УДК 530.1
ББК 22.31
Н12

Нахин П. Дж.

Н12 Сказки мнимого мира. История о $\sqrt{-1}$ / пер. с англ. А. А. Слинкина. – М.: ДМК Пресс, 2020. – 342 с.: ил.

ISBN 978-5-97060-822-7

Эта книга читается как увлекательная история, чуть ли не биография, одного из самых неуловимых и вместе с тем вездесущих «чисел» в математике. История $\sqrt{-1}$ берет начало еще в Древнем Египте, но европейская наука освоила это число относительно недавно. Пол Нахин, известный популяризатор точных наук, вплетает в повествование любопытные исторические факты, обсуждение математических проблем и сведения о применениях комплексных чисел и функций в таких важных задачах, как законы движения планет Кеплера и электрические цепи переменного тока.

Издание адресовано всем, кого интересует математика, в том числе и в историческом ракурсе.

УДК 530.1
ББК 22.31

All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage and retrieval system, without permission in writing from the Publisher PRINCETON UNIVERSITY PRESS. Russian-language edition copyright © 2020 by DMK Press. All rights reserved.

Все права защищены. Любая часть этой книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами без письменного разрешения владельцев авторских прав.

ISBN 978-0-691-16924-8 (анг.)
ISBN 978-5-97060-822-7 (рус.)

© Princeton University Press, 2016
© Оформление, издание, перевод, ДМК Пресс, 2020

Кэлвин и **Хоббс** **Рисунок Билла Уотерсона**

Обращение к читателю

В этой книге много говорится об истории, но это не значит, что математика в ней в загоне. Впрочем, не стоит принимать это чрезмерно серьезно. Это *не* научный трактат, адресованный какой-то мифической элитарной группе, – наподобие той, о которой в 20-х годах XX века ходили слухи, будто в мире найдется всего дюжина людей, действительно понимающих идеи Эйнштейна. Про $\sqrt{-1}$ тоже долгое время бытовало аналогичное заблуждение – мол, тайна сия велика есть. Гениальный французский философ эпохи Просвещения Дени Дидро писал про математиков, что они «похожи на людей, взирающих с вершин высоких гор, чьи пики теряются в облаках. Оттуда не видно, что находится внизу, они поглощены созерцанием собственных мыслей и осознанием высоты, на которую вознеслись, куда другим не подняться и где они не смогут дышать [разреженным воздухом]». Так вот, в этой книге давление воздуха почти такое же, как на уровне моря. Большая ее часть будет понятна даже старшекласснику, который внимательно слушал учителя на уроках. И уж точно она доступна любому из того миллиона студентов, которые каждый год посещают курс математического анализа для первокурсников. Это не учебник, но мне кажется, что студентам было бы полезно прочитать эту книгу как дополнение к стандартному курсу математики. Сам я инженер-электротехник, а не математик, и это оказало влияние на стиль изложения. Я в полной мере пользовался свободой от педагогических оков, связывающих авторов учебников, – в худшем случае они выливаются в педантизм – и писал в свободном стиле, который, хочется надеяться, доставит вам удовольствие. Но уверяю вас, что когда требовалось взять интеграл, я не падал на колени в священном ужасе. И вы не должны. Мощь и красота комплексных чисел и функций и удивительная история их открытия с лихвой окупят те умственные усилия, которые придется предпринять при чтении более сложных частей книги.

Предисловие ко второму изданию

Издание этой книги в твердой обложке вышло в 1998 году, и в течение долгих восьми лет я каждую ночь засыпал с мыслью о нелепых опечатках, пропущенных по невнимательности знаках минус и неудачно построенных предложениях. Все это доставляло мне такие же страдания, как заноза под ногтем. Конечно, это не угрожало ничьей жизни, но отравляло мое интеллектуальное существование. Первые шесть месяцев после выхода книги из печати я просыпался по ночам, бормоча себе под нос, как эксцентричный физик викторианской эпохи Оливер Хэвисайд, который, приближаясь к шестидесяти годам, бывало, восклицал: «Я, должно быть, глуп как пробка». То было интересное время – жизнь пожилого математика, решившего писать книги, может оказаться полной стрессов.

Но теперь это позади! На протяжении нескольких лет читатели щедро жертвовали своим временем, чтобы рассказать о моих упущениях. И вот, со списком замечаний в одной руке и с красным карандашом в другой, я с радостью исправил досадные оплошности в тексте нового издания. Быть может, что-то и осталось, но все равно я чувствую себя гораздо лучше (без сомнения, это чувство испарится, как только я получу очередное письмо – на бумаге или по электронной почте, – в котором мне укажут на незамеченные ошибки). Особенно полезны были два длинных, очень подробных письма, полученных в 1999 году от профессоров Роберта Бэркеля (математический факультет Канзасского университета) и Дэвида Вунша (факультет электротехники Массачусетского университета в Лоуэлле). Ранее в этом году издательство Принстонского университета опубликовало продолжение этой книги «Doctor Euler's Fabulous Formula»[i], так что появление исправленного издания «Сказок мнимого мира» пришлось очень кстати. Я благодарен своему редактору из Принстона, Вики Керн, за возможность вернуться к этой книге. А теперь хочу сказать о том, что еще изменилось в этом издании, помимо исправления опечаток.

---

[i] *Нахин П. Дж.* Необыкновенная формула доктора Эйлера. М.: ДМК Пресс, 2020. – *Прим. перев.*

Вообще-то, я начну – пусть это и выглядит непоследовательно – с того, что *не* изменилось. Хотя я внимательно прочел *все*, что прислали мои читатели, и признаю, что очень многое оказало заметное влияние на внесенные исправления, есть и несколько исключений. Приведу лишь два примера. Вот один читатель сурово попенял мне за высказанное мнение (стр. 35) о том, что прорывная идея дель Ферро, открывшего общий метод решения неполного кубического уравнения, была «гениальной». Нет-нет, писал читатель (назвавшийся профессиональным математиком), это была просто «хорошая идея», которая могла бы прийти в голову многим. На это я могу только ответить, что никому до дель Ферро она *не* пришла в голову. Что бы ни говорить о том, что математики *могли бы* сделать или даже *должны были бы* сделать, факт остается фактом – неполное кубическое уравнение решил *дель Ферро*. Думается мне, что мой образованный критик попросту позабыл, как был поражен, впервые узнав, как решается кубическое уравнение.

Поговорка «чем ближе знаешь, тем меньше почитаешь» точна именно потому, что *истинна*. К чему я веду? К тому, что ныне любой приличный старшеклассник умеет доказывать иррациональность $\sqrt{2}$, но это вовсе не значит, что данный факт превратился в банальность. Двадцать пять веков назад или около того открытие иррациональных чисел стало революцией в математике, и ученики до сих пор в удивлении раскрывают рты, когда видят доказательство впервые. Вот и мой критик совершенно неправ в отношении неполного кубического уравнения, поэтому я ни слова не изменил в отрывке, посвященном дель Ферро.

Второй пример «ошибки, которой не было» – замечание читателя о том, что на рис. 5.8 (схема генератора с фазовым сдвигом) напряжение u находится справа от напряжения v, тогда как в тексте я пишу, что u находится слева. Поначалу это утверждение поставило меня в тупик (я уже путаю *право* и *лево*? – Боже, я, должно быть, глуп как пробка!), но потом я понял, что он смотрел на цепь резистивно-емкостной обратной связи, хотя в тексте я ясно написал, что речь идет о напряжениях на клеммах входа-выхода *усилителя*, подключенного к этой цепи. (Слава Богу, я все-таки не глуп как пробка! Такие вот мелочи – отрада для престарелого писателя-математика в полуночные часы.) Я еще вернусь к этой схеме чуть позже. Тот же читатель (кстати, профессор математики) пожаловался, что совершенно сбит с толку моим употреблением символа $\angle$, например когда я пишу $r \angle \theta$ вместо $re^{i\theta}$ для обозначения вектора длины r, составляющего *угол* θ с положительным направлением вещественной оси. Думаю, он немного преувеличил. Согласен, что эта нотация для математика выглядит нестандартной (хотя инженеры-электротехники пользуются ей постоянно), но считаю, что и математикам стоило бы всерьез задуматься о ее принятии, ведь она совершенно естественна, поскольку наводит на мысль о понятии угла, которое, собственно, и представляет.

Самую интересную корреспонденцию с читателем вызвала врезка 3.3 («Безумные экспоненты») на стр. 120, где «выводится» тождество $1 = e^{-4\pi^2 n^2}$ для любого целого n: загадка, разумеется, в том, что это утверждение верно только для $n = 0$. Включая эту врезку, я хотел просто предложить «парадокс», который читатель смог бы разрешить самостоятельно, поразмыслив о написанном на предыдущей странице (врезка 3.2 «Возведение комплексного числа в комплексную степень»), а если не получится, то дочитав до раздела 6.9 («Многозначные функции»). В «выводе» во врезке 3.3 содержалась и подсказка – фраза о математических «операциях, которые, *на первый взгляд* (курсив мой), кажутся корректными». Но *действительно* ли операции во врезке 3.3 корректны?

Например, из школьного курса алгебры мы знаем, что если *z вещественное*, то

$$e^{\ln z} = z \tag{a}$$

и

$$\ln(e^z) = z. \tag{b}$$

Однако если *z комплексное*, то (a) по-прежнему верно (и я таки использую этот факт во врезке 3.2 при вычислении $(1 + i)^{(1+i)}$), но для (b) это не так. Для иллюстрации проблем, к которым может привести утверждение (b), начнем со знаменитой формулы Эйлера $e^{i\pi} + 1 = 0$, или $e^{i\pi} = -1$. Возведя обе части в квадрат, получим $e^{2\pi i} = 1$, а затем применение (b) дает $\ln(e^{2\pi i}) = \ln(1)$, т. е. $2\pi i = 0$. Полагаю, все согласятся, что это неверно! Разумеется, корень зла здесь тот же, что во врезке 3.3. Просветление приходит с осознанием того, 1 – не просто $e^{2\pi i}$, а *бесконечное* множество значений $e^{2\pi in}$, где n – *произвольное* положительное или отрицательное целое число, в т. ч. 0 и 1. Поэтому мы должны были бы написать не $e^{2\pi i} = 1$, а $e^{2\pi in} = 1$, и тогда из (b) вытекало бы, что $\ln(e^{2\pi in}) = \ln(1) = i2\pi n$. То есть на самом деле мы получили, что ln(1) – *комплексная* величина, а точнее *чисто мнимая*, т. е. имеющая нулевую вещественную часть. Из школьного курса алгебры мы знаем про нулевую вещественную часть ($\ln(1) = 0$), но полный ответ заключается в том, что у ln(1) есть и мнимая часть, которая может быть равна нулю, но может быть и ненулевой (при $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$).

Объяснение загадки из врезки 3.3 вы найдете в новом приложении D в конце книги, но если вы читаете книгу впервые, попробуйте разгадать ее самостоятельно, не заглядывая в решение.

Обсуждение проблемы Каснера в разделе 5.1 также вызвало ряд писем от недоумевающих читателей. Один из них, профессор МТИ, писал, что «пример Каснера в пух и прах разбил мою интуицию» и что «я решил, что пример Каснера – липа». Действительно, Каснер пользовался репутацией человека с извращенным чувством юмора (к примеру, он придумал названия *googol* и *googolplex* для чисел 10^{100} и 10^{googol} соответственно), но в математике он был вполне серьезен. Помимо статьи 1914 года, которую я цитирую в книге (примечание 2 к главе 5 на стр. 326), вы можете найти дополнительные результаты о длинах пути и хорды комплекснозначных функций во второй статье самого Каснера («Complex Geometry and Relativity: Theory of the 'Rac' Curvature», *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, March 15, 1932, стр. 267–274), а также в статье, вышедшей десятью годами позже (George Comenetz «The Limit of the Ratio of Arc to Chord», *American Journal of Mathematics* 64 (1942): 695–713).

В разделе 5.6 я утверждал, что схема генератора с фазовым сдвигом на рис. 5.8 легла в основу первого изделия, выпущенного компанией Hewlett-Packard, которая сегодня является гигантской корпорацией с многомиллиардными оборотами. Профессор электротехники из Стэнфордского университета Джин Франклин в 2004 году поправил меня, написав, что это так, но не совсем. Первое изделие HP (звуковой генератор HP-200A) на самом деле было основано на так называемом *мосте Вина*, о котором (если интересно) можно прочитать в любом учебнике по электронике для вузов. Или, если вы предпочитаете информацию из первоисточника, загляните в дипломную работу на получение звания инженера, в которой выпускник Стэнфорда 1939 года Уильям Хьюлетт (1913–2001) описывает свою схему. Спасибо, профессор Франклин, – будучи сам выпускником факультета электротехники Стэнфорда, я должен был бы проверять информацию более тщательно. Но заверяю вас, что вся комплексная *математика*, примененная для анализа генератора с фазовым сдвигом в разделе 5.6, правильна! И как уже было сказано выше, с обозначениями напряжений на рис. 5.8 тоже все в порядке.

Я, правда, получил несколько писем от читателей, буквально *умолявших* привести вывод дифференциального уравнения третьего порядка, которое, по моим словам (на стр. 192), описывает цепь резистивно-емкостной обратной связи этого генератора. Этот вывод включен в новое приложение E. Признаюсь, что для этого мне пришлось прибегнуть к чудесной силе *преобразования Лапласа* (иначе я бы безнадежно запутался в алгебраических выкладках), но в приложении E имеется краткое введение в это преобразование, так что даже те, кто никогда не слыхал о нем прежде, смогут разобраться в вычислениях. Включение преобразования Лапласа в это издание книги оправдано, потому что его математическое обоснование относится к теории комплексных функций. Его элементарное применение в приложении E обошлось без «комплексных» деталей, но вообще-то я должен был рассказать о нем подробнее в эпилоге первого издания (разделе 7.8). Приложение E исправляет эту недоработку. И математики, и инженеры постоянно пользуются преобразованием Лапласа для решения многих важных дифференциальных уравнений.

В разделе 6.3 я проглядел важную работу, появившуюся за год до публикации первого издания книги: Mark McKinzie и Curtis Tuckey «Hidden Lemmas in Euler's Summation of the Reciprocals of the Squares», *Archive for History of Exact Sciences* 51 (1997): 29–57.

Пришлось отредактировать приведенное в разделе 6.4. обсуждение гипотезы Римана, одной из самых знаменитых нерешенных задач в математике (и почти наверняка одной из самых глубоких проблем во *всей* истории математики). На стр. 210 я писал, что все *без исключения* первые комплексные нули дзета-функции в количестве 1.5×10^9 лежат на так называемой критической прямой $z = \frac{1}{2} + ib$, что было подтверждено вычислениями на компьютере. В октябре 2004 года это героическое достижение было превзойдено, теперь известно, что первые 10^{13} (да, *десять триллионов*) комплексных нулей $\zeta(z)$ лежат на критической прямой. Сам Риман вычислил только первые три нуля (допустив небольшую ошибку в значении b для третьего), после чего предположил, что *все* комплексные нули лежат на критической прямой. Современные компьютеры способны обработать миллионы нулей за день. Для иллюстрации взрывного роста за последние пятьдесят лет скажу, что еще в 1958 году, когда я окончил школу, было проверено меньше чем 36 000 нулей. Даже мой маленький и не очень новый ноутбук может за несколько минут сделать то, для чего Риману пришлось приложить гигантские усилия. Так, взглянув на график на рис. Р.1, где показана абсолютная величина $\zeta(z)$ для

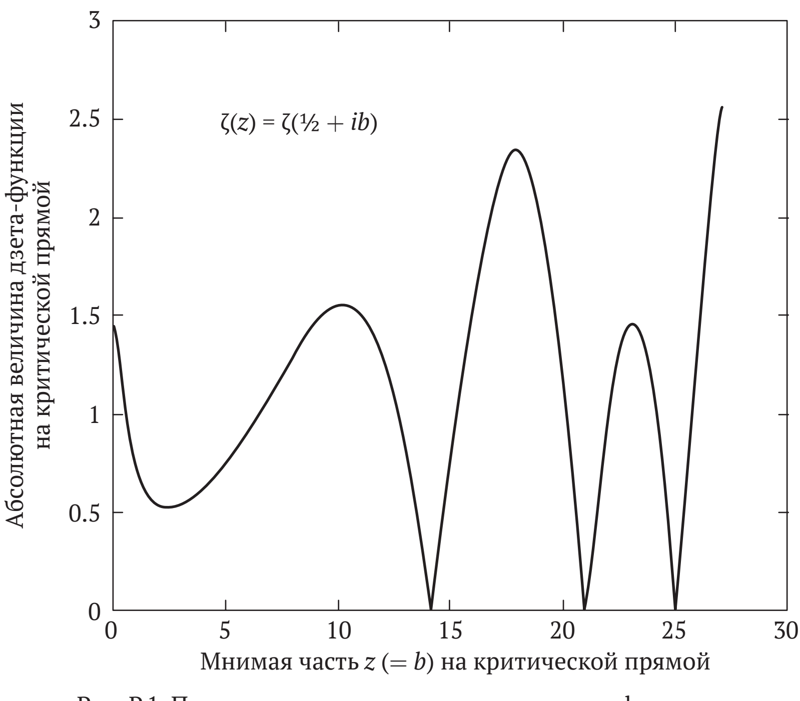

Рис. Р.1. Первые три нетривиальных нуля дзета-функции, найденных Риманом

$z = ½ + ib$ при изменении b от 0 до 27, мы увидим, что $|\zeta(z)| = 0$ (и, следовательно, $\zeta(z) = 0$) в трех точках ($b = 14.13$, 21.02 и 25.01, являющихся мнимыми частями первых трех нулей, найденных Риманом).

Должен признать, что мой личный вклад в создание рис. Р.1 свелся к написанию нескольких строчек кода в MATLAB, и пока я изнурял себя приготовлением чашечки кофе (и даже эту элементарную задачу за меня решила микроволновка!), мой ноутбук вычислил $|\zeta(z)|$ при 2000 значениях b, равномерно распределенных в интервале от 0 до 27, и построил показанный выше график – на все про все ушло около одной минуты. (Как вы думаете, что смог бы сделать Риман, имей он такое устройство?) Конечно, для чистого математика все эти компьютерные вычисления не значат ровным счетом *ничего*. Открытие хотя бы одного комплексного корня, не лежащего на критической прямой, стало бы смертельным ударом по гипотезе Римана. И *ничто* из известного математикам не препятствует такой возможности. Х. М. Эдвардс, изучавший дзета-функцию, писал: «…если только нет какой-то глубинной причины, не дающейся математикам на протяжении 110 лет (уже 142 на момент написания этого текста), то вполне возможны [комплексные] корни, не лежащие на критической прямой»[1]. Так что, несмотря на триллионы известных последовательных нулей на критической прямой, все-таки может оказаться, что Риман был неправ. Дальше Эдвардс пишет: «Озарение Римана удивительно, но не сверхъестественно, и то, что казалось “вероятным” ему в 1859 году, возможно, не так уж вероятно сегодня»[2].

Кстати, раз уж речь зашла о критической прямой, вот еще одно занятное вычисление, в котором вы можете попробовать свои силы (один читатель жаловался, что в книге мало задач, над которыми он мог бы поломать голову, – хотя это не учебник и не задачник). После того как прочитаете материал о гамма-функции и знаменитой формуле дополнения Эйлера (разделы 6.12 и 6.13), попробуйте доказать, что абсолютная величина гамма-функции на критической прямой равна

$$|\Gamma(z)|_{z=1/2+ib} = \sqrt{\frac{\pi}{\cosh(\pi b)}}.$$

Доказательство приведено в новом приложении F в самом конце книги, но не подглядывайте, пока не попробуете сами. (Подсказка: вспомните, что такое комплексно-сопряженное число.) Вычислить значение $\zeta(z)$ на критической прямой гораздо труднее; до сих пор известна только верхняя граница величины $|\zeta(1/2 + ib)|$ как функция от b^3.

До сих пор я не упоминал о своих мелких математических ошибках, а просто молча исправлял то неправильный знак, то неверный показатель степени и, не афишируя, двигался дальше. Но в разделе 6.7 письма профессоров Бэркеля и Вунша уличили меня в излишней хитрости – для моего (и вашего) блага. В этом случае я решил не скрывать свои досадные промахи и процитировать их письма. Это позволит вам и получить исправленный текст, и заодно посмеяться надо мной. (Вот книга по математике от издательства Princeton и окупится!) Проблема заключается в некоторых моих манипуляциях с $i = \sqrt{-1}$, например когда на стр. 217 я писал «Ошибка произошла, когда мы заменили -1 на i^2», а на стр. 218 – «Например, не следует заменять $-i/i$ на -1, а затем подставлять i^2 вместо -1». В первом случае профессор Вунш написал «в этом [замене -1 на i^2] нет ничего дурного. Ошибка же таится вот где:

$$\frac{i}{2}\ln i^2 = 2\ln i.$$

Проблема в том, что множество значений функции $\log z^2$ не совпадает с множеством значений $2\log z$. Рассмотрим равенство

$$\ln i^2 = 2\ln i.$$

Предположим, что вместо левой части мы напишем $-\pi i$. Множество значений правой части имеет вид

$$2\left[i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right] = i[\pi + 4k\pi].$$

Не существует ни одного целого k, при котором это равенство выполнялось бы». Что же касается второго случая, то профессор Бэркель написал: «я думаю, что если нельзя заменить -1 на $-i/i$, а i^2 – на -1, то математика превращается в мистику. Все это объясняется отсутствием общеизвестного свойства гомоморфности комплексного логарифма… $\log(ab)$ необязательно равно $\log(a) + \log(b)$». Что на это сказать? Оба профессора правы. Я пытался выразить свои мысли, не употребляя таких слов, как *гомоморфизм*, а в результате только все запутал. Автор сокрушенно посыпает главу пеплом.

В письме профессора Бэркеля исправлено также мое утверждение на стр. 289 о том, что до работы Лорана «Коши не знал о разложении аналитических функций в степенной ряд». Профессор Бэркель написал: «Это не так. Коши вывел представление в виде степенного ряда в знаменитом Туринском мемуаре 1831 года. Вклад Лорана – разложение в *двусторонний* степенной ряд в окрестности особой точки».

И последнее замечание. Закончив читать книгу, вы будете иметь полное право исполнить приведенную ниже песенку (лучше в одиночестве, в душе). Это разрешение действует бессрочно – или, по крайней мере, до тех пор, пока ваша половинка не попросит вас заткнуться (моя так и поступила). Установить, кто автор, я не сумел, но он или она, несомненно, обладал(а) недюжинным чувством юмора:

Песня о комплексных числах

(*на мотив «Боевого гимна Республики»*)[i]

Mine eyes have seen the glory of the Argand diagram,
They have seen the i's and thetas of De Moivre's mighty plan.
Now I can find the complex roots with consummate elan,
With the root of minus one.

(*Хор*)
Complex numbers are so easy;
Complex numbers are so easy;
Complex numbers are so easy;
With the root of minus one.

In Cartesian co-ordinates the complex plane is fine,
But the grandeur of the polar form this beauty doth outshine.
You'll be raising i + 40 to the power of 99,
With the root of minus one.

Хор

---

[i] Американская патриотическая песня. Хорошо известен ее рефрен «Glory, glory, hallelujah!». – *Прим. перев.*

You'll realize your understanding was just second rate,
When you see the power and magic of the complex conjugate.
Drawing vectors corresponding to the roots of minus eight,
With the root of minus one.

Хор

Искренне надеюсь, что книга вам понравится!

paul.nahin@unh.edu
Ли, Нью-Гэмпшир,
июль 2006

Предисловие

Давным-давно, так давно (в 1954 году), что тогдашняя моя бытность учеником старшего класса школы кажется далеким сном, отец подарил мне подписку на новый тогда журнал *Popular Electronics*. Он это сделал, потому что сам был ученым, а его старший сын, похоже, проявлял способности к наукам и к математике[i], но была опасность, что его затянет в греховный мир научной фантастики. Вообще-то я давал ему достаточно оснований так думать. В те дни я жадно поглощал научную фантастику, зачастую засиживаясь в кухне до одиннадцати часов в компании огромного сэндвича и читая роман, действие которого разворачивалось на Марсе через миллион лет. Папа, конечно, предпочел бы, чтобы я читал книгу по алгебре или физике. Но, будучи умным человеком, он не стал запрещать мне научную фантастику, а зашел с фланга, решив пристрастить меня к чтению *технических* рассказов, например из рубрики «Карл и Джерри», которая каждый месяц печаталась в *Popular Electronics*. Карл и Джерри – два школьника-вундеркинда (сейчас их назвали бы ботанами или гиками), увлекающиеся электроникой и то и дело влипающие в разные истории, из которых выбираются благодаря своим техническим познаниям. План отца состоял в том, чтобы я отождествлял себя с Карлом и Джерри, а не с неврастениками, путешествующими по времени в романах Роберта Хайнлайна.

Что ж, дьявольский папин план сработал (хотя до конца я так и не забросил научную фантастику), и я подсел не только на Карла и Джерри, но и на проекты конструирования электронных устройств, представленные в каждом номере журнала. Я научился читать электрические схемы по журналу, редакторы которого пользовались такими же наглядными монтажными схемами, какие хорошо известны всем, кто заказывал электронный конструктор по почте. Я оборудовал мастерскую

---

[i] В англосаксонской традиции математика не относится к числу естественных наук (натурфилософии), а стоит особняком. – *Прим. перев.*

в гараже за домом и собрал там множество удивительных устройств, хотя некоторые из них не работали или работали не так, как задумывали их проектировщики.

Моим триумфом был «измеритель силы аплодисментов», которым пользовались судьи на ежегодном смотре школьных талантов. Он состоял из детектора динамиков, звукоусилителя и измерителя на 500 микроампер, подключенного к выходу усилителя. Но самое сильное впечатление на меня произвело не это устройство и не какое-то еще из собранных во время учебы в школе. А то, которым я в порыве юношеского энтузиазма, уступающего только полному незнанию теории, был очарован, не понимая, что это *невозможно* в принципе.

В апрельском номере *Popular Electronics* за 1955 год была помещена невероятная фотография настольной лампы, испускающей не конус света, а конус тьмы! При виде ее мои глаза буквально вылезли из орбит. «Что за чудная наука стоит за этим?» – потрясенно выдохнул я (метафорически, конечно, ибо где вы видели четырнадцатилетнего пацана, который так разговаривает, – разве что в каком-нибудь комедийном телесериале?). В сопроводительной статье пояснялось, что секрет в том, что лампа была включена не в обычную розетку, а в розетку с *контраполярной энергией*. А на другой фотографии паяльник, воткнутый в такую же контраполярную розетку, был покрыт льдом! А на третьей – лоток с замерзшим льдом на нагревательной плитке, только теперь не нагревательной, а морозильной, потому что была включена в контраполярную розетку. Я глядел на эти фотографии, пульс, как сейчас помню, был сумасшедшим, у меня даже на мгновение голова закружилась. Это было просто чудо.

Разумеется, это был просто розыгрыш, подкрепленный мастерским ретушированием фотографий. Когда я показал статью отцу, он взглянул на нее, а затем на меня – теперь я понимаю, что в его взгляде сквозила смесь жалости и веселья. Папа не был ни физиком, ни электротехником, но, имея степень доктора философии по химии, он, конечно, немного разбирался в технических вопросах, выходящих за рамки бензольных колец и молекулярных связей. Он сразу же заподозрил, что «контраполярная энергия» нарушает сразу семь фундаментальных физических законов. Но вместо того чтобы посмеяться надо мной, он просто сказал: «Сынок, погляди на дату на обложке». До того момента я не обратил внимания ни на то, что номер был апрельским, ни даже на подзаголовок «Посвящается первому апреля», но сразу понял, что это значит. Я до сих пор помню охвативший меня стыд из-за того, как меня одурачили. Даже я смог бы распознать мистификацию, если бы дочитал до примечания 4 в конце статьи. А там была фальшивая ссылка такого содержания: «Труды по контраполярности, найденные в летающей тарелке».

Как в любом хорошем розыгрыше, в тексте было немало правдоподобных, на первый взгляд, вещей, но представлены они были шутовски. Чтобы вы могли оценить тон статьи, приведу типичный пассаж: «Если приложить “контраполярную энергию” к обыкновенной настольной лампе, то свет не излучается, а убирается, и область, на которую распространяется действие лампы, становится темной (*Примечание редактора*: это явление не следует путать с “черным светом”, который называется так, потому что представляет собой просто свет без каких-либо видимых элементов. Для человеческого глаза “черный свет” неотличим от отсутствия света; свет, порождаемый контраполярной энергией, можно было бы назвать “отрицательным”, потому что он вычитается из уже присутствующего света.)».

Чтобы подготовить читателя к «объяснению» поразительных свойств контраполярной энергии, уже в следующем предложении приводится утверждение, которое теперь вызывает у меня смех, а тогда, в 1955 году, казалось совершенно логичным: «Одна из причин, по которым атомная энергия еще не стала обыденной у домашних экспериментаторов, состоит в том, что для понимания принципов ее производства нужна очень сложная математика». Но для высвобождения контраполярной энергии достаточно простой алгебры – так утверждалось в статье. Нужно лишь извлечь отрицательный квадратный корень (вместо положительного) при вычислении резонансной частоты схемы, содержащей емкость и индуктивность, – и все заработает. Идея отрицательной частоты интриговала меня (а электротехники действительно придают ей смысл в сочетании с $\sqrt{-1}$), но в тот раз редакторы пошли дальше и придумали отрицательное сопротивление.

Каждый, кто любит свернуться в теплой постели под электрическим одеялом или полакомиться хрустящим тостом за завтраком, знает, что резисторы (положительные резисторы) нагреваются, когда через них проходит ток. Стало быть, «очевидно», что отрицательный резистор должен охлаждаться при прохождении тока, отсюда и фотографии паяльника и лотка с кубиками льда. (Впрочем, логика, если это так можно назвать, стоящая за конусом тьмы, до сих пор от меня ускользает.) Кстати, отрицательное сопротивление действительно существует, и инженеры-электротехники давно знают, что оно возникает при некоторых условиях в электрической дуге. Такие дуги использовались, например, в доэлектронные времена для создания очень мощных радиопередатчиков, способных транслировать музыку и речь, а не только двоичные телеграфные сигналы, для которых было достаточно искровых передатчиков Герца и Маркони. Позже, в университете, я узнал, что понять принцип работы радио на глубоком теоретическом уровне невозможно без понимания $\sqrt{-1}$.

Все это настолько очаровывало мой юный ум, что и теперь, спустя сорок лет, и располагая несколько более обширным словарным запасом, я не могу выразить это словами. Мне открылось, что в мире электроники есть серьезные увлекательные идеи, куда более серьезные, чем я мог вообразить, паяя свои поделки в гараже. И позже, когда на уроках алгебры я познакомился с комплексными числами, возникающими при решении некоторых квадратных уравнений, я понимал (в отличие от моих по большей части озадаченных одноклассников), что это не просто бесплодная интеллектуальная игра. Я уже знал, что $\sqrt{-1}$ играет важную роль в электротехнике, позволяя инженерам создавать поистине удивительные устройства.

Через три года после прочтения статьи о контраполярной энергии я сидел в вагоне утреннего поезда, который увозил меня из Лос-Анджелеса на север в Пало-Альто, где в 1958 году я поступил в Стэнфордский университет. За годы присутствия в журнале *Popular Electronics* Карл и Джерри превратились из школьников в студентов факультета электротехники выдуманного университета Парву, и я, как и они, делал первые шаги на пути к карьере инженера-электротехника, с которого потом уже не сворачивал. В Стэнфорде у меня не было недостатка в литературе, поэтому с *Popular Electronics* пришлось расстаться, но этот журнал оказался со мной в нужное время; папин план сработал лучше, чем он мог надеяться. В каком-то смысле вся моя профессиональная жизнь стала результатом юношеского увлечения тайной $\sqrt{-1}$, потому-то я и написал эту книгу[1].

В письме (от 12 января 1852 года) своему английскому приятелю Огастесу де Моргану ирландский математик Уильям Роуэн Гамильтон писал: «Я думаю, что *или Вы, или я*, но надеюсь, что Вы, должны рано или поздно написать историю $\sqrt{-1}$». Через пять дней де Морган ответил: «Что касается истории $\sqrt{-1}$, то это будет нелегкий труд, начинать придется с индусов». Но ни Гамильтон, ни де Морган, ни, насколько мне известно, кто-либо иной эту историю так и не написал. И это еще одна причина, по которой я взялся за эту книгу. Я просто хотел узнать больше.

Единственное, о чем я сожалею, – что папа уже не сможет прочесть ее. Но если бы он был с нами, я уверен, он порадовался бы плодам, которые принесли его инвестиции полувековой давности в подписку на журнал.

Введение

В 1878 году два брата, Ахмед и Мухаммед Абд-эр-Расул, в недалеком будущем знаменитые воры, наткнулись на древнеегипетское захоронение в Долине царей в Дейр-эль-Бахри. Они быстро организовали прибыльный бизнес по продаже украденных реликвий, одной из которых был математический папирус. Один из братьев продал его русскому египтологу В. С. Голенищеву в 1893 году, а тот передал находку в Музей изящных искусств в Москве в 1912 году[1]. Там он оставался загадкой до полного перевода в 1930 году, когда научный мир узнал о том, насколько математически развиты были древние египтяне.

В частности, четырнадцатая задача в Московском математическом папирусе (ММП), как его теперь называют, представляет собой конкретный числовой пример того, как найти объем V усеченной квадратной пирамиды. Этот пример убедительно показывает, что древние египтяне знали формулу

$$V = \frac{1}{3}h(a^2 + ab + b^2),$$

где a и b – длины сторон нижнего и верхнего оснований соответственно, а h – высота. Один историк науки назвал это знание «дух захватывающим» и «шедевром египетской геометрии»[2]. Вывод этой формулы – простое упражнение для любого, кто изучал математический анализ на первом курсе, но гораздо менее очевидно, как могли ее открыть египтяне, не знавшие интегрального исчисления[3].

Несмотря на правильность, этот результат имеет один мелкий стилистический недостаток. Значения a и b – то, что современный инженер или физик назвал бы «наблюдаемыми», поскольку представляют собой длины, которые можно непосредственно определить, просто приложив рулетку к нижнему и верхнему краям усеченного конуса. Однако значение h не поддается прямому измерению, во всяком случае если пирамида сплошная. Конечно, его можно вычислить для любой пирамиды, используя знания геометрии и тригонометрии, но насколько проще было бы выразить объем усеченного контура не в терминах h, а с использованием длины бокового ребра c. Эту величину можно измерить непосредственно. В конечном итоге так и было сделано, но, насколько нам известно, не ранее первого века новой эры – великим математиком и инженером Героном Александрийским, которого обычно называют греком, хотя возможно, что на самом деле он был египтянином. Геометрическими средствами элементарно доказывается, что

$$h = \sqrt{c^2 - 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}.$$

А теперь давайте перенесемся в 1897 год и поговорим о выступлении Вустера Вудраффа Бемана (Wooster Woodruff Beman), профессора математики Мичиганского университета и известного специалиста по истории этого предмета, которое состоялось на собрании Американской ассоциации содействия развитию науки. Приведу цитату из этого выступления:

> Мы обнаруживаем, что квадратный корень из отрицательной величины впервые встречается в *Стереометрии* Герона Александрийского… Приведя правильную формулу для определения объема усеченной пирамиды с квадратным основанием и успешно применив ее к случаю, когда сторона нижнего основания равна 10, верхнего – 2, а ребро равно 9, автор пытается решить задачу в случае, когда сторона нижнего основания составляет 28, верхнего – 4, а ребро равно 15. Вместо квадратного корня из 81 – 144, требуемого по формуле, он берет квадратный корень из 144 – 81, то есть он заменяет $\sqrt{-1}$ на 1, не замечая, что поставленная задача не имеет решения. Не ясно, было ли это ошибкой Герона или невежеством какого-то переписчика[4].

То есть, полагая $a = 28$, $b = 4$ и $c = 15$ в своей формуле для h, Герон писал:

$$h = \sqrt{(15)^2 - 2\left(\frac{28-4}{2}\right)^2} = \sqrt{225 - 2(12)^2} =$$
$$= \sqrt{225 - 144 - 144} = \sqrt{81 - 144}.$$

Следующим, блистательным, шагом нужно было бы, конечно, написать $h = \sqrt{-63}$, но в *Стереометрии* мы видим $h = \sqrt{63}$, так что Герон упустил возможность стать первым известным ученым, который ввел квадратный корень из отрицательного числа в ходе математического анализа физической задачи. Если Герон и вправду напутал в арифметике, то дорого заплатил за эту ошибку утраченной славой. Пройдет еще тысяча лет, прежде чем математик потрудится обратить внимание на такую вещь – а затем просто отклонит ее как очевидную чепуху, – и еще пятьсот лет, прежде чем квадратный корень из отрицательного числа воспримут всерьез (хотя он все еще будет считаться загадкой).

Если Герон почти наверняка знал о появлении квадратного корня из отрицательного числа в задаче об усеченной пирамиде, то его последователь, александриец Диофант, два столетия спустя, похоже, совершенно проигнорировал подобное явление, случайно наткнувшись на него. Сегодня Диофант почитается за то, что сыграл в алгебре ту же роль, что Евклид в геометрии. Евклид дал нам свои *Начала*, а Диофант подарил потомкам *Арифметику*. Содержащаяся в обеих книгах информация почти наверняка была результатом труда многих неизвестных предшественников, личности которых навсегда утрачены. Однако Евклид и Диофант в своих великих трудах собрали и представили это математическое наследие в связной форме.

На мой взгляд, работа Евклида ценнее, потому что *Начала* – это логическая *теория* геометрии на плоскости. С другой стороны, *Арифметика*, или, по крайней мере, те несколько глав или книг, которые сохранились из первоначальных тринадцати, – это собрание конкретных численных решений определенных задач, без обобщенной, теоретической проработки методов. Каждая задача в *Арифметике* уникальна сама по себе, подобно задачам из Московского математического папируса. Но это не значит, что приведенные решения не изобретательны, во многих случаях они даже дьявольски хитроумны. *Арифметика* по-прежнему является раздольем для современного учителя алгебры в средней школе, который думает, какие бы задачи предложить самым способным ученикам[5].

Например, в книге 6 мы находим следующую задачу (номер 22): задан прямоугольный треугольник с площадью 7 и периметром 12, найти его стороны. Вот как Диофант вывел квадратное уравнение $172x = 336x^2 + 24$ из постановки задачи. Если стороны прямоугольного треугольника обозначить P_1 и P_2, то задача, представленная Диофантом, эквивалентна системе уравнений:

$$P_1 P_2 = 14,$$
$$P_1 + P_2 + \sqrt{P_1^2 + P_2^2} = 12.$$

Ее можно решить с помощью стандартных, хотя и довольно пространных, алгебраических выкладок, но блестящая идея Диофанта состояла в том, чтобы сразу же уменьшить количество переменных с двух до одной, написав:

$$P_1 = \frac{1}{x} \quad \text{и} \quad P_2 = 14x.$$

Тогда первое уравнение сводится к тождеству $14 = 14$, а второе преобразуется к виду

$$\frac{1}{x} + 14x + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 196x^2} = 12,$$

после чего уже легко получается вышеупомянутое уравнение:

$$172x = 336x^2 + 24.$$

Предлагаю полезное упражнение – решите исходную систему относительно P_1 и P_2 и покажите, что получаются такие же результаты, как у Диофанта.

Диофант записал это уравнение в таком виде, потому что все коэффициенты в нем положительны, а древние отвергали отрицательные числа как лишенные смысла, поскольку не могли дать физическую интерпретацию числу, которое «меньше, чем ничто». В самом деле, в другом месте *Арифметики* (задача 2 в книге 5) он писал, что уравнение $4x + 20 = 4$ является «абсурдным», потому что приводит к «невозможному» решению $x = -4$. В соответствии с этой позицией при решении квадратного уравнения Диофант оставлял только положительный корень. Даже в XVI веке математики называли отрицательные корни уравнения *фиктивными*, *абсурдными* или *ложными*.

Поэтому, конечно, квадратный корень из отрицательного числа выходил за всякие границы. Именно французскому математику Рене Декарту мы обязаны термином *мнимые* для таких чисел, о которых он написал спустя четырнадцать столетий в книге *Геометрия* (1637), – я подробно рассмотрю ее в главе 2. До введения Декартом этого термина квадратные корни из отрицательных чисел называли *бессмысленными*, или *неуловимыми*. Именно к такому явлению приводит квадратное уравнение Диофанта в задаче о треугольнике, поскольку формула корней квадратного уравнения дает:

$$x = \frac{43 \pm \sqrt{-167}}{168}.$$

Но Диофант такого не писал. Он просто указал, что это квадратное уравнение невозможно, подразумевая под этим, что уравнение не имеет разумного решения, т. к. «половина коэффициента при x, умноженная на себя, минус произведение коэффициента при x^2 и свободного члена» должна составлять квадрат, тогда как

$$\left(\frac{172}{2}\right)^2 - (336)(24) = -668$$

квадратом, безусловно, не является. Что же касается квадратного корня из этого отрицательного числа, то Диофанту вообще было нечего сказать.

Шестьсот лет спустя (около 850 г. н. э.) индийский математик Махавирачарья тоже затрагивал этот вопрос, но лишь для того, чтобы объявить о том, что Герон и Диофант знали задолго до этого: «Квадрат как положительного, так и отрицательного (количества) положителен; и квадратные корни из них (квадратных величин) являются положительными и отрицательными в таком порядке. Поскольку в природе вещей отрицательное (количество) не является квадратным (количеством), *то оно не имеет квадратного корня* [курсив мой]»[6]. Пройдет еще шесть веков, прежде чем мнение изменится.

В начале блестящей научно-популярной книги Георгия Гамова «Раз, два, три… бесконечность» приводится следующий лимерик, дающий представление о том, что будет дальше, и о чувстве юмора автора[i]:

Однажды некто беспечный
Взял $\sqrt{\infty}$,
Но цифр уж слишком,
И, раскинув умишком,
Он бросил науку и теперь пребывает в вечности.

Эта книга не о поистине монументальной задаче извлечения квадратного корня из бесконечности, а скорее о другой задаче, которую многие блестящие математики прошлого (включая, конечно, Герона и Диофанта) считали еще более абсурдной, – о придании смысла квадратному корню из минус единицы.

---

[i] There was a young fellow from Trinity
Who took $\sqrt{\infty}$.
But the number of digits
Gave him the fidgets;
He dropped Math and took up Divinity.

ГЛАВА 1

Загадки мнимых чисел

1.1. Кубическое уравнение

В конце вышедшей в 1494 году книги «Сумма арифметики, геометрии, пропорции и пропорциональности» (*Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita*), где обобщаются все знания того времени об арифметике, алгебре (включая квадратные уравнения) и тригонометрии, францисканский монах Лука Пачоли (приблизительно 1445–1514) сделал смелое утверждение. Он объявил, что решение кубического уравнения «при современном состоянии науки так же невозможно, как и квадратура круга». Задача о квадратуре круга стояла в математике со времен греческого математика Гиппократа, жившего около 440 г. до н. э. Квадратура круга, т. е. построение квадрата, равного по площади кругу, только с помощью линейки и циркуля, оказалась трудной и во времена Пачоли все еще оставалась нерешенной. Ясно, что он привел ее в пример просто как меру сложности решения кубического уравнения, но на самом деле сложность задачи квадратуры круга *максимальна*, поскольку в 1882 году было показано, что сделать это вообще невозможно.

Однако Пачоли ошибся, потому что уже через десять лет математик из Болонского университета Сципион дель Ферро (1465–1526) решил так называемое *неполное кубическое уравнение*, частный случай общего кубического уравнения, в котором отсутствует член второй степени. Поскольку его решение сыграло важнейшую роль в понимании квадратного корня из минус единицы, стоит приложить некоторые усилия, чтобы понять, что именно сделал дель Ферро.

Общее кубическое уравнение содержит все степени неизвестного, т. е.

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0,$$

где без ограничения общности можно считать, что коэффициент при старшем члене равен единице. Если это не так, то просто поделим уравнение на этот коэффициент, что всегда возможно, поскольку он не равен нулю, – иначе уравнение не было бы кубическим.

Уравнение же, решенное дель Ферро, имеет вид

$$x^3 + px = q,$$

где p и q неотрицательны. Как и Диофант, математики XVI века, в т. ч. дель Ферро, избегали появления отрицательных коэффициентов в уравнениях[1]. Может показаться, что решения этого уравнения недостаточно для решения кубического уравнения в общем виде, но дель Ферро придумал еще один остроумный прием, продемонстрировав общность своего подхода. Дель Ферро пришла в голову мысль записать решение неполного кубического уравнения в виде суммы двух слагаемых: $x = u + v$. Подставляя эту сумму в уравнение, мы после приведения подобных членов получаем:

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) = q.$$

Это довольно сложное уравнение можно переписать в виде двух более простых:

$$3uv + p = 0$$

и

$$u^3 + v^3 = q.$$

Как дель Ферро додумался до этого? Польско-американский математик Марк Кац (1914–1884) ответил на этот вопрос, сформулировав ставший знаменитым тезис о различии между обычным и непостижимым гением: «Обычным гением, в общем-то, мог бы стать каждый из нас, будь в сто раз способнее. В том, как работает их ум, нет ничего загадочного. Стоит понять, как они пришли к своим открытиям, и мы начинаем думать, что тоже могли бы сделать это. С непостижимыми гениями все иначе… нам ни при каких условиях и обстоятельствах не дано постичь, как работает их ум. Даже поняв, что они сделали, сам процесс, с помощью которого это было сделано, остается совершенно непонятным». Идея дель Ферро была из разряда непостижимых.

Решив первое уравнение относительно v и подставив во второе уравнение, получим

$$u^6 - qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0.$$

На первый взгляд это уравнение шестой степени может выглядеть как огромный шаг назад, но на самом деле это не так. Уравнение действительно шестой степени, но оно также квадратное относительно u^3. Воспользовавшись формулой решения квадратного уравнения, хорошо известной со времен Вавилона, имеем

$$u^3 = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

или, оставляя только положительный корень[2]:

$$u = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Теперь, поскольку $v^3 = q - u^3$, то

$$v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Поэтому решение неполного кубического уравнения $x^3 + px = q$ выглядит таким вот устрашающим образом:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

А поскольку $\sqrt[3]{-1} = -1$, то, вынеся -1 из-под внешнего радикала во втором члене, можем получить эквивалентное выражение:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

В разных книгах встречаются обе формы, но нет никаких оснований предпочесть одну другой.

Поскольку дель Ферро рассматривал только положительные p и q, очевидно, что оба этих (эквивалентных) представления x всегда дают вещественный результат. На самом деле, хотя у любого кубического уравнения существует три решения или *корня* (см. приложение А), нетрудно показать, что у кубического уравнения дель Ферро имеется ровно один вещественный положительный корень и, следовательно, два комплексных корня (см. врезку 1.1).

Врезка 1.1

ЕДИНСТВЕННОЕ ВЕЩЕСТВЕННОЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ КУБИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДЕЛЬ ФЕРРО

Чтобы убедиться, что существует ровно один вещественный положительный корень неполного кубического уравнения $x^3 + px = q$, где p и q неотрицательны, рассмотрим функцию

$$f(x) = x^3 + px - q.$$

Задача дель Ферро состоит в том, чтобы найти корни уравнения $f(x) = 0$. Если вычислить производную $f(x)$ [обозначается $f'(x)$] и вспомнить, что производная – это наклон кривой $f(x)$, то получим

$$f'(x) = 3x^2 + p,$$

а это выражение всегда неотрицательно, потому что x^2 неотрицательно и, как мы предполагаем, p также неотрицательно. То есть $f(x)$ всюду имеет неотрицательный наклон и поэтому никогда не уменьшается с увеличением x. Так как $f(0) = -q$, а эта величина никогда не бывает положительной (поскольку, по предположению, q неотрицательно), то график функции $f(x)$ должен выглядеть, как показано на рис. 1.1. По рисунку видно, что кривая пересекает ось x только один раз, и, значит, вещественный корень только один. При этом пересечение устроено так, что этот корень никогда не бывает отрицательным (он равен нулю, только если $q = 0$).

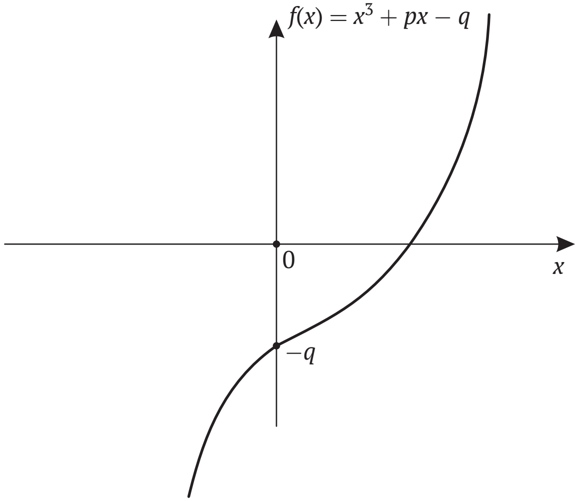

Рис. 1.1. График $f(x) = x^3 + px - q$ при p и $q \geq 0$

Прежде чем продолжить тему кубических уравнений, я хотел бы поговорить о природе комплексных чисел. *Комплексное* число не является ни чисто вещественным, ни чисто мнимым, а представляет собой их комбинацию. То есть если a и b чисто вещественные, то комплексное число имеет вид $a + b\sqrt{-1}$. Математики и почти все остальные пользуются формой $a + ib$ (великий математик швейцарского происхождения XVIII века Леонард Эйлер, о котором мы будем много говорить в главе 6, ввел символ i вместо $\sqrt{-1}$ в 1777 году). Инженеры-электротехники записывают комплексные числа в виде $a + jb$, потому что $\sqrt{-1}$ часто возникает в задачах, где речь идет об электрических токах, а символом i традиционно обозначают силу тока. Однако, вопреки распространенному мифу, могу заверить вас, что большинство инженеров-электротехников *не* тушуются, видя уравнение, в котором для обозначения $\sqrt{-1}$ используется буква i, а не j. Тем не менее в главе 5 я тоже буду использовать j вместо i, представляя занятную электрическую головоломку XIX века.

Комплексные числа подчиняются многим очевидным правилам, например $(a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd = ac - bd + i(ad + bc)$. Но будьте осторожны. Например, если a и b положительны, то $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$. Но если допустить и отрицательные числа, то это правило перестает выполняться, например $\sqrt{(-4)(-9)} = \sqrt{36} = 6 \neq \sqrt{-4}\sqrt{-9}9 = (2i)(3i) = 6i^2 = -6$. Эйлер был озадачен этим моментом в своем трактате *Алгебра*, вышедшем в 1770 году.

И последнее, очень важное замечание о сравнении вещественных и комплексных чисел. Комплексные числа не упорядочены как вещественные. *Упорядочение* означает, что имеют смысл выражения вида $x > 0$ или $x < 0$. В самом деле, если x и y вещественные и если $x > 0$ и $y > 0$, то произведение $xy > 0$. Но, попытавшись навязать такое поведение комплексным числам, мы попадем впросак. Проще всего убедиться в этом, приведя контрпример. Предположим, что комплексные числа можно упорядочить. Тогда, в частности, должно быть либо $i > 0$, либо $i < 0$. Предположим, что $i > 0$. Тогда $-1 = i \cdot i > 0$, что, очевидно, неверно. Таким образом, мы должны предположить, что $i < 0$. Но если умножить обе части этого неравенства на -1 (изменив одновременно знак неравенства), то получим $-i > 0$. Тогда $-1 = (-i)(-i) > 0$, что опять-таки неверно. Стало быть, исходное предположение об упорядоченности множества комплексных чисел приводит к противоречию, и, следовательно, оно неверно. Теперь вернемся к кубическим уравнениям.

Имея вещественный корень кубического уравнения дель Ферро, найти два комплексных корня уже не составляет труда. Обозначим r_1 вещественный корень уравнения дель Ферро. Тогда кубический многочлен можно разложить на множители

$$(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) = 0 = (x - r_1)[x^2 - x(r_2 + r_3) + r_2r_3].$$

Чтобы найти два других корня, r_2 и r_3, применим формулу корней квадратного уравнения к уравнению

$$x^2 - x(r_2 + r_3) + r_2r_3 = 0.$$

Например, рассмотрим уравнение $x^3 + 6x = 20$, в котором $p = 6$ и $q = 20$. Подстановка этих значений во второй вариант формулы дель Ферро дает:

$$x = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} - \sqrt[3]{-10 + \sqrt{108}}.$$

Внимательно взглянув на исходное кубическое уравнение, вы, возможно, заметите, что $x = 2$ является его корнем ($8 + 12 = 20$). Так, может быть, это громоздкое выражение с радикалами на самом деле равно 2? Да, так и есть. Вычисление с помощью ручного калькулятора показывает, что

$$x = \sqrt[3]{20.392305} - \sqrt[3]{0.392305} = 2.7320508 - 0.7320508 = 2.$$

Итак, чтобы найти два других корня уравнения $f(x) = 0 = x^3 + 6x - 20$, воспользуемся тем фактом, что одним из корней $f(x)$ является $(x - 2)$. Тогда, выполнив деление многочленов, получаем:

$$(x - 2)(x^2 + 2x + 10) = x^3 + 6x - 20.$$

По формуле корней квадратного уравнения находим два комплексных корня (решения исходного кубического уравнения):

$$r_2 = -1 + 3\sqrt{-1}$$

и

$$r_3 = -1 - 3\sqrt{-1}.$$

1.2. Отрицательное отношение к отрицательным числам

Но мы забегаем вперед. В действительности дель Ферро и его коллеги-математики вовсе не занимались разложением многочленов на множители для получения комплексных корней, им нужно было только найти единственное вещественное положительное решение кубического уравнения. И до тех пор, пока математики интересовались оригинальным неполным кубическим уравнением дель Ферро, дело ограничивалось единственным вещественным корнем, и все были довольны. Но как быть с уравнением $x^3 - 6x = 20$, в котором $p = -6 < 0$? Конечно, сам дель Ферро никогда не записал бы уравнение с отрицательным коэффициентом, а предпочел бы форму $x^3 = 6x + 20$ и счел бы это совершенно новой задачей. То есть он начал бы решать новое уравнение

$$x^3 = px + q,$$

в котором p и q неотрицательны. Однако это совершенно излишне, поскольку нигде в решении уравнения $x^3 + px = q$ неотрицательность p и q не используется. А значит, это предположение несущественно и было сделано просто из-за беспричинного неприятия отрицательных чисел математиками того времени.

Сегодня это подозрительное отношение к отрицательным числам кажется ученым и инженерам странным просто потому, что они привыкли к ним и забыли о смятении, пережитом в школьные годы. Но, по чести говоря, умные взрослые люди с нетехническим складом ума по-прежнему испытывают это смятение, как явствует из следующего чудного куплета, который часто приписывают поэту В. Х. Одену (W. H. Auden):

Минус на минус плюс нам дает,
А почему, только черт разберет[i].

Например, великий английский математик Джон Валлис (1616–1703), с которым мы ближе познакомимся в следующей главе как с человеком, который сделал первую рациональную попытку придать физический смысл величине $\sqrt{-1}$, также высказал несколько поразительных утверждений относительно отрицательных чисел. В своей оказавшей большое влияние на современников книге «Арифметика бесконечного» (*Arithmetica Infinitorum*, 1665), которую с немалым интересом читал молодой Исаак Ньютон, Валлис привел следующий аргумент. Поскольку $a/0$ при $a > 0$ является положительной бесконечностью и поскольку a/b при $b < 0$ является отрицательным числом, то это отрицательное число должно быть *больше* положительной бесконечности, потому что знаменатель во втором случае меньше знаменателя в первом случае (т. е. $b < 0$). Поэтому Валлис пришел к удивительному выводу о том, что отрицательное число одновременно и меньше нуля, и больше положительной бесконечности, и кто же сможет поставить ему в вину настороженное отношение к отрицательным числам? И понятное дело, он был не одинок. Даже сам великий Эйлер считал оза-

[i] Minus times minus is plus.
The reason for this we need not discuss.

боченность Одена заслуживающей достаточного внимания, чтобы включить несколько сомнительное «объяснение» того, почему «минус на минус дает плюс», в свой знаменитый трактат *Алгебра* (1770).

Сегодня мы стали смелее. Теперь мы просто говорим: хорошо, p отрицательно (ну и что?), и переходим прямо к оригинальной формуле дель Ферро. То есть, заменяя отрицательное p на $-p$ (где теперь само p неотрицательно), мы имеем решение

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$$

уравнения $x^3 = px + q$, где p и q оба неотрицательны. В частности, эта формула говорит нам, что

$$x = \sqrt[3]{10 + \sqrt{92}} - \sqrt[3]{-10 + \sqrt{92}} = 3.4377073$$

является решением уравнения $x^3 = 6x + 20$, и это легко проверить при помощи ручного калькулятора.

1.3. Опрометчивый вызов

Дальше история кубического уравнения движется тернистым, извилистым путем. По сложившейся в те времена традиции, дель Ферро держал свое решение в секрете. Он сделал это, потому что, в отличие от современных математиков, которые зарабатывают на жизнь публикацией своих результатов, чтобы получить первое назначение на должность ассистента, а затем продвижение по службе и пожизненную должность, дель Ферро и его коллеги были больше похожи на самозанятых предпринимателей. Они зарабатывали на жизнь, вызывая друг друга на публичные конкурсы по решению задач, где победитель получал все – призовые деньги, может быть, «славу», а если повезет, то и поддержку восхищенного и богатого покровителя. Очевидно, что шансы на победу в таких состязаниях повышались благодаря знанию того, как решать задачи, которые другие решать не умели, поэтому секретность была в порядке вещей.

На самом деле дель Ферро почти унес в могилу секрет того, как решать неполные кубические уравнения, рассказав об этом лишь узкому кругу близких друзей. Умирая, он поведал об этом еще и своему ученику, Антонио Марии Фиору. Хотя Фиор был не особенно хорошим математиком, такое знание было грозным оружием, и поэтому в 1535 году он бросил вызов гораздо более известному и бесконечно более способному математику Никколо Фонтане (1500–1577). Фонтана привлек внимание Фиора тем, что недавно объявил, будто умеет решать кубические уравнения вида $x^3 + px^2 = q$. Фиор думал, что Фонтана блефует и на самом деле не знает решения, поэтому видел в нем идеальную жертву, созревшую для участия в публичном конкурсе.

Фонтана, сегодня больше известный под именем Тарталья («заика», из-за нарушения речи, вызванного ужасной раной от меча в челюсть, которую он получил от французского солдата в возрасте двенадцати лет), подозревал, что Фиор получил секрет неполного кубического уравнения от дель Ферро. Опасаясь, что кубические уравнения, с которыми ему придется столкнуться, будут именно такими, и не зная, как их решить, Тарталья бросил все силы на поиск решения, и незадолго до дня соревнований ему удалось заново открыть решение уравнения $x^3 + px = q$, найденное дель Ферро. Это интересный пример того, что как только становится *известно*, что у задачи есть решение, другие быстро находят его. Я полагаю, что это явление как-то связано со спортивными рекордами; например, не прошло и нескольких месяцев с того дня, как Роджер Баннистер преодолел милю за четыре минуты, как это стали делать все хорошие бегуны. Так или иначе, открытие Тартальи в сочетании с его умением решать уравнение $x^3 + px^2 = q$ (он не блефовал) позволило ему наголову разбить Фиора. Каждый предложил другому тридцать задач, но Фиор не смог решить ни одной из задач Тартальи, а Тарталья решил все задачи Фиора.

1.4. Секрет распространяется

Все это выглядит довольно диковинно, но дальше история становится еще интереснее. Как и дель Ферро, Тарталья держал недавно полученные знания при себе как по причинам, о которых я упоминал выше, так и потому, что планировал опубликовать решения кубических уравнений обоих типов в книге, которую планировал когда-нибудь написать (но так и не написал). Однако когда новость о разгроме Фиоры распространилась, она быстро достигла ушей Джироламо Кардано (1501–1576), известного просто как Кардан. В отличие от Фиора, Кардан был выдающимся интеллектуалом, который, помимо других многочисленных талантов, был чрезвычайно хорошим математиком[3]. Интеллектуальное любопытство Кардана разгорелось от осознания того, что Тарталья знает секрет неполного кубического уравнения, и он умолял Тарталью раскрыть его. После первоначального отказа Тарталья в конце концов уступил и рассказал Кардану правило вычисления решений, но не его вывод, – и то лишь после получения клятвы держать все в секрете.

Кардан не был святым, но и негодяем он тоже не был. Он почти наверняка намеревался исполнить обет молчания, но потом до него дошло, что Тарталья не первый, кто решил эту задачу. И увидев уцелевшие бумаги дель Ферро, Кардан больше не чувствовал себя обязанным хранить молчание. Кардан заново открыл решение Тартальи и в 1545 году опубликовал его в своей книге *Ars Magna* (*Великое искусство* алгебры, в отличие от меньшего искусства арифметики). В этой книге он отдает должное Тарталье и дель Ферро, но все же Тарталья чувствовал себя обиженным и осыпал Кардана обвинениями в плагиате и еще того хуже[4]. Эту часть истории я не стану здесь развивать, поскольку она не имеет ничего общего с $\sqrt{-1}$, но отмечу, что страх Тартальи лишиться славы оказался не беспочвенным. Несмотря на то что он и дель Ферро, безусловно, имеют приоритет, будучи истинными, независимыми первооткрывателями решения неполного кубического уравнения, после выхода *Ars Magna* оно стало известно как «формула Кардана».

Кардан не был интеллектуальным вором (плагиаторы не дают ссылок на достижения предшественников), и именно он показал, как обобщить решение неполного кубического уравнения на все кубические уравнения. Это само по себе было крупным достижением, и оно целиком принадлежит Кардану. Идея столь же неожиданная, как и первоначальный прорыв дель Ферро. Кардан начал с общего кубического уравнения

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0,$$

а затем сделал замену переменной $x = y - (1/3)a_1$. После подстановки в исходное уравнение, раскрытия скобок и приведения подобных членов получаем

$$y^3 + \left(a_2 - \frac{1}{3}a_1^2\right)y = -\frac{2}{27}a_1^3 + \frac{1}{3}a_2a_1 - a_3,$$

т. е. неполное кубическое уравнение $y^3 + py = q$, где

$$p = a_2 - \frac{1}{3}a_1^2,$$
$$q = -\frac{2}{27}a_1^3 + \frac{1}{3}a_2a_1 - a_3.$$

Полученное уравнение теперь можно решить с помощью формулы Кардана. Например, если в уравнении $x^3 - 15x^2 + 81x - 175 = 0$ сделать кардановскую замену переменной $x = y + 5$, то получим

$$p = 81 - \frac{1}{3}(15)^2 = 6,$$
$$q = -\frac{2}{27}(-15)^3 + \frac{1}{3}(81)(-15) - (-175) = 20$$

и, стало быть, $y^3 + 6y = 20$. Это уравнение было решено выше в этой главе, его корень $y = 2$. Следовательно, решением исходного кубического уравнения является $x = 7$, что можно проверить простой подстановкой.

Похоже, задача о нахождении корней кубического уравнения наконец-то решена, и можно успокоиться. Однако это не так, и Кардан знал про это. Напомним решение уравнения $x^3 + px = q$:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}.$$

В этой версии формулы Кардана водятся драконы! Если $q^2/4 - p^3/27 < 0$, то в формуле появляется квадратный корень из отрицательного числа, но великой загадкой было не само мнимое число, а нечто совсем другое. То, что Кардан не боялся мнимостей, совершенно ясно из известной задачи, которую он ставит в *Ars Magna*: разделить десять на две части, произведение которых равно сорока. Он называет эту задачу «явно невыполнимой», потому что она приводит к квадратному уравнению $x^2 - 10x + 40 = 0$, где x и $10 - x$ – те самые две части. Это уравнение с комплексными корнями ($5 + \sqrt{-15}$ и $5 - \sqrt{-15}$), которое Кардан назвал *софистическим*, потому что не видел в них никакого физического смысла. Их сумма, очевидно, равна десяти, потому что мнимые части взаимно уничтожаются, но как же быть с произведением? Кардан смело написал «тем не менее мы будем действовать» и формально вычислил

$$(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15}) = (5)(5) - (5)(\sqrt{-15}) + (5)(\sqrt{-15}) \\ - (\sqrt{-15})(\sqrt{-15}) = 25 + 15 = 40.$$

О своем вычислении Кардан писал: «Если оставить в стороне умственные терзания», сопряженные с этим действием, т. е. обращением с $\sqrt{-15}$ как с любым другим числом, то все отлично работает. Но хотя он не боялся этих чисел, из следующих слов ясно, что он относился к ним с некоторой подозрительностью: «Вот так мы идем по пути арифметической изощренности, конец которого, как было сказано, столь же изящный, сколь и бесполезный». Но вот что *действительно* беспокоило Кардана, так это возникновение таких квадратных корней из отрицательных чисел в формуле Кардана для кубических уравнений, заведомо имеющих только вещественные решения.

1.5. Как комплексные числа могут представлять вещественные решения

Чтобы понять, о чем речь, рассмотрим задачу, которой занимался последователь Кардана итальянский инженер и архитектор Рафаэль Бомбелли (1526–1572). Среди современников Бомбелли слыл практическим человеком, умевшим осушать болота, но сегодня он известен как специалист по алгебре, объяснивший, в чем истинный смысл формулы Кардана. В своей книге *Алгебра*, вышедшей в 1572 году, Бомбелли описывает кубическое уравнение $x^3 = 15x + 4$. Легко видеть, что его решением является $x = 4$. Затем с помощью деления многочленов мы находим два других решения: $x = -2 \pm \sqrt{3}$. Таким образом, *все* три решения вещественные. Однако посмотрим, что дает формула Кардана при $p = 15$ и $q = 4$. Поскольку $q^2/4 = 4$ и $p^3/27 = 125$, имеем

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} - \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-121}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Решение, найденное по формуле Кардана, представляет собой сумму кубических корней из двух комплексно-сопряженных чисел (если вы не знаете, что это такое, обратитесь к приложению А), и на первый взгляд кажется, что ничего более «комплексного» и быть не может, так? Не так. Кардан этого не понял; не скрывая разочарования, он назвал кубические уравнения, для которых получался такой странный результат, «неприводимыми» и больше к этому вопросу не возвращался. Но прежде чем двигаться дальше, будет поучительно узнать, почему он использовал термин «неприводимые».

Кардан совершенно не мог понять, как вычислить кубический корень из комплексного числа. Чтобы разобраться в порочном круге, возникшем в алгебре из-за этого недоразумения, рассмотрим кубическое уравнение Бомбелли. Любой корень, который дает формула Кардана, можно в самом общем случае записать как комплексное число. Например, положим

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = u + \sqrt{-v}.$$

Мы хотим найти u и v (где $v > 0$). Возведем обе части в куб:

$$2 + \sqrt{-121} = u^3 + 3u^2\sqrt{-v} - 3uv - v\sqrt{-v}.$$

Приравнивая вещественные и мнимые части по обе стороны от знака равенства, получаем:

$$u^3 - 3uv = 2,$$
$$3u^2\sqrt{-v} - v\sqrt{-v} = \sqrt{-121}.$$

Возведение в квадрат дает еще два равенства:

$$u^6 - 6u^4v + 9u^2v^2 = 4,$$
$$-9u^4v + 6u^2v^2 - v^3 = -121.$$

А вычитая второе из первого, получаем:

$$u^6 + 3u^4v + 3u^2v^2 + v^3 = 125.$$

В обеих частях находятся полные кубы, и после извлечения кубического корня получаем: $u^2 + v = 5$, или $v = 5 - u^2$. Подставив это обратно в уравнение $u^3 - 3uv = 2$, получим $4u^3 = 15u + 2$, т. е. еще одно кубическое уравнение с одной переменной. А разделив обе части на 4, мы приведем его к виду $u^3 = pu + q$, где $p = 15/4$, $q = 1/2$. Теперь, воспользовавшись формулой в конце разделе 1.2, получаем:

$$\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} = \frac{1}{16} - \frac{3375}{(27)(64)}.$$

Очевидно, что это число отрицательно.

Стало быть, кубическое уравнение $4u^3 = 15u + 2$ неприводимое, и попытка «решить» его по формуле Кардана выливается в необходимость вычислять кубические корни из комплексных чисел. Итак, мы пришли к тому, с чего начали. Налицо порочный круг. Неудивительно, что Кардан назвал эту ситуацию «неприводимой». В главе 3 мы узнаем, как математики в конце концов научились извлекать корень *любой* степени из комплексного числа.

Гениальное озарение Бомбелли заключалось в том, что диковинное выражение, возникающее в формуле Кардана для x, – на самом деле вещественное число, только записанное очень непривычным образом (геометрическая интерпретация неприводимых кубических уравнений описана во врезке 1.2). Это озарение далось нелегко. Вот что писал Бомбелли в своей *Алгебре*: «По мнению многих, это была нелепая мысль, я и сам долгое время так считал. Казалось, что в основе рассуждения лежит какой-то софизм, а не истина. Я долго бился над этим, но все же доказал свою правоту». И вот как он это сделал. Он начал с наблюдения, что если решение по формуле Кардана на самом деле вещественное, то числа $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ и $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ должны быть комплексно-сопряженными[5], т. е.

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + b\sqrt{-1},$$
$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = a - b\sqrt{-1},$$

где a и b – пока еще неизвестные вещественные числа. Но тогда $x = 2a$, т. е. несомненно вещественное число. Первое из двух приведенных выше равенств говорит, что

$$2 + \sqrt{-121} = (a + b\sqrt{-1})^3.$$

Врезка 1.2

В НЕПРИВОДИМОМ СЛУЧАЕ ИМЕЕТСЯ ТРИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ КОРНЯ

Для изучения природы корней уравнения $x^3 = px + q$, где p и q неотрицательны, рассмотрим функцию

$$f(x) = x^3 - px - q.$$

Вычислив производную $f'(x) = 3x^2 - p$, мы увидим, что касательные к графику $f(x)$ имеют нулевой угол наклона в точках $x = \pm\sqrt{p/3}$, т. е. локальные экстремумы графика неполной кубической функции, для которой возможен неприводимый случай, расположены симметрично относительно вертикальной оси. Значения M_1 и M_2 функции $f(x)$ в этих локальных экстремумах равны

$$M_1 = \frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}} - p\sqrt{\frac{p}{3}} - q = -\frac{2}{3}p\sqrt{\frac{p}{3}} - q \quad \text{при} \quad x = +\sqrt{\frac{p}{3}},$$
$$M_2 = -\frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}} + p\sqrt{\frac{p}{3}} - q = \frac{2}{3}p\sqrt{\frac{p}{3}} - q \quad \text{при} \quad x = -\sqrt{\frac{p}{3}}.$$

Заметим, что локальный минимум M_1 всегда меньше 0 (поскольку p и q, по предположению, неотрицательны), тогда как знак локального максимума M_2 может быть любым и зависит от величин p и q. Если уравнение имеет три вещественных корня, то $f(x)$ должна пересекать ось x в трех точках, а такое может быть, только если $M_2 > 0$, как показано на рис. 1.2. Следовательно, условие вещественности всех трех корней имеет вид $2/3\sqrt{p/3} - q > 0$, или $4/27p^3 > q^2$, или, наконец, $q^2/4 - p^3/27 < 0$. Но это и есть условие, при котором в формуле Кардано возникают мнимые числа. То есть неприводимость всегда означает, что кубическое уравнение $f(x) = 0$ имеет три вещественных корня. Из рисунка также следует, что два из этих корней отрицательны, а один положителен. Попробуйте доказать, что сумма все трех корней обязательно равна нулю*.

* Это частный случай следующего общего утверждения. Пусть имеется уравнение n-й степени $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$. Если обозначить n его корней $r_1, r_2, \ldots, r_n$, то уравнение можно записать в виде $(x - r_1)(x - r_2) \ldots (x - r_n) = 0$. Если раскрыть скобки, начиная с левого сомножителя, то легко видеть, что коэффициент при x^{n-1} равен сумме корней со знаком минус, т. е. $a_{n-1} = -(r_1 + r_2 + \ldots + r_n)$. В случае неполного кубического уравнения член x^2 отсутствует, поэтому $a_2 = 0$ по определению, а значит, сумма корней любого неполного кубического уравнения равна нулю.

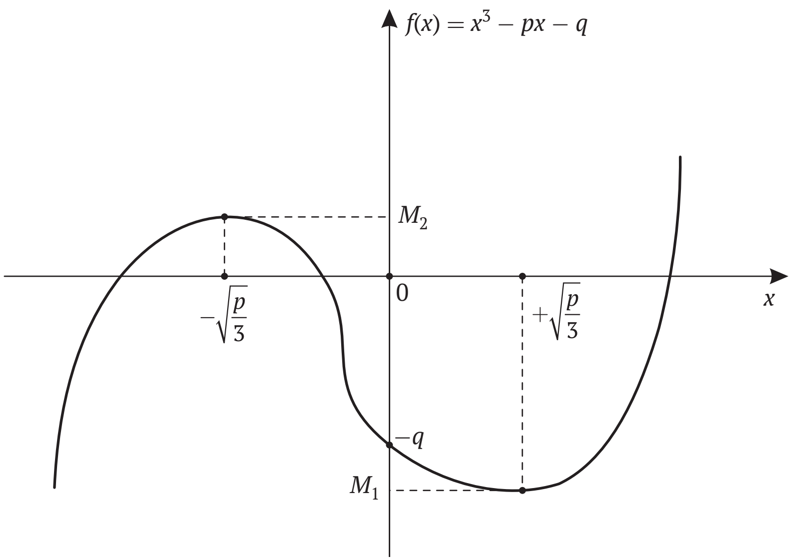

Рис. 1.2. График функции $f(x) = x^3 - px - q$, где p и $q \geq 0$

Подставляя в тождество $(m + n)^3 = m^3 + n^3 + 3mn(m + n)$ значения $m = a$ и $n = b\sqrt{-1}$, получаем:

$$\begin{aligned}(a + b\sqrt{-1})^3 &= a^3 - b^3\sqrt{-1} + 3ab\sqrt{-1}(a + b\sqrt{-1}) \\ &= a^3 - b^3\sqrt{-1} + 3a^2b\sqrt{-1} - 3ab^2 \\ &= a(a^2 - 3b^2) + b(3a^2 + b^2)\sqrt{-1}.\end{aligned}$$

Если это комплексное выражение равно комплексному числу $2 \pm \sqrt{-121}$, то вещественные и мнимые части должны быть равны по отдельности, так что мы приходим к следующим условиям:

$$a(a^2 - 3b^2) = 2,$$
$$b(3a^2 - b^2) = 11.$$

Если предположить, что a и b – целые числа (никаких априорных свидетельств в пользу этой гипотезы нет, но мы вправе попробовать и посмотреть, что получится), то нетрудно заметить, что $a = 2$ и $b = 1$ подходят. К тому же выводу можно прийти и формально, не полагаясь на наблюдательность. Например, можно заметить, что числа 2 и 11 простые, и вспомнить, какие множители бывают у простых чисел. Поскольку a и b – целые, то таковы же $a^2 - 3b^2$ и $3a^2 - b^2$. Впрочем, для наших целей достаточно показать, что

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1},$$
$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1},$$

а это легко проверяется возведением обеих частей в куб. С помощью этих результатов Бомбелли показал, что таинственное решение, которое дает формула Кардана, *действительно* $x = 4$. Как показано во врезке 1.2, в неприводимом случае все три корня вещественные и только один положителен, это и есть корень, вычисляемый по формуле Кардана (попробуйте доказать это, а если не получится, прочитайте вторую половину приложения А).