Глава 1

Базовые приёмы и неравенства

В этой главе мы познакомимся с наиболее фундаментальными приёмами, которые используются при работе с неравенствами. Для их понимания достаточно знаний из программы 8 класса. Однако это не означает, что все задачи решаются легко! Двигаясь от простых задач к сложным, удаётся очень быстро дойти до задач весьма высокого уровня…

1.1. Сумма взаимно обратных чисел

Мы начнём наш путь со следующего важного неравенства.

Задача 1.1 [*неравенство для взаимно обратных чисел*]. Докажите, что при положительных x имеет место неравенство

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2,$$

причём равенство достигается только при $x = 1$.

Полезно представлять себе график функции $y = x + \frac{1}{x}$. Он изображён на рис. 1. Обратите внимание на точку минимума $x = 1$. Также заметим, что для отрицательных x выполнено неравенство

$$x + \frac{1}{x} \leqslant -2.$$

Впрочем, оно используется крайне редко, поскольку, как правило, в неравенствах фигурируют неотрицательные величины.

Задача 1.2. Докажите, что для положительных чисел a и b имеет место неравенство

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2,$$

причём равенство достигается только при $a = b$.

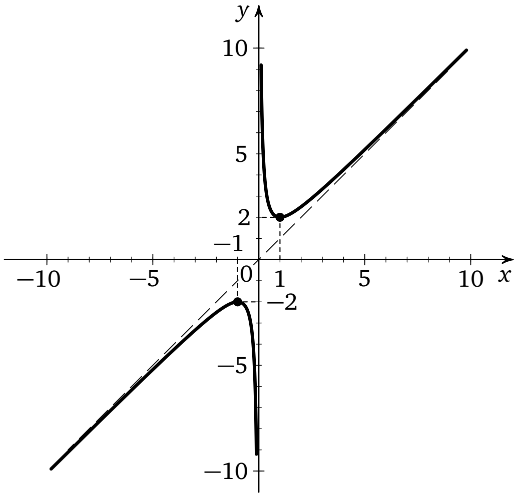

Рис. 1. График функции $y = x + \dfrac{1}{x}$

Зачастую многие задачи, связанные с неравенствами, удаётся решить, если заметить в них замаскированные стандартные неравенства, например неравенство для взаимно обратных чисел. Может показаться, что это очень легко, ведь само неравенство для взаимно обратных чисел содержит всего-навсего одну переменную. Да и дроби найти несложно… Однако на деле оказывается, что всё не так просто. Иногда неравенство нужно *преобразовать* таким образом, чтобы в нём появилось какое-либо стандартное неравенство. При этом заранее непонятно, к какому стандартному неравенству нужно пытаться свести исходное и, самое главное, как это сделать. Наша цель в этой главе — набраться опыта и научиться наиболее простым приёмам, позволяющим сводить неравенства к стандартным. Для начала попробуйте решить следующие задачи. В каждой из них ключевую роль играет неравенство для взаимно обратных чисел. Но вот как его заметить?..

Задача 1.3. Докажите, что для любых a, $b > 0$ выполнено неравенство
$$\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} \leqslant 1.$$

Задача 1.4. Докажите, что для любых a, b, $c > 0$ выполнено неравенство
$$\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \geqslant 6.$$

Задача 1.5 [*неравенство Несбитта*]. Докажите, что для любых a, b, $c > 0$ выполнено неравенство

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Обратите внимание на последнюю задачу. Если не получилось решить её самостоятельно, стоит разобрать решение, приведённое в конце книги. Неравенство Несбитта ценно скорее не как готовый факт (в отличие от, например, неравенства Коши), а как иллюстрация *работы с дробями*. В неравенствах часто встречаются именно дроби, и работать с ними очень непросто. В следующих главах мы познакомимся и с другими приёмами борьбы с ними, однако приём, используемый при доказательстве неравенства Несбитта, является одним из ключевых и будет неоднократно встречаться нам в дальнейшем. Такие ключевые задачи, иллюстрирующие тот или иной метод, полезно выделять для себя самостоятельно.

1.2. Неравенство Коши

Неравенство Коши обобщает неравенство для взаимно обратных чисел и является одним из самых известных классических неравенств. Тем не менее увидеть его в реальных ситуациях бывает очень непросто, поэтому в этом пункте мы подробно обсудим, какие соображения помогают его найти.

Для начала напомним само неравенство Коши.

Задача 1.6 [*неравенство Коши*]. Докажите, что для любых положительных чисел a, b выполнено неравенство

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab},$$

причём равенство достигается лишь при $a = b$.

Отметим, что из неравенства Коши следует неравенство для взаимно обратных чисел: достаточно положить $a = x$ и $b = 1/x$. Тогда $ab = 1$, и мы легко получаем требуемое неравенство. Обратим внимание читателя на то, что часто *соотношение вида $ab = 1$ даётся в самом условии задачи*. В таком случае полезно попытаться использовать неравенство Коши, поскольку оно позволит оценить сумму соответствующих величин через их произведение, которое равно 1.

Вообще говоря, эта идея и является одной из ключевых при применении неравенства Коши: *она позволяет связать сумму двух чисел и их произведение*. Однако способов заставить неравенство Коши работать очень много. В этом пункте мы освоим способы, которые работают в случае двух переменных. Неравенство Коши для большего числа переменных подробно разбирается в пунктах 2.2, 3.1, 6.3 и 7.1.

Задача 1.7. Докажите, что если x, y по модулю меньше 1, то

$$\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{1-y^2}\geqslant\frac{2}{1-xy}.$$

Решение. Перед тем как предлагать задачи для самостоятельного решения, мы покажем, как можно придумать решение задачи, если заранее его не знать (а ведь именно в таком положении и находятся школьники, доказывающие неравенства на олимпиадах). Сейчас мы приведём решение этой задачи, найденное автором, а также покажем возможные соображения, позволяющие придумать это решение.

Итак, начнём. В неравенстве присутствует произведение xy, которое является одним из указаний на возможное применение неравенства Коши. Тогда давайте его применим и посмотрим, что получится. Обратите внимание на то, что мы заранее не можем быть уверены в том, что сразу докажем нужное нам неравенство «в один ход». Более того, мы даже не представляем, что получится в результате наших действий. Подобная ситуация типична при работе с неравенствами (а также с другими олимпиадными задачами): *необходимо научиться не бояться делать шаги вслепую, не зная заранее, что получится в результате*. Со временем можно выработать интуицию, позволяющую угадывать нужные шаги. С другой стороны, ошибочные действия тоже стоит отмечать и запоминать, в какой ситуации они не работают, чтобы впоследствии уже не допускать их.

Применив неравенство Коши, получаем

$$xy\leqslant\frac{x^2+y^2}{2}.$$

Вспоминая, что $|x|$, $|y|<1$, находим, что

$$1-xy\geqslant 1-\frac{x^2+y^2}{2}>0,$$

и, следовательно,

$$\frac{2}{1-xy}\leqslant\frac{4}{2-(x^2+y^2)}.$$