УДК 373.167.1:51
ББК 22.141я729+22.151.0я729
К78

Красновский Р. Л.

К78 Математика. Дополнительные вступительные испытания в вуз. Сборник вариантов с решениями / Р. Л. Красновский. — М. : Лаборатория знаний, 2021. — 223 с. : ил.

ISBN 978-5-00101-313-6

Представлены задачи по всему курсу математики (от тождественных преобразований алгебраических выражений до стереометрии). Уникальность сборника состоит в том, что, несмотря на относительную краткость, он позволяет абитуриенту провести всестороннюю подготовку к вступительному экзамену. Задачи сборника разделены на 14 вариантов, каждый из которых представляет собой законченную с точки зрения проверки знаний по курсу математики экзаменационную работу. Рассматриваемые варианты соответствуют уровню вступительных экзаменов в престижные технико-экономические вузы.

Для старшеклассников, абитуриентов, учителей математики и репетиторов.

УДК 373.167.1:51
ББК 22.141я729+22.151.0я729

Учебное издание

Красновский Роман Леонидович

МАТЕМАТИКА.
ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВСТУПИТЕЛЬНЫЕ ИСПЫТАНИЯ В ВУЗ
СБОРНИК ВАРИАНТОВ С РЕШЕНИЯМИ

Ведущий редактор *М. С. Стригунова*
Художник *В. А. Прокудин*
Технический редактор *Т. Ю. Федорова*. Корректор *И. Н. Панкова*
Оригинал-макет подготовлен *О. Г. Лапко* в пакете LaTeX 2_ε

Подписано в печать 28.08.20. Формат $70\times100/16$.
Усл. печ. л. 18,2. Заказ

Издательство «Лаборатория знаний»
125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (499) 157-5272
e-mail: info@pilotLZ.ru, http://www.pilotLZ.ru

ISBN 978-5-00101-313-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

Посвящается моим родителям
и бабушке

ПРЕДИСЛОВИЕ

Моя предыдущая книга для поступающих в вузы «11 вариантов по математике...» [5] вышла в свет почти пятнадцать лет назад, тогда абитуриенты, помимо выпускных, сдавали еще и вступительные экзамены, эпоха ЕГЭ-стандартизации началась несколько позже. Я не берусь спорить о плюсах и минусах ныне существующей системы, однако согласен с теми, кто считает, что она довольно сильно ударила по вариативности заданий, с которыми может столкнуться современный абитуриент. Унификация Единого государственного экзамена ограничила вузы в возможности отбирать именно тех, кто соответствует данному заведению, выбранной специальности, собственно, по этой причине поступление в ведущие университеты страны в последнее время зависит не только от ЕГЭ. Действительно, МГУ имени М. В. Ломоносова, МФТИ и другие престижные вузы на ряд факультетов проводят дополнительные испытания, которые, по сути, и являются настоящими вступительными экзаменами, на манер тех, что существовали до реформы. И здесь от выпускников школ уже требуются принципиально иные навыки, нежели при решении типизированных заданий. Практика показывает, что абитуриенты, «набивавшие руку» на пособиях по ЕГЭ, часто на дополнительных испытаниях не могут справиться с довольно простыми задачами. Дело в том, что, уделяя большую часть времени отработке одних и тех же методов, поступающие привыкают их бездумно применять во всех задачах, в том числе и тех, где эти методы лишь усложняют решение.

Школьный курс математики шире, чем рамки тестов и заполняемых бланков, особенно в условиях, когда резко меняются правила и нужно быть всесторонне готовым к любым формату и времени проведения экзамена (что, к примеру, наглядно показала ситуация во время карантина 2020 г., когда обучение и контрольные мероприятия перешли в дистанционную форму). Эта книга призвана проиллюстрировать важность комплексного подхода к предмету. Она ни в коем случае не противоречит ЕГЭ, скорее, дополняет его специфику иной методологией, тем более что вне зависимости от того, какой вид экзамена сдается (ЕГЭ, олимпиада или дополнительные испытания вуза) и какие применяются установки по оценке письменной работы, главный критерий везде один — **правильно решенная задача**. И здесь хочется остановиться на некоторых аспектах, неочевидных для современных абитуриентов.

Многие ошибочно считают, что положительную оценку можно заработать за так называемые «половинчатые решения» (решение какой-либо части или частей задачи), как зачастую на школьных контрольных работах. Иногда это действительно так, но и в ЕГЭ, и на дополнительных экзаменах существует практика проверки только тех заданий, **в которых дан верный ответ**. Задания, в которых заявлен неверный ответ, не говоря уже о тех, в которых ответ вообще не заявлен, могут автоматически признаваться решенными **неправильно**. Здесь стоит отметить, что верный ответ отнюдь не является гарантией того, что задача решена. Зачастую абитуриенты умудряются дать правильный ответ, неверно решив задачу (сделав несколько взаимоисключающих ошибок, отгадав или списав ответ, не рассмотрев все возможные варианты и т. п.).

Отмечу, что на правильность решения не влияют рациональность способа и метод, которыми задача решена. Единственными требованиями к решению задачи были и остаются его математическая правильность и полнота. В соответствии с этим текст решения должен быть оформлен достаточно подробно и разборчиво (для некоторых поступающих это весьма проблематично). Нередки случаи, когда из-за отсутствия выкладок, казавшихся очевидными, небрежного почерка, обилия исправлений и других подобных коллизий задача признается решенной **неправильно**.

И не нужно забывать, что залогом успеха на экзаменах является систематическая самостоятельная работа. Математику нельзя освоить за день или за неделю — только планомерные длительные занятия сделают большинство экзаменационных задач легкими.

Вы держите в руках оригинальный сборник задач, предназначенный для подготовки к письменному вступительному экзамену по математике в любой вуз. В какой-то степени его можно считать переизданием уже упоминавшейся ранее книги, дополненным новыми заданиями (да и первые 11 вариантов никуда не делись, но стали лучше, поскольку исправлены все найденные за прошедшие годы опечатки и ошибки). Если в издании 2006 г. присутствовали не только авторские задачи, но и задания из вариантов вступительных экзаменов, проводившихся в прошлые годы в Московском институте стали и сплавов (технологическом университете), МГУ им. М. В. Ломоносова и других ведущих технических и экономических вузах, то новые варианты полностью авторские (причем задания ранее нигде не публиковались).

Этот задачник принципиально отличается от огромной массы изданий подобного рода. Уникальность сборника состоит в том, что, несмотря на относительную краткость, он аккумулирует в себе почти весь курс математики и, в отличие от большинства аналогов, позволяет абитуриенту провести всестороннюю подготовку к вступительному экзамену.

Задачи сборника (их всего 84), каждая из которых, по мнению автора, оригинальна, ценна, содержательна и поучительна, разделены на 14 вариантов по 6 заданий в каждом. Каждый из указанных вариантов представляет собой законченную с точки зрения проверки знаний по курсу математики экзаменационную работу. Они соответствуют уровню дополнительных вступительных экзаменов в престижные технико-экономические вузы.

В книге представлены полные и подробные решения первых одиннадцати вариантов, варианты 12, 13 и 14 приведены для самостоятельного решения. Ответы к тринадцатому варианту размещены в соответствующем разделе книги, двенадцатый и четырнадцатый читателям предлагается решать без каких-либо возможных ориентиров и соблазна сверить результаты (т. е. фактически в условиях экзамена).

Структура рассматриваемых вариантов проста: в первых трех заданиях представлены различные темы (от тождественных преобразований алгебраических выражений до векторной алгебры и тригонометрии), четвертые задания — текстовые задачи, пятые — задания по геометрии (планиметрия или стереометрия), шестые — задачи с параметрами. В свою очередь, данная последовательность не говорит об уровне сложности заданий (бытует мнение, что, чем выше номер задачи в варианте, тем она сложнее). Довольно часто на экзаменах задачи не упорядочивают по сложности, что представляет для абитуриентов дополнительные проблемы (к примеру, распространенная ошибка в том, что многие, не обращая внимание на остальные задачи, пытаются решить трудное задание, порядковый номер которого сравнительно невелик, и в итоге лишь теряют большое количество отведенного на экзамен времени). Целесообразно решать сначала те задачи, которые кажутся наиболее простыми, вне зависимости от их порядковых номеров в варианте. Исходя из этого, автору представляется, что предложенная структура наиболее удачна и полезна для восприятия и психологической подготовки абитуриентов.

Для каждой решенной задачи приведено по одному корректному решению. Некоторые решения не являются рациональными для соответствующих им заданий, однако именно они способствуют отработке важных навыков, которые могут пригодиться при решении многих экзаменационных задач. Примером служат отдельные задачи с параметрами, решенные графически с использованием знаний из векторной алгебры или начал анализа. У этих заданий существуют более простые и короткие аналитические решения, которые читателю предлагается найти самостоятельно.

Еще раз хочу напомнить, что только систематические занятия помогут избежать многих проблем на экзаменах (это касается не только математики, но и других предметов). Данная книга не может считаться панацеей от всех описанных сложностей — необходима достаточно широкая практика решения задач из других сборников, к примеру, указанных в списке рекомендуемой литературы. Однако она будет полезна для комплексной подготовки к вступительным испытаниям, а также для проверки знаний абитуриентов, выявления и своевременного устранения их слабых сторон.

В заключение дам несколько советов читателю, решившему использовать настоящий сборник для подготовки к вступительному экзамену:

1. Если уровень подготовки достаточно высок, имеет смысл попробовать решать эти варианты в условиях, приближенных к экзаменационным: каждый вариант рассчитан на 4 астрономических часа (240 минут), при решении нельзя пользоваться ничем, кроме ручек, карандашей, иногда линейки и циркуля. Строго запрещено пользоваться любой

литературой, шпаргалками, техническими приспособлениями (калькуляторами, смартфонами, планшетами, компьютерами и т. д.).

2. Если стоит задача отработать определенную тему, то можно воспользоваться указателем «Классификация задач по темам» и прорешать задачи или разобрать решения, относящиеся к отрабатываемой области. Здесь нужно учесть, что деление задач на темы в известном смысле условно, поскольку при решении многих заданий требуются знания из разных разделов математики.

3. Если возникла необходимость отработать задачи определенного уровня сложности, то имеет смысл воспользоваться указателем «Классификация задач по сложности». К примеру, сложные задания соответствуют в предложенной классификации 11 баллам и выше.

4. Книга может рассматриваться как учебник. В конце сборника расположен справочный материал по школьному курсу математики, а приведенные решения задач являются хорошей иллюстрацией не только методологии решений, но и применения большинства формул, теорем и других знаний из школьного курса математики.

P. S. Надеюсь, что книга будет полезна читателям и поможет многим из абитуриентов стать студентами. Удачи на экзаменах!!!

Автор будет признателен читателям за отзывы и комментарии к книге, которые можно направлять по адресу электронной почты romanleon@yandex.ru.

Автор

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\Rightarrow$	— знак логического следствия
$\Leftrightarrow$	— знак логической равносильности (эквивалентности)
$\{a; b; c; \ldots\}$	— множество, состоящее из элементов $a, b, c, \ldots$
$\varnothing$	— пустое множество
$A \cup B$	— объединение множеств A и B
$A \cap B$	— пересечение множеств A и B
$\mathbb{N}$	— множество всех натуральных чисел
$\mathbb{Z}$	— множество всех целых чисел
$[a; b]$	— замкнутый промежуток (отрезок)
$(a; b)$	— открытый промежуток (интервал)
$(a; b]$, $[a; b)$	— полуоткрытые промежутки
$(-\infty; a], (a; +\infty)$	— бесконечные промежутки
$\parallel$	— знак параллельности
$\perp$	— знак перпендикулярности
$\sim$	— знак подобия
$\angle$	— угол
$\triangle$	— треугольник
$\left\lvert \vec{a} \right\rvert$	— длина (модуль) вектора $\vec{a}$

ВАРИАНТЫ

ВАРИАНТ 1

1. Решить неравенство

$$\left(\log_{\frac{1}{3}}\left(4x - x^2\right)\right)^2 > 1.$$

В ответе записать значение выражения $m+n$, где m — сумма всех целых чисел, удовлетворяющих данному неравенству, n — количество целых чисел, удовлетворяющих данному неравенству.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = 12, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

В ответе записать значение x, а в случае нескольких значений x — их сумму.

3. Найти углы α, β, γ первой четверти, принадлежащие отрезку $[-2\pi; 2\pi]$, если известно, что они составляют арифметическую прогрессию с разностью $\frac{13\pi}{90}$, а их тангенсы составляют геометрическую прогрессию. Ответ дать в градусах.

4. Один из двух одинаковых сосудов, объемом по 30 литров каждый, наполнен чистым спиртом, а второй пуст. Из первого сосуда во второй отливают некоторое количество спирта. После этого первый сосуд доливают доверху водой и полученной смесью дополняют второй сосуд. Затем из второго сосуда отливают в первый 12 литров новой смеси. Сколько спирта было отлито во второй сосуд при первом переливании, если после всех переливаний во втором сосуде оказалось на 2 литра чистого спирта меньше, чем в первом?

5. Дан ромб $ABCD$. Окружность радиуса 2 касается прямых AB и AD в точках B и D соответственно и пересекает сторону BC в точке L так, что $4 \cdot BL = BC$. Найти площадь ромба.

6. При каких значениях параметра a один из корней уравнения $(a-2)x^2 - 2(a+3)x + 4a = 0$ больше 3, а другой меньше 2?

[. . .]

РЕШЕНИЕ ВАРИАНТОВ

ВАРИАНТ 1

ЗАДАЧА 1

Решить неравенство

$$\left(\log_{\frac{1}{3}}\left(4x - x^2\right)\right)^2 > 1.$$

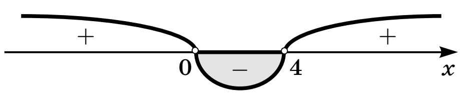
В ответе записать значение выражения $m + n$, где m — сумма всех целых чисел, удовлетворяющих данному неравенству, n — количество целых чисел, удовлетворяющих данному неравенству.

Решение

Область допустимых значений (далее ОДЗ) неравенства задается условием

$$4x - x^2 > 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 4x < 0 \;\Leftrightarrow\; x \cdot (x-4) < 0.$$

Применим метод интервалов для получения решения:



$$\Rightarrow \; x \in (0; 4).$$

Теперь решим исходное неравенство:

$$\left(\log_{\frac{1}{3}}(4x - x^2)\right)^2 > 1 \;\Leftrightarrow\; \left(-\log_3(4x - x^2)\right)^2 > 1 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \left(\log_3(4x - x^2)\right)^2 - 1 > 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \left(\log_3(4x - x^2) - 1\right) \cdot \left(\log_3(4x - x^2) + 1\right) > 0.$$

Решением данного неравенства является совокупность двух систем неравенств:

$$\begin{cases} \log_3(4x - x^2) - 1 > 0, \\ \log_3(4x - x^2) + 1 > 0 \end{cases} \qquad (1.1)$$

и

$$\begin{cases} \log_3(4x - x^2) - 1 < 0, \\ \log_3(4x - x^2) + 1 < 0. \end{cases} \qquad (1.2)$$

Решим первую систему:

$$\begin{cases} \log_3(4x - x^2) - 1 > 0, \\ \log_3(4x - x^2) + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(4x - x^2) > 1, \\ \log_3(4x - x^2) > -1. \end{cases}$$

Второе неравенство системы избыточно, следовательно, данная система эквивалентна неравенству $\log_3(4x - x^2) > 1$. Так как $\log_3 3 = 1$, это неравенство эквивалентно неравенству $\log_3(4x - x^2) > \log_3 3$. Основания логарифмов в правой и левой частях последнего неравенства больше 1, значит, при потенцировании знак неравенства не меняется:

$$\log_3(4x - x^2) > \log_3 3 \;\Leftrightarrow\; 4x - x^2 > 3 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 4x + 3 < 0.$$

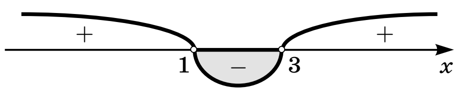
Разложим левую часть неравенства на множители:

$$D = 16 - 12 = 4 = 2^2 \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{4+2}{2} = 3;\; x_2 = \frac{4-2}{2} = 1,$$

откуда

$$x^2 - 4x + 3 < 0 \;\Leftrightarrow\; (x - 3) \cdot (x - 1) < 0.$$

Для решения последнего неравенства применим метод интервалов:



$\Rightarrow\; x \in (1; 3).$

Решим вторую систему:

$$\begin{cases} \log_3(4x - x^2) - 1 < 0, \\ \log_3(4x - x^2) + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(4x - x^2) < 1, \\ \log_3(4x - x^2) < -1. \end{cases}$$

Первое неравенство системы избыточно, следовательно, данная система эквивалентна неравенству $\log_3(4x - x^2) < -1$. Так как $\log_3\left(\frac{1}{3}\right) = -1$, получаем, что

$$\log_3(4x - x^2) < -1 \;\Leftrightarrow\; \log_3(4x - x^2) < \log_3\left(\frac{1}{3}\right).$$

Основания логарифмов в правой и левой частях последнего неравенства больше 1, значит, при потенцировании знак неравенства не меняется:

$$\log_3(4x - x^2) < \log_3\left(\frac{1}{3}\right) \;\Leftrightarrow\; 4x - x^2 < \frac{1}{3} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x^2 - 4x + \frac{1}{3} > 0 \;\Leftrightarrow\; 3x^2 - 12x + 1 > 0.$$

Разложим левую часть неравенства на множители:

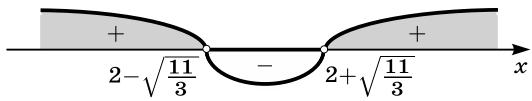
$$D = 144 - 12 = 132 = \left(2\sqrt{33}\right)^2,$$

$$x_1 = \frac{12 + 2\sqrt{33}}{6} = 2 + \frac{\sqrt{33}}{3} = 2 + \sqrt{\frac{11}{3}}; \quad x_2 = \frac{12 - 2\sqrt{33}}{6} = 2 - \sqrt{\frac{11}{3}}.$$

Отсюда

$$3x^2 - 12x + 1 > 0 \;\Leftrightarrow\; \left(x - 2 - \sqrt{\frac{11}{3}}\right)\cdot\left(x - 2 + \sqrt{\frac{11}{3}}\right) > 0.$$

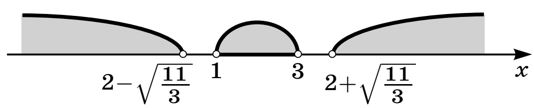
Применим метод интервалов:



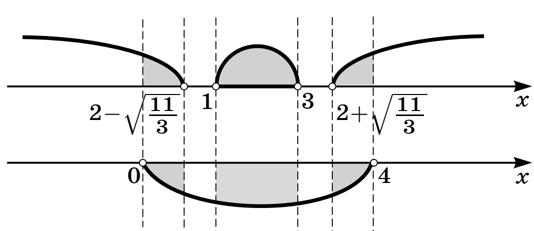
$$\Rightarrow\; x \in \left(-\infty; 2 - \sqrt{\frac{11}{3}}\right) \cup \left(2 + \sqrt{\frac{11}{3}}; +\infty\right).$$

Исходя из того, что $\sqrt{\frac{3}{3}} < \sqrt{\frac{11}{3}} < \sqrt{\frac{12}{3}} \;\Leftrightarrow\; 1 < \sqrt{\frac{11}{3}} < 2$, получим неравенства $3 < 2+\sqrt{\frac{11}{3}} < 4$ и $0 < 2-\sqrt{\frac{11}{3}} < 1$. Решением совокупности систем (1.1) и (1.2) является объединение решений этих систем:

$$x \in \left(-\infty; 2 - \sqrt{\frac{11}{3}}\right) \cup (1; 3) \cup \left(2 + \sqrt{\frac{11}{3}}; +\infty\right).$$



Решением исходного неравенства будет пересечение решения совокупности систем (1.1) и (1.2) и ОДЗ исходного неравенства.



$$\Rightarrow\; x \in \left(0; 2 - \sqrt{\frac{11}{3}}\right) \cup (1; 3) \cup \left(2 + \sqrt{\frac{11}{3}}; 4\right).$$

Единственным целым значением x, удовлетворяющим неравенству, является $x = 2$, следовательно, $m = 2$, $n = 1$, а $m + n = 2 + 1 = \underline{3}$.

Ответ. 3.

ЗАДАЧА 2

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = 12, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

В ответе записать значение x, а в случае нескольких значений x — их сумму.

Решение

ОДЗ системы задается условиями $y \neq 0$, $x \neq 0$.

Данная система является симметричной, т. е. такой, которая не меняется при одновременной замене x на y и y на x. Стандартным методом решения симметричных систем является введение новых переменных $t = x + y$ и $z = x \cdot y$. Имеем

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = 12, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{xy} = 12, \\ \dfrac{x + y}{xy} = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Преобразуем числитель левой части первого уравнения:

$$x^3 + y^3 = (x + y) \cdot (x^2 - xy + y^2) = (x + y) \cdot (x^2 + 2xy + y^2 - 3xy) =$$
$$= (x + y) \cdot ((x + y)^2 - 3xy)$$

и произведем в системе замену переменных. При этом так как $y \neq 0$, $x \neq 0$, то и $t \neq 0$, $z \neq 0$. Получим

$$\begin{cases} \dfrac{t \cdot (t^2 - 3z)}{z} = 12, \\ \dfrac{t}{z} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{t^2 - 3z}{3} = 12, \\ \dfrac{t}{z} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 3z = 36, \\ z = 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 9t - 36 = 0, \\ z = 3t. \end{cases}$$

Решим первое уравнение $t^2 - 9t - 36 = 0$.

$$D = 81 + 144 = 225 = 15^2 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; t_1 = \frac{9+15}{2} = 12;\; t_2 = \frac{9-15}{2} = -3 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; z_1 = 3t_1 = 36;\; z_2 = 3t_2 = -9.$$

Перейдя теперь к старым переменным, получим совокупность систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=12,\\ x\cdot y=36\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=-3,\\ x\cdot y=-9\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=12-y,\\ y\cdot(12-y)=36\end{cases}\\ \begin{cases}x=-3-y,\\ y\cdot(-3-y)=-9\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=12-y,\\ y^2-12y+36=0\end{cases}\\ \begin{cases}x=-3-y,\\ y^2+3y-9=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Решим первую систему:

$$y^2 - 12y + 36 = 0 \;\Leftrightarrow\; (y-6)^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; y = 6 \;\Rightarrow\; x = 12 - 6 = 6.$$

Таким образом, решением первой системы является пара $(6; 6)$.

Решим вторую систему. Дискриминант уравнения $y^2+3y-9=0$ равен $D = 9 + 36 = 45 = \left(3\sqrt{5}\right)^2$. Следовательно,

$$y_1 = \frac{-3+3\sqrt{5}}{2} = -1{,}5 + 1{,}5\sqrt{5};$$
$$y_2 = \frac{-3-3\sqrt{5}}{2} = -1{,}5 - 1{,}5\sqrt{5};$$
$$x_1 = -3 - y_1 = -3 + 1{,}5 - 1{,}5\sqrt{5} = -1{,}5 - 1{,}5\sqrt{5};$$
$$x_2 = -3 - y_2 = -1{,}5 + 1{,}5\sqrt{5}.$$

Таким образом, имеем два решения второй системы:

$$(-1{,}5+1{,}5\sqrt{5};\; -1{,}5-1{,}5\sqrt{5}) \quad \text{и} \quad (-1{,}5-1{,}5\sqrt{5};\; -1{,}5+1{,}5\sqrt{5}).$$

Совокупность решений первой и второй систем является решением исходной задачи.

Имеем три различных решения: $(6; 6)$, $(-1{,}5 + 1{,}5\sqrt{5}; -1{,}5 - 1{,}5\sqrt{5})$, $(-1{,}5 - 1{,}5\sqrt{5}; -1{,}5 + 1{,}5\sqrt{5})$, и все они удовлетворяют ОДЗ системы.

Так как решений, а соответственно и значений x более одного, то в ответе запишем их сумму:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6 + (-1{,}5 + 1{,}5\sqrt{5}) + (-1{,}5 - 1{,}5\sqrt{5}) = \underline{3}.$$

Ответ. 3.

ЗАДАЧА 3

Найти углы α, β, γ первой четверти, принадлежащие отрезку $[-2\pi; 2\pi]$, если известно, что они составляют арифметическую прогрессию с разностью $\frac{13\pi}{90}$, а их тангенсы составляют геометрическую прогрессию. Ответ дать в градусах.

Решение

Так как углы α, β, γ являются углами первой четверти, они по определению принадлежат семейству отрезков $\left[2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$. Первая четверть на отрезке $[-2\pi; 2\pi]$ задается отрезками $\left[-2\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$ (при $n = -1$) и $[0; \frac{\pi}{2}]$ (при $n = 0$). Этим отрезкам принадлежат интересующие нас углы. Из условия арифметической прогрессии следует, что $\beta = \alpha + \frac{13\pi}{90}$ и $\beta = \gamma - \frac{13\pi}{90}$. Из условия геометрической прогрессии получаем $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}^2\beta$. Имеем систему

$$\begin{cases} \beta = \alpha + \dfrac{13\pi}{90}, \\ \beta = \gamma - \dfrac{13\pi}{90}, \\ \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}^2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta - \dfrac{13\pi}{90}, \\ \gamma = \beta + \dfrac{13\pi}{90}, \\ \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}^2\beta \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\left(\beta - \frac{13\pi}{90}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\beta + \frac{13\pi}{90}\right) = \operatorname{tg}^2\beta.$$

Исходя из формул $\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg}a - \operatorname{tg}b}{1 + \operatorname{tg}a \cdot \operatorname{tg}b}$ и $\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg}a + \operatorname{tg}b}{1 - \operatorname{tg}a \cdot \operatorname{tg}b}$ при условиях $1 + \operatorname{tg}a \cdot \operatorname{tg}b \neq 0$ и $1 - \operatorname{tg}a \cdot \operatorname{tg}b \neq 0$, приведем последнее уравнение к виду

$$\frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\frac{13\pi}{90}}{1 + \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\frac{13\pi}{90}} \cdot \frac{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\frac{13\pi}{90}}{1 - \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\frac{13\pi}{90}} = \operatorname{tg}^2\beta. \tag{1.3}$$

Во избежание громоздкости положим $\operatorname{tg}\beta = n$, $\operatorname{tg}\frac{13\pi}{90} = m$ и перепишем уравнение (1.3) в этих обозначениях:

$$\frac{n-m}{1+n\cdot m} \cdot \frac{n+m}{1-n\cdot m} = n^2 \quad (\text{при } 1 + n\cdot m \neq 0 \text{ и } 1 - n\cdot m \neq 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n^2 - m^2}{1 - n^2 \cdot m^2} = n^2.$$

Так как $1 - n^2 \cdot m^2 \neq 0$, то

$$\frac{n^2 - m^2}{1 - n^2 \cdot m^2} = n^2 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad n^2 - m^2 = n^2 - n^4 \cdot m^2 \quad \Leftrightarrow \quad n^4 \cdot m^2 - m^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \operatorname{tg}^4\beta \cdot \operatorname{tg}^2\frac{13\pi}{90} - \operatorname{tg}^2\frac{13\pi}{90} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg}^4\beta - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad (\operatorname{tg}^2\beta - 1) \cdot (\operatorname{tg}^2\beta + 1) = 0.$$

Так как $\operatorname{tg}^2\beta + 1 > 0$ при любом β, то

$$(\operatorname{tg}^2\beta - 1) \cdot (\operatorname{tg}^2\beta + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg}^2\beta - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad (\operatorname{tg}\beta - 1) \cdot (\operatorname{tg}\beta + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\beta = 1 \text{ или } \operatorname{tg}\beta = -1.$$

По условию β — угол первой четверти, тангенс его положителен, значит, уравнение $\operatorname{tg}\beta = -1$ подходящих решений не имеет. Решениями уравнения $\operatorname{tg}\beta = 1$ являются углы $\beta = \operatorname{arctg} 1 + \pi k = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Найдем все значения β, принадлежащие множеству $\left[-2\pi; -\frac{3\pi}{2}\right] \cup [0; \frac{\pi}{2}]$:

- при $k \in (-\infty; -3]$ значения β не принадлежат указанным отрезкам;
- при $k = -2$ получаем угол $\beta = -\frac{7\pi}{4}$, который принадлежит отрезку $\left[-2\pi;\ -\frac{3\pi}{2}\right]$;
- при $k = -1$ получаем угол $\beta = -\frac{3\pi}{4}$, который не принадлежит указанным отрезкам;
- при $k = 0$ получаем угол $\beta = \frac{\pi}{4}$, который принадлежит $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;
- при $k \in [1; +\infty]$ значения β не принадлежат указанным отрезкам.

Итак, имеем два решения: $\beta_1 = -\frac{7\pi}{4}$ и $\beta_2 = \frac{\pi}{4}$, оба они удовлетворяют ОДЗ уравнения (1.3). Найдем остальные углы:

$$\alpha_1 = \beta_1 - \frac{13\pi}{90} = -\frac{7\pi}{4} - \frac{13\pi}{90} = -\frac{341\pi}{180},$$
$$\gamma_1 = \beta_1 + \frac{13\pi}{90} = -\frac{7\pi}{4} + \frac{13\pi}{90} = -\frac{289\pi}{180};$$
$$\alpha_2 = \beta_2 - \frac{13\pi}{90} = \frac{19\pi}{180},$$
$$\gamma_2 = \beta_2 + \frac{13\pi}{90} = \frac{71\pi}{180}.$$

Переведем радианы в градусы:

$$\alpha_1 = -341^\circ, \quad \beta_1 = -315^\circ, \quad \gamma_1 = -289^\circ;$$
$$\alpha_2 = 19^\circ, \quad \beta_2 = 45^\circ, \quad \gamma_2 = 71^\circ.$$

Очевидно, что каждый элемент тройки $\{-341^\circ; -315^\circ; -289^\circ\}$ принадлежит отрезку $[-360^\circ; -270^\circ]$, а каждый угол из совокупности $\{19^\circ; 45^\circ; 71^\circ\}$ находится внутри отрезка $[0^\circ; 90^\circ]$, так что имеем два ответа.

Ответ. $\{-341; -315; -289\}$ или $\{19; 45; 71\}$.

ЗАДАЧА 4

Один из двух одинаковых сосудов, объемом по 30 литров каждый, наполнен чистым спиртом, а второй пуст. Из первого сосуда во второй отливают некоторое количество спирта. После этого первый сосуд доливают доверху водой и полученной смесью дополняют второй сосуд. Затем из второго сосуда отливают в первый 12 литров новой смеси. Сколько спирта было отлито во второй сосуд при первом переливании, если после всех переливаний чистого спирта во втором сосуде оказалось на 2 литра меньше, чем в первом?

Решение

Рассмотрим произведенные переливания по шагам.

1-й шаг: из первого сосуда отливают во второй некоторое количество спирта;

2-й шаг: первый сосуд доливают доверху водой;

3-й шаг: полученной на втором шаге смесью дополняют второй сосуд;

4-й шаг: из второго сосуда отливают в первый 12 литров полученной на третьем шаге смеси.

В итоге во втором сосуде оказалось на 2 литра спирта меньше, чем в первом. Рассмотрим каждый шаг.

1. Обозначим через x (л) количество спирта, которое было отлито во второй сосуд при первом переливании. Тогда в первом сосуде осталось $(30 - x)$ (л) спирта.

2. После доливания в первый сосуд воды в нем стало 30 литров смеси, в которой x литров воды и $(30 - x)$ литров чистого спирта. Концентрация чистого спирта в первом сосуде стала равна $\dfrac{30 - x}{30}$.

3. Для того чтобы наполнить второй сосуд, из первого нужно долить в него $(30-x)$ литров полученной в первом сосуде смеси. Объем чистого спирта в перелитой на этом шаге смеси равен $(30-x)\cdot\dfrac{30-x}{30}$ (л). После этого переливания во втором сосуде стало 30 литров смеси, в которой содержится $x+\dfrac{(30-x)^2}{30}$ (л) чистого спирта. Концентрация чистого спирта во втором сосуде равна $\dfrac{x}{30}+\dfrac{(30-x)^2}{30^2}$.

4. Из второго сосуда в первый отливают 12 литров полученной на третьем шаге смеси. В этой смеси $12\cdot\left(\dfrac{x}{30}+\dfrac{(30-x)^2}{30^2}\right)$ (л) чистого спирта. После предыдущего переливания в первом сосуде оставалось x (л) смеси, концентрация чистого спирта в которой $\dfrac{30-x}{30}$. Новая смесь в первом сосуде содержит $x\cdot\dfrac{30-x}{30}+12\cdot\left(\dfrac{x}{30}+\dfrac{(30-x)^2}{30^2}\right)$ (л) чистого спирта.

После последнего переливания во втором сосуде осталось $30-12=18$ литров смеси, концентрация чистого спирта в которой составляет $\dfrac{x}{30}+\dfrac{(30-x)^2}{30^2}$. Следовательно, во втором сосуде содержится $18\cdot\left(\dfrac{x}{30}+\dfrac{(30-x)^2}{30^2}\right)$ (л) чистого спирта.

Условие, что после всех переливаний во втором сосуде оказалось на 2 литра чистого спирта меньше, чем в первом, записывается уравнением

$$x\cdot\frac{30-x}{30}+12\cdot\left(\frac{x}{30}+\frac{(30-x)^2}{30^2}\right)-2=18\cdot\left(\frac{x}{30}+\frac{(30-x)^2}{30^2}\right)\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad\frac{30x-x^2}{30}-2=6\cdot\left(\frac{x}{30}+\frac{(30-x)^2}{30^2}\right).$$

Разделим обе части последнего равенства на 30:

$$\frac{30x-x^2}{30^2}-\frac{2}{30}=\frac{6}{30}\cdot\left(\frac{x}{30}+\left(\frac{30-x}{30}\right)^2\right)\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad\frac{x}{30}-\left(\frac{x}{30}\right)^2-\frac{1}{15}=\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{x}{30}+\left(1-\frac{x}{30}\right)^2\right)\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad\frac{x}{30}-\left(\frac{x}{30}\right)^2-\frac{1}{15}=\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{x}{30}+1-2\cdot\frac{x}{30}+\left(\frac{x}{30}\right)^2\right)\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad\frac{x}{30}-\left(\frac{x}{30}\right)^2-\frac{1}{15}=\frac{1}{5}\cdot\left(1-\frac{x}{30}+\left(\frac{x}{30}\right)^2\right).$$

Произведя замену $\frac{x}{30} = k$, получим

$$k - k^2 - \frac{1}{15} = \frac{1}{5} - \frac{k}{5} + \frac{k^2}{5} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{6k^2}{5} - \frac{6k}{5} + \frac{4}{15} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 9k^2 - 9k + 2 = 0, \quad D = 81 - 72 = 9 = 3^2,$$

$$k_1 = \frac{9+3}{18} = \frac{2}{3}; \quad k_2 = \frac{9-3}{18} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x_1}{30} = \frac{2}{3}; \quad \frac{x_2}{30} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 20 \text{ и } x_2 = 10,$$

т. е. возможны два варианта первоначального переливания спирта во второй сосуд, которые соответствуют решению задачи.

Проведем проверку полученных ответов, исходя из того, что объем смесей в каждом из сосудов на каждом шаге переливания не может превышать 30 литров. Проверим полученные значения в табл. 1.1. В ней указана наполненность сосудов на каждом шаге. Нулевой шаг показывает начальное заполнение каждого сосуда. Так как у нас два итога: $x = 20$ и $x = 10$, то имеем два варианта переливаний.

Таблица 1.1

№ шага	**Первый вариант ($x = 20$)**		**Второй вариант ($x = 10$)**	
	Первый сосуд	**Второй сосуд**	**Первый сосуд**	**Второй сосуд**
0	30	0	30	0
1	10	20	20	10
2	30	20	30	10
3	20	30	10	30
4	32	18	22	18

В первом варианте после четвертого шага в первом сосуде оказалось 32 литра, но сосуд по условию имеет объем 30 литров, так что первый вариант некорректен.

Во втором варианте количество смеси ни на одном шаге ни разу не превысило 30 литров, т. е. не превысило объемы сосудов, значит, второй вариант корректен.

Таким образом, при первом переливании во второй сосуд отлили 10 литров спирта.

Ответ. 10 литров.

ЗАДАЧА 5

Дан ромб $ABCD$. Окружность радиуса 2 касается прямых AB и AD в точках B и D соответственно и пересекает сторону BC в точке L так, что $4 \cdot BL = BC$. Найти площадь ромба.

Решение

Рассмотрим чертеж (рис. 1.1).

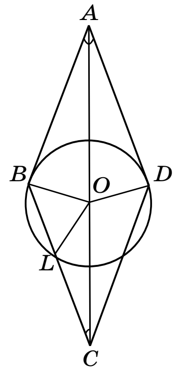


Рис. 1.1

Известно, что $4 \cdot BL = BC$, $OB = OD = OL = R = 2$; $OB \perp AB$ и $OD \perp AD$, как радиус и касательная в точке касания. Точка O является центром окружности, к которой из точки A проведены две касательные. Из свойства касательных к окружности, проведенных из одной точки, следует, что точка O лежит на биссектрисе угла между этими касательными, т. е. на биссектрисе угла DAB.

Прямая AC является диагональю ромба, из свойства диагоналей ромба следует, что она является биссектрисой $\angle DAB$, т. е. точка O лежит на AC.

Рассмотрим $\triangle ABO$. $\angle ABO = 90^\circ$, так как $OB \perp AB$. Положим $\angle BAO = \angle BAC = \alpha$, очевидно, что $\alpha > 0^\circ$. Значит, $\angle AOB = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha$, $\angle BAD = 2\alpha$. Из того, что AC является диагональю ромба, вытекают равенства $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$ (как углы при основании равнобедренного треугольника ACB, $AB = BC$, как стороны ромба).

Рассмотрим $\triangle BOC$. $\angle BCO = \angle BCA = \angle BAO = \alpha$.

$$\angle BOC = 180^\circ - \angle AOB = 180^\circ - 90^\circ + \alpha = 90^\circ + \alpha \text{ (как смежные)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \angle OBC = 180^\circ - \angle BOC - \angle BCO = 180^\circ - 90^\circ - \alpha - \alpha = 90^\circ - 2\alpha.$$

Рассмотрим $\triangle OBL$.

$$\angle OBL = \angle OBC = 90^\circ - 2\alpha \Rightarrow \angle OLB = \angle OBL = 90^\circ - 2\alpha,$$

как углы при основании равнобедренного треугольника ($OB = OL = R = 2$), следовательно,

$$\angle BOL = 180^\circ - \angle OBL - \angle OLB =$$
$$= 180^\circ - 90^\circ + 2\alpha - 90^\circ + 2\alpha = 4\alpha.$$

Заметим, что $\angle BOL < 180^\circ$, как угол треугольника, следовательно, $4\alpha < 180^\circ$, т. е. $\alpha < 45^\circ$.

Применим к треугольнику OBL теорему синусов:

$$\frac{OL}{\sin\angle OBL} = \frac{BL}{\sin\angle BOL} \Leftrightarrow \frac{OL}{\sin(90^\circ - 2\alpha)} = \frac{BL}{\sin 4\alpha} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{OL}{\cos 2\alpha} = \frac{BL}{\sin 4\alpha} \Leftrightarrow \frac{OL}{\cos 2\alpha} = \frac{BL}{2\cdot\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha}.$$

Так как $\alpha < 45^\circ$, то $\cos 2\alpha \neq \cos(2\cdot 45^\circ)$, т. е. $\cos 2\alpha \neq 0$, поэтому мы можем сократить на $\cos 2\alpha$ без потери корней уравнения. Следовательно,

$$\frac{OL}{\cos 2\alpha} = \frac{BL}{2\cdot\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha} \Leftrightarrow BL = 2\cdot\sin 2\alpha\cdot OL = 4\sin 2\alpha.$$

Из условия известно, что $4\cdot BL = BC$, поэтому

$$BC = 4\cdot 4\sin 2\alpha = 16\sin 2\alpha \Rightarrow AB = BC = CD = AD = 16\sin 2\alpha.$$

Рассмотрим еще раз $\triangle ABO$. $\angle ABO = 90^\circ$, $\angle BAO = \alpha$, $\angle AOB = 90^\circ - \alpha$, $OB = 2$, $BA = 16\sin 2\alpha$. Применим теорему синусов к этому треугольнику:

$$\frac{OB}{\sin\angle BAO} = \frac{BA}{\sin\angle AOB} \Rightarrow \frac{2}{\sin\alpha} = \frac{16\sin 2\alpha}{\sin(90^\circ - \alpha)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos\alpha = 8\cdot\sin 2\alpha\cdot\sin\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha - 8\cdot\sin 2\alpha\cdot\sin\alpha = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos\alpha - 16\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha\cdot(1 - 16\cdot\sin^2\alpha) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos\alpha\cdot(1 - 4\cdot\sin\alpha)\cdot(1 + 4\cdot\sin\alpha) = 0.$$

Ранее установлено, что $0 < \alpha < 45^\circ$. Имеем систему

$$\begin{cases} \cos\alpha\cdot(1 - 4\cdot\sin\alpha)\cdot(1 + 4\cdot\sin\alpha) = 0, \\ 0 < \alpha < 45^\circ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos\alpha = 0, \\ 1 - 4\sin\alpha = 0, \\ 1 + 4\sin\alpha = 0 \end{array}\right. \\ 0 < \alpha < 45^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \alpha = 90^\circ, \\ \sin\alpha = \dfrac{1}{4}, \\ \sin\alpha = -\dfrac{1}{4} \end{array}\right. \\ 0 < \alpha < 45^\circ. \end{cases}$$

Угол $\alpha = 90^\circ$ не подходит по условию $0 < \alpha < 45^\circ$. Так как $0 < \alpha < 45^\circ$, то он принадлежит первой четверти, поэтому

$$\sin 0 < \sin\alpha < \sin 45^\circ \Rightarrow 0 < \sin\alpha < \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 0 < \sin\alpha < \frac{2\sqrt{2}}{4}.$$

Красновский Роман Леонидович, кандидат технических наук, доцент. Много лет преподавал в МИСиС и готовил школьников к поступлению в вузы. Его ученики с неизменным успехом становились студентами самых престижных технических и экономических университетов. В настоящее время реализует крупнейшие в России проекты в сфере информационных технологий и связи, не оставляя преподавательской деятельности.

В книге собраны задачи, позволяющие развить или отточить необходимые навыки решения заданий, аналоги которых встречаются на экзаменах (ЕГЭ, олимпиада, дополнительные вступительные испытания, дистанционное тестирование и т.д.). Задачи сборника разбиты на 14 вариантов, каждый из которых представляет собой законченную с точки зрения проверки знаний по курсу математики экзаменационную работу. Приведены полные и подробные решения заданий.

Книга предназначена для старшеклассников, учителей математики и репетиторов, но в особенности будет полезна абитуриентам вузов, для поступления в которые требуется сдавать дополнительные вступительные экзамены по математике. Кроме того, предложенный материал ориентирован на тех, кто хочет научиться решать сложные задачи из профильного ЕГЭ.