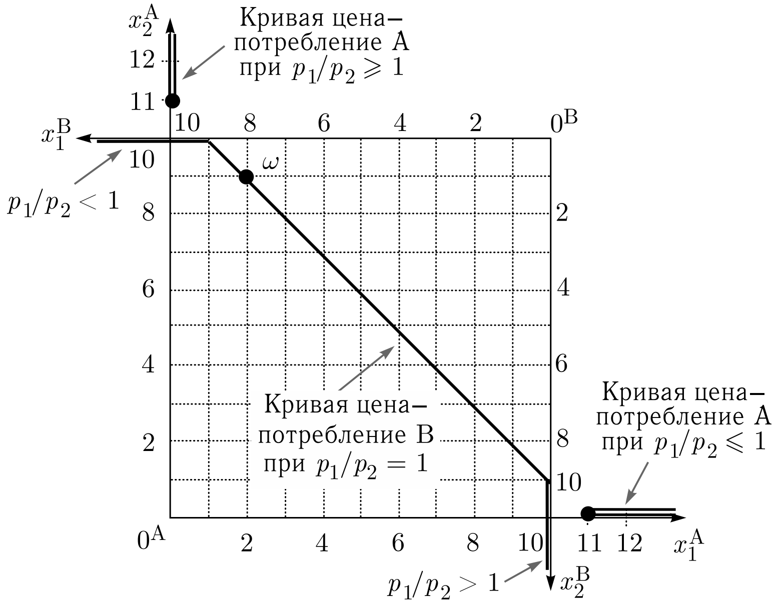

Рис. 1.21. Кривые цена–потребление в ящике Эджворта не пересекаются

Аналогично при $\frac{p_1}{p_2} > 1$ во всех решениях $x_1^A = 0$, и чем больше отношение цен $\frac{p_1}{p_2}$, тем больше потребитель А потребляет второго блага (рис. **1.20**).

Разрыв кривой цена–потребление потребителя А объясняется разрывностью спроса, что, как уже было сказано, связано с невыполнением свойства выпуклости предпочтений.

Изобразим теперь в том же ящике Эджворта кривую цена–потребление для потребителя В, как показано на рис. **1.21**.

Как видно из рис. **1.21**, не существует цен, при которых кривые цена–потребление пересекаются, а значит, при заданном распределении начальных запасов равновесия в экономике не существует. ■

Хотя, как показано в примере **1.5**, отсутствие выпуклости предпочтений может привести к тому, что равновесия не существует, это не означает, что ее наличие гарантирует существование равновесия. Например, на рис. **1.22** изображена ситуация, когда оба потребителя имеют предпочтения с точкой (глобального) насыщения. В этом случае равновесия в экономике не существует, несмотря на то что предпочтения потребителей строго выпуклы. Однако следует заметить, что данные предпочтения не удовлетворяют свойству монотонности.

Как бы ни проходила бюджетная линия, хотя бы для одного из потребителей точка насыщения будет находиться внутри бюджетного множества, а значит, такой потребитель выберет эту точку. Условия сбалансирован-

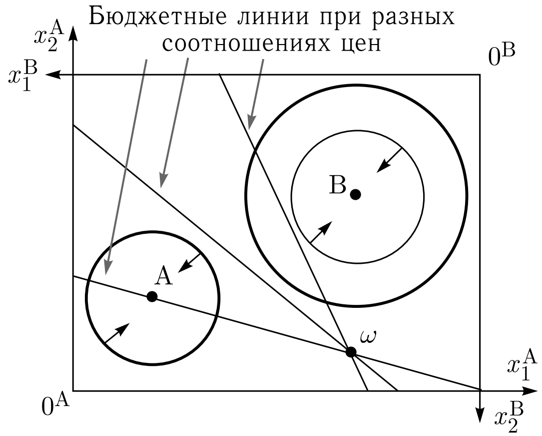

Рис. 1.22. В экономике не существует равновесия, несмотря на то что предпочтения потребителей строго выпуклы (стрелками указано направление роста полезности)

ности рынков будут нарушены. Более того, для экономики на рис. **1.22** равновесия не существует при любом распределении начальных запасов. Заметим, однако, что если изменить предпочтения потребителей так, чтобы их точки насыщения в ящике совпадали (как на рис. **1.36** на с. 63) и при этом бюджетная линия, проходящая через точку насыщения и точку первоначального запаса, имела отрицательный наклон, то точка насыщения в ящике Эджворта будет равновесной, а равновесные цены будут определяться наклоном бюджетной линии.

В следующем утверждении сформулированы достаточные условия существования равновесия в экономике обмена.

Утверждение 1.4. Если в экономике обмена предпочтения потребителей строго монотонны и строго выпуклы, а совокупные начальные запасы каждого блага в экономике положительны, то равновесие по Вальрасу существует.

Без доказательства[16]. ■

Предположим, что в экономике обмена равновесие существует. Всегда ли оно единственно? Говоря о единственности равновесия, следует иметь в виду, что всегда имеет место неединственность равновесного вектора цен, так как цены определены с точностью до множителя, но также возможна неединственность отношения цен в равновесии и множественность равновесных распределений. Приведем примеры подобных ситуаций.

[16] Как и в ряде других утверждений учебника, результат справедлив и при более слабых требованиях к предпочтениям потребителей. Это сделано для того, чтобы утверждения соответствовали программе промежуточного уровня. При этом непрерывность предпочтений не упоминается, поскольку, по предположению, рассматриваются только предпочтения, обладающие этим свойством.

Пример 1.6. Найдем равновесие/равновесия по Вальрасу в экономике обмена с двумя потребителями, предпочтения которых представимы функциями полезности $u^{\mathrm{A}}\left(x_1^{\mathrm{A}}, x_2^{\mathrm{A}}\right) = \min\left\{x_1^{\mathrm{A}}, x_2^{\mathrm{A}}\right\}$ и $u^{\mathrm{B}}\left(x_1^{\mathrm{B}}, x_2^{\mathrm{B}}\right) = \min\left\{x_1^{\mathrm{B}}, x_2^{\mathrm{B}}\right\}$, а первоначальные запасы описываются векторами $\omega^{\mathrm{A}} = \left(\omega_1^{\mathrm{A}}, \omega_2^{\mathrm{A}}\right) = (1,\ 1)$ и $\omega^{\mathrm{B}} = \left(\omega_1^{\mathrm{B}}, \omega_2^{\mathrm{B}}\right) = (1,\ 1)$.

Следуя определению равновесия, сначала решим задачи потребителей. Для обоих потребителей блага являются комплементарными (взаимодополняющими) в пропорции один к одному. Кривые безразличия представляют собой «уголки», «вершины» которых лежат на прямой $x_1^k = x_2^k$, $k = \mathrm{A}, \mathrm{B}$. При любых положительных ценах потребитель с такими предпочтениями выбирает набор, лежащий на «вершине» «уголка», т.е. $x_1^k = x_2^k$, полностью расходуя на него свой доход, т.е. $p_1 x_1^k + p_2 x_2^k = p_1\omega_1^k + p_2\omega_2^k$. Таким образом, функции спроса потребителя k, $k = \mathrm{A}, \mathrm{B}$, имеют вид: $x_1^k(p) = x_2^k(p) = \dfrac{p_1\omega_1^k + p_2\omega_2^k}{p_1 + p_2}$.

При заданных первоначальных запасах и любых положительных ценах оба потребителя предъявят спрос на одну единицу каждого блага. Следовательно, в данной экономике точка первоначальных запасов оказывается равновесной при любом положительном соотношении цен (рис. **1.23**). ■

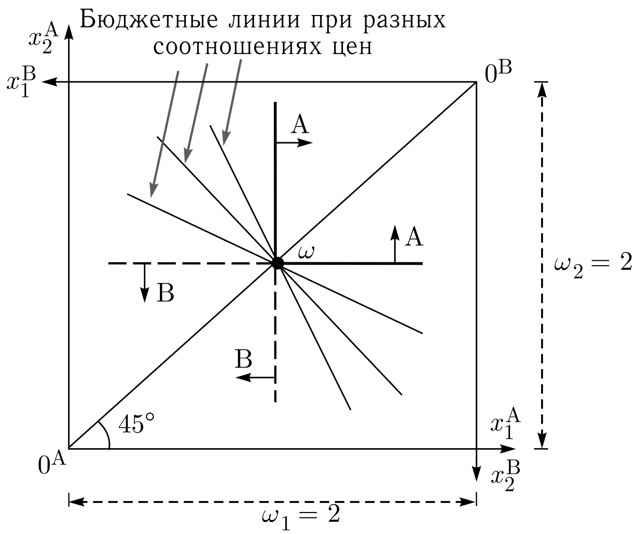

Рис. 1.23. Точка первоначальных запасов является равновесной при любых положительных ценах (стрелками указано направление роста полезности)

Пример 1.7. Найдем равновесие/равновесия по Вальрасу в экономике обмена с двумя потребителями, предпочтения которых представимы функциями полезности $u^{\mathrm{A}}\left(x_1^{\mathrm{A}}, x_2^{\mathrm{A}}\right) = x_1^{\mathrm{A}} + x_2^{\mathrm{A}}$ и $u^{\mathrm{B}}\left(x_1^{\mathrm{B}}, x_2^{\mathrm{B}}\right) = x_1^{\mathrm{B}} + x_2^{\mathrm{B}}$, а первоначальные запасы описываются векторами $\omega^{\mathrm{A}} = \left(\omega_1^{\mathrm{A}},\, \omega_2^{\mathrm{A}}\right) = (2,\, 3)$ и $\omega^{\mathrm{B}} = \left(\omega_1^{\mathrm{B}},\, \omega_2^{\mathrm{B}}\right) = (1,\, 7)$.

Решив задачу потребителя A, при произвольных положительных ценах получим:

$$x_1^{\mathrm{A}}(p_1,\, p_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } p_1 > p_2 \\ \dfrac{2p_1 + 3p_2}{p_1}, & \text{если } p_1 < p_2, \\ [0,\, 5], & \text{если } p_1 = p_2 \end{cases}$$

$$x_2^{\mathrm{A}}(p_1,\, p_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } p_1 < p_2 \\ \dfrac{2p_1 + 3p_2}{p_2}, & \text{если } p_1 > p_2. \\ 5 - x_1^{\mathrm{A}}, & \text{если } p_1 = p_2 \end{cases}$$

Решение задачи потребителя B имеет вид:

$$x_1^{\mathrm{B}}(p_1,\, p_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } p_1 > p_2 \\ \dfrac{p_1 + 7p_2}{p_1}, & \text{если } p_1 < p_2, \\ [0,\; 8], & \text{если } p_1 = p_2 \end{cases}$$

$$x_2^{\mathrm{B}}(p_1,\, p_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } p_1 < p_2 \\ \dfrac{p_1 + 7p_2}{p_2}, & \text{если } p_1 > p_2. \\ 8 - x_1^{\mathrm{B}}, & \text{если } p_1 = p_2 \end{cases}$$

Если $p_1 > p_2$, то суммарный спрос потребителей на второе благо превышает начальный запас этого блага в экономике:

$$x_2^{\mathrm{A}} + x_2^{\mathrm{B}} = \frac{2p_1 + 3p_2 + p_1 + 7p_2}{p_2} = \frac{3p_1 + 10p_2}{p_2} = 10 + \frac{3p_1}{p_2} > 10.$$

Следовательно, при ценах $p_1 > p_2$ равновесия в рассматриваемой экономике нет.

Аналогично, если $p_1 < p_2$, то суммарный спрос потребителей на первое благо превышает начальный запас этого блага в экономике:

$$x_1^{\mathrm{A}} + x_1^{\mathrm{B}} = \frac{2p_1 + 3p_2 + p_1 + 7p_2}{p_1} = \frac{3p_1 + 10p_2}{p_1} = 3 + \frac{10p_2}{p_1} > 3.$$

Следовательно, при ценах $p_1 < p_2$ равновесия в экономике также не существует.

Проанализируем случай $p_1 = p_2$. Тогда компоненты вектора распределения должны удовлетворять следующим условиям: $x_1^{\mathrm{A}} + x_2^{\mathrm{A}} = 5$ (решение задачи потребителя A), $x_1^{\mathrm{B}} + x_2^{\mathrm{B}} = 8$ (решение задачи потребителя B),

$x_1^A + x_1^B = 3$ (условие уравновешенности рынка первого блага) и $x_2^A + x_2^B = 10$ (условие уравновешенности рынка второго блага). Тогда цены $\frac{\widetilde{p}_1}{\widetilde{p}_2} = 1$ являются равновесными, но при этом имеет место множественность равновесных распределений: $(\widetilde{x}_1^A, \widetilde{x}_2^A, \widetilde{x}_1^B, \widetilde{x}_2^B) = (a,\ 5-a,\ 3-a,\ 5+a)$, где $a \in [0,\ 3]$. В частности, равновесными будут следующие распределения: $(\widetilde{x}_1^A, \widetilde{x}_2^A, \widetilde{x}_1^B, \widetilde{x}_2^B) = (1,\ 4,\ 2,\ 6)$, $(\widetilde{x}_1^A, \widetilde{x}_2^A, \widetilde{x}_1^B, \widetilde{x}_2^B) = (0,\ 5,\ 3,\ 5)$, $(\widetilde{x}_1^A, \widetilde{x}_2^A, \widetilde{x}_1^B, \widetilde{x}_2^B) = (3,\ 2,\ 0,\ 8)$.

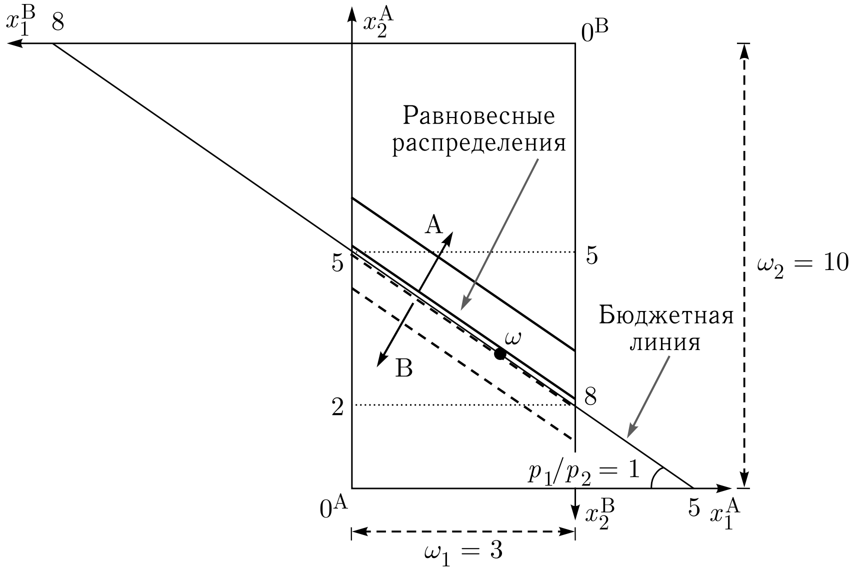

Рис. 1.24. Множественность равновесных распределений при $p_1/p_2 = 1$ (стрелками указано направление роста полезности)

Множественность равновесных распределений в данной экономике проиллюстрирована на рис. **1.24**. Поскольку кривые безразличия обоих потребителей представляют собой прямые с наклоном, равным (-1), то при ценах $\frac{p_1}{p_2 = 1}$, т.е. при условии, что бюджетная линия также имеет наклон, равный (-1), одна из кривых безразличия каждого потребителя совпадет со своей бюджетной линией. При этом наилучшими для потребителя A будут наборы, лежащие на его бюджетной линии, соединяющей точки $(x_1^A = 0,\ x_2^A = 5)$ и $(x_1^A = 5,\ x_2^A = 0)$, включая сами граничные точки, а для потребителя B (аналогично) множество решений задачи потребителя — все наборы на бюджетной линии, соединяющей наборы $(x_1^B = 8,\ x_2^B = 0)$ и $(x_1^B = 0,\ x_2^B = 8)$ (рис. **1.24**). Равновесными же при ценах $\frac{p_1}{p_2} = 1$ будут распределения, лежащие на общем участке бюджетных линий потребителей в рамках ящика Эджворта, т.е. распределения вида $\left(\widetilde{x}_1^{\mathrm{A}},\, \widetilde{x}_2^{\mathrm{A}},\, \widetilde{x}_1^{\mathrm{B}},\, \widetilde{x}_2^{\mathrm{B}}\right) = (a,\ 5-a,\ 3-a,\ 5+a)$, где $a \in [0,\ 3]$. ■

В примере **1.6** продемонстрирована множественность равновесных соотношений цен при единственном равновесном распределении, а в примере **1.7** — множественность равновесных распределений при единственном равновесном соотношении цен. Однако, как показывает следующий пример, в экономике обмена в равновесии могут одновременно наблюдаться оба явления.

Пример 1.8. Пусть предпочтения потребителей представимы функциями полезности $u^{\mathrm{A}}\left(x_1^{\mathrm{A}},\, x_2^{\mathrm{A}}\right) = \min\left\{x_1^{\mathrm{A}},\, 3x_2^{\mathrm{A}}\right\}$ и $u^{\mathrm{B}}\left(x_1^{\mathrm{B}},\, x_2^{\mathrm{B}}\right) = \min\left\{x_1^{\mathrm{B}},\, 3x_2^{\mathrm{B}}\right\}$, а первоначальные запасы описываются векторами $\omega^{\mathrm{A}} = \left(\omega_1^{\mathrm{A}},\, \omega_2^{\mathrm{A}}\right) = (5,\, 1)$ и $\omega^{\mathrm{B}} = \left(\omega_1^{\mathrm{B}},\, \omega_2^{\mathrm{B}}\right) = (1,\, 1)$. Найдем равновесие/равновесия по Вальрасу.

По аналогии с примером **1.6** сначала решим задачи потребителей при положительных ценах. Функции спроса потребителя A имеют вид: $x_1^{\mathrm{A}}(p_1, p_2) = 3x_2^{\mathrm{A}}(p_1, p_2) = \dfrac{15p_1 + 3p_2}{3p_1 + p_2}$, а потребителя B — $x_1^{\mathrm{B}}(p_1, p_2) = 3x_2^{\mathrm{B}}(p_1, p_2) = \dfrac{3p_1 + 3p_2}{3p_1 + p_2}$. Тогда $x_1^{\mathrm{A}}(p_1, p_2) + x_1^{\mathrm{B}}(p_1, p_2) = \dfrac{6(3p_1 + p_2)}{3p_1 + p_2} = 6$, т.е. совокупный спрос на первое благо равен совокупному запасу первого блага при любых положительных ценах. Аналогичное соотношение выполнено на рынке второго блага. Таким образом, имеет место множественность равновесных отношений цен: любые положительные цены будут равновесными.

Что касается равновесного распределения, то оно также будет не единственно. При положительных ценах любые распределения, лежащие на диагонали ящика Эджворта $x_1^{\mathrm{A}} = 3x_2^{\mathrm{A}}$ от точки $\overline{x}$, где $\left(\overline{x}_1^{\mathrm{A}} = 3,\ \overline{x}_2^{\mathrm{A}} = 1\right)$, до точки $\widehat{x}$, где $\left(\widehat{x}_1^{\mathrm{B}} = 1,\ \widehat{x}_2^{\mathrm{B}} = \dfrac{1}{3}\right)$, не включая сами эти распределения (рис. **1.25**), являются равновесными. В других распределениях на диагонали, где лежат «вершины» кривых безразличия обоих потребителей, наклон бюджетной линии, проходящей через точку первоначального запаса, будет положителен, а значит, одна из цен отрицательна, что невозможно в равновесии. Однако следует заметить, что при каждом возможном соотношении цен равновесное распределение благ единственно. Например, при ценах $\dfrac{p_1}{p_2} = 1$ равновесное распределение имеет вид: $\left(x_1^{\mathrm{A}},\, x_2^{\mathrm{A}},\, x_1^{\mathrm{B}},\, x_2^{\mathrm{B}}\right) = (4{,}5,\ 1{,}5,\ 1{,}5,\ 0{,}5)$, а при ценах $\dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{1}{3}$ равновесным будет распределение $\left(x_1^{\mathrm{A}},\, x_2^{\mathrm{A}},\, x_1^{\mathrm{B}},\, x_2^{\mathrm{B}}\right) = \left(4,\ \dfrac{4}{3},\ 2,\ \dfrac{2}{3}\right)$. ■

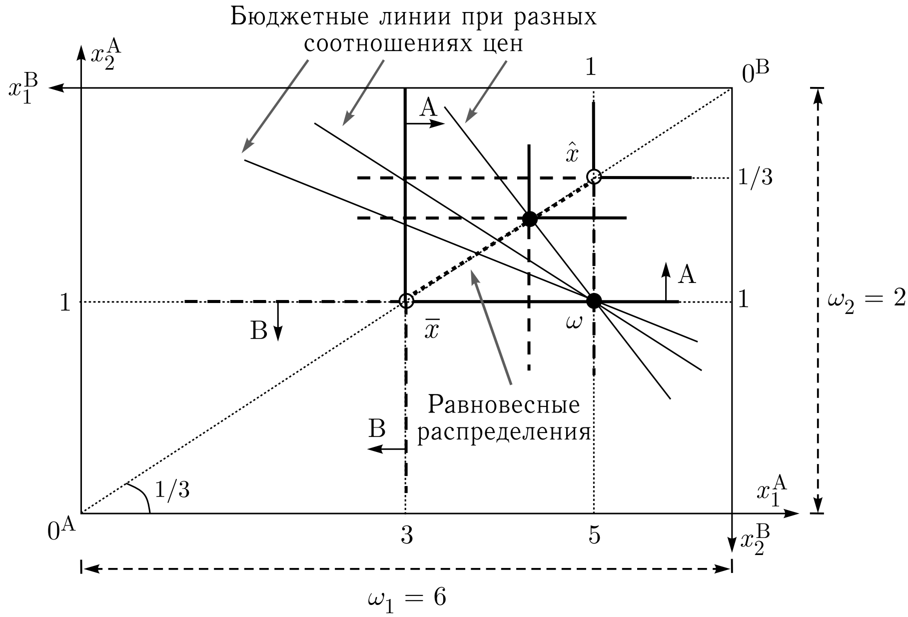

Рис. 1.25. Множественность равновесных распределений и равновесных соотношений цен в примере **1.8** (стрелками указано направление роста полезности)

Таким образом, если равновесие в экономике все же существует, то, возможно, оно не единственное в терминах распределения, как в примерах **1.7** и **1.8**, или в терминах цен, как в примерах **1.6** и **1.8**, а значит, анализ сравнительной статики затрудняется и снижается точность прогноза в экономике. Даже в простой экономике обмена с двумя потребителями и двумя благами условия, гарантирующие единственность равновесного распределения или соотношения цен, довольно сложны, требуют введения дополнительных понятий (например, таких, как валовая заменимость) и поэтому изучаются только в продвинутых курсах микроэкономики. Однако в частном случае, когда точка первоначальных запасов является Парето-оптимальным распределением, для того, чтобы гарантировать единственность равновесного распределения, достаточно потребовать строгой выпуклости предпочтений потребителей.

Утверждение 1.5. Пусть точка первоначальных запасов — Парето-оптимальное распределение, и в экономике существует равновесие. Тогда точка первоначальных запасов является равновесным распределением. Если, кроме того, предпочтения потребителей строго выпуклы, то это распределение единственно.

Доказательство. Докажем первую часть утверждения. Пусть $\left(\widetilde{x}_1^A, \widetilde{x}_2^A, \widetilde{x}_1^B, \widetilde{x}_2^B, \widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2\right)$ — равновесие по Вальрасу. Покажем, что точка первоначальных запасов является равновесным распределением.

Предположим, что равновесное распределение отличается от распределения начальных запасов. Наборы, соответствующие точке первоначального запаса, доступны потребителям при любых ценах, а значит, и при равновесных. Но так как в этой ситуации потребители выбрали другие наборы, то должны быть выполнены условия $u^{\mathrm{A}}\left(\widetilde{x}_1^{\mathrm{A}},\, \widetilde{x}_2^{\mathrm{A}}\right) \geqslant u^{\mathrm{A}}\left(\omega_1^{\mathrm{A}},\, \omega_2^{\mathrm{A}}\right)$ и $u^{\mathrm{B}}\left(\widetilde{x}_1^{\mathrm{B}},\, \widetilde{x}_2^{\mathrm{B}}\right) \geqslant u^{\mathrm{B}}\left(\omega_1^{\mathrm{B}},\, \omega_2^{\mathrm{B}}\right)$, иначе потребители предпочли бы выбрать свои начальные запасы. Ни одно из неравенств не может быть выполнено как строгое, так как это означало бы, что равновесное распределение является Парето-улучшением точки первоначальных запасов, что противоречило бы тому, что точка первоначальных запасов оптимальна по Парето. Следовательно, если набор $\left(\widetilde{x}_1^{\mathrm{A}},\, \widetilde{x}_2^{\mathrm{A}}\right)$ является решением задачи потребителя A при равновесных ценах, то и набор $\left(\omega_1^{\mathrm{A}},\, \omega_2^{\mathrm{A}}\right)$ также является решением задачи потребителя A при равновесных ценах, и, аналогично, если набор $\left(\widetilde{x}_1^{\mathrm{B}},\, \widetilde{x}_2^{\mathrm{B}}\right)$ — решение задачи потребителя B, то вектор первоначального запаса потребителя B, $\left(\omega_1^{\mathrm{B}},\, \omega_2^{\mathrm{B}}\right)$, также является решением задачи потребителя B при равновесных ценах. Кроме того, распределение первоначальных запасов удовлетворяет условиям сбалансированности рынков. Это означает, что $\left(\omega_1^{\mathrm{A}},\, \omega_2^{\mathrm{A}},\, \omega_1^{\mathrm{B}},\, \omega_2^{\mathrm{B}},\, \widetilde{p}_1,\, \widetilde{p}_2\right)$ — равновесие по Вальрасу в экономике обмена.

Теперь докажем вторую часть утверждения. Для этого предположим, что утверждение неверно, и придем к противоречию. Пусть в экономике существует два различных равновесных распределения, $\left(\widetilde{x}_1^{\mathrm{A}},\, \widetilde{x}_2^{\mathrm{A}},\, \widetilde{x}_1^{\mathrm{B}},\, \widetilde{x}_2^{\mathrm{B}}\right)$ и $\left(\omega_1^{\mathrm{A}},\, \omega_2^{\mathrm{A}},\, \omega_1^{\mathrm{B}},\, \omega_2^{\mathrm{B}}\right)$. Поскольку в экономике два потребителя, то из условия допустимости $\widetilde{x}_1^{\mathrm{A}} + \widetilde{x}_1^{\mathrm{B}} = \omega_1^{\mathrm{A}} + \omega_1^{\mathrm{B}}$ следует, что если, например, $\widetilde{x}_1^{\mathrm{A}} \neq \omega_1^{\mathrm{A}}$, то и $\widetilde{x}_1^{\mathrm{B}} \neq \omega_1^{\mathrm{B}}$, и наоборот. Аналогично из $\widetilde{x}_2^{\mathrm{A}} + \widetilde{x}_2^{\mathrm{B}} = \omega_2^{\mathrm{A}} + \omega_2^{\mathrm{B}}$ следует, что если $\widetilde{x}_2^{\mathrm{A}} \neq \omega_2^{\mathrm{A}}$, то $\widetilde{x}_2^{\mathrm{B}} \neq \omega_2^{\mathrm{B}}$, и наоборот. Поскольку, по предположению, рассматриваемые равновесные распределения различны, то различны и соответствующие наборы для потребителей.

Выше было показано, что $u^{\mathrm{A}}\left(\widetilde{x}_1^{\mathrm{A}},\, \widetilde{x}_2^{\mathrm{A}}\right) \geqslant u^{\mathrm{A}}\left(\omega_1^{\mathrm{A}},\, \omega_2^{\mathrm{A}}\right)$. Тогда, по определению функции полезности, $\widetilde{x}^{\mathrm{A}} = \left(\widetilde{x}_1^{\mathrm{A}},\, \widetilde{x}_2^{\mathrm{A}}\right) \succsim^{\mathrm{A}} \omega^{\mathrm{A}} = \left(\omega_1^{\mathrm{A}},\, \omega_2^{\mathrm{A}}\right)$. В силу строгой выпуклости предпочтений потребителя A из $\widetilde{x}^{\mathrm{A}} \succsim^{\mathrm{A}} \omega^{\mathrm{A}}$ и $\widetilde{x}^{\mathrm{A}} \neq \omega^{\mathrm{A}}$ следует, что $\alpha\widetilde{x}^{\mathrm{A}} + (1-\alpha)\,\omega^{\mathrm{A}} \succ {}^{\mathrm{A}}\omega^{\mathrm{A}}$ для всех $\alpha \in (0,\, 1)$. Аналогичные рассуждения верны для потребителя B, что означает $\alpha\widetilde{x}^{\mathrm{B}} + (1-\alpha)\,\omega^{\mathrm{B}} \succ {}^{\mathrm{B}}\omega^{\mathrm{B}}$ для всех $\alpha \in (0,\, 1)$.

Покажем, что распределение $\left(\alpha\widetilde{x}_1^{\mathrm{A}} + (1-\alpha)\,\omega_1^{\mathrm{A}},\ \alpha\widetilde{x}_2^{\mathrm{A}} + (1-\alpha)\,\omega_2^{\mathrm{A}},\right.$ $\left.\alpha\widetilde{x}_1^{\mathrm{B}} + (1-\alpha)\,\omega_1^{\mathrm{B}},\ \alpha\widetilde{x}_2^{\mathrm{B}} + (1-\alpha)\,\omega_2^{\mathrm{B}}\right)$ допустимо для всех $\alpha \in (0,\, 1)$. Поскольку $\widetilde{x}_1^{\mathrm{A}} + \widetilde{x}_1^{\mathrm{B}} = \omega_1^{\mathrm{A}} + \omega_1^{\mathrm{B}}$, то $\alpha\widetilde{x}_1^{\mathrm{A}} + (1-\alpha)\,\omega_1^{\mathrm{A}} + \alpha\widetilde{x}_1^{\mathrm{B}} + (1-\alpha)\,\omega_1^{\mathrm{B}} = \alpha\left(\widetilde{x}_1^{\mathrm{A}} + \widetilde{x}_1^{\mathrm{B}}\right) + (1-\alpha)\left(\omega_1^{\mathrm{A}} + \omega_1^{\mathrm{B}}\right) = \omega_1^{\mathrm{A}} + \omega_1^{\mathrm{B}}$. Аналогично, так как $\widetilde{x}_2^{\mathrm{A}} + \widetilde{x}_2^{\mathrm{B}} = \omega_2^{\mathrm{A}} + \omega_2^{\mathrm{B}}$, то $\alpha\widetilde{x}_2^{\mathrm{A}} + (1-\alpha)\,\omega_2^{\mathrm{A}} + \alpha\widetilde{x}_2^{\mathrm{B}} + (1-\alpha)\,\omega_2^{\mathrm{B}} = \omega_2^{\mathrm{A}} + \omega_2^{\mathrm{B}}$. Отсюда следует, что существует допустимое распределение, в котором благосостояние обоих потребителей выше, чем в точке первоначальных запасов, что противоречит Парето-оптимальности этого распределения. Таким образом, предположение, что существуют разные равновесные распределения, оказалось неверным.

Предположение, что равновесное распределение отлично от точки первоначальных запасов, противоречит первой части утверждения, где говорится, что если в экономике существует равновесие, то Парето-оптимальная точка первоначальных запасов также является равновесным распределением. Следовательно, точка первоначальных запасов является единственным равновесным распределением. ■

Обратите внимание, что согласно утверждению **1.5** строгая выпуклость предпочтений является достаточным, но не необходимым условием единственности равновесного распределения в том случае, когда точка первоначальных запасов является Парето-оптимальной. Так, в примерах **1.6** и **1.7** точка первоначальных запасов принадлежит множеству Парето-оптимальных распределений, и предпочтения потребителей выпуклы (но не строго), но в примере **1.6** точка первоначального запаса — единственное равновесное распределение, а в примере **1.7** — одна из множества равновесных распределений. Заметим, что при выполнении предпосылок утверждения **1.5** нет гарантии, что единственным будет и вектор цен (придумайте пример самостоятельно).

1.4. ТЕОРЕМЫ БЛАГОСОСТОЯНИЯ

При обсуждении равновесия по Вальрасу было отмечено, что в экономике из примера **1.4** на рис. **1.14** на с. 30, иллюстрирующем концепцию, равновесное распределение оптимально по Парето. Теперь обсудим, всегда ли это так?

Как в примере **1.4** получилось, что равновесное распределение оптимально по Парето? В этом примере во внутреннем решении задач потребителей выполнено $MRS_{12}^{\mathrm{A}}\left(\widetilde{x}_1^{\mathrm{A}},\, \widetilde{x}_2^{\mathrm{A}}\right) = \dfrac{p_1}{p_2}$ и $MRS_{12}^{\mathrm{B}}\left(\widetilde{x}_1^{\mathrm{B}},\, \widetilde{x}_2^{\mathrm{B}}\right) = \dfrac{p_1}{p_2}$, откуда следует, что во внутреннем равновесном распределении $MRS_{12}^{\mathrm{A}}\left(\widetilde{x}_1^{\mathrm{A}},\, \widetilde{x}_2^{\mathrm{A}}\right) = MRS_{12}^{\mathrm{B}}\left(\widetilde{x}_1^{\mathrm{B}},\, \widetilde{x}_2^{\mathrm{B}}\right)$. Согласно утверждению **1.2**, если предпочтения выпуклы и строго монотонны, то для допустимого внутреннего распределения равенство предельных норм замещения означает, что распределение оптимально по Парето.

Может ли оказаться, что внутреннее решение задачи потребителя $k = \mathrm{A}, \mathrm{B}$ не характеризуется условием $MRS_{12}^{k}\left(\widetilde{x}_1^{k},\, \widetilde{x}_2^{k}\right) = \dfrac{p_1}{p_2}$? Да. Например, это условие не выполняется при существовании так называемых «толстых» кривых безразличия. Их наличие означает, что на некоторых интервалах полезность потребителя не изменяется при изменении объемов потребления. Другими словами, для потребителя есть наборы, в окрестности