

Предисловие

Предлагаемый сборник содержит задания контрольных работ по курсу алгебры и начал анализа для обучающихся в 11-м классе по УМК, созданному авторским коллективом под руководством А. Г. Мордковича¹.

Каждая работа представлена в четырёх вариантах. Варианты имеют одинаковую сложность. Во всех контрольных работах выдержана единая структура, традиционная для данного УМК. Каждая работа состоит из трёх частей. Первая часть — задания **1, 2, 3** — направлена на проверку знаний базового уровня. Верное выполнение всех заданий этой части мы рекомендуем оценивать удовлетворительной оценкой. Вторая часть — задание **4** — технически более сложная, чем первая часть. Третью часть — задание **5** — можно охарактеризовать как творческую, требующую применения знаний в нестандартной ситуации. Работа также содержит дополнительное задание **6***, выполнение которого не является обязательным.

Для получения хорошей оценки учащемуся необходимо, помимо базовой части работы, выполнить вторую или третью часть. Отличная оценка выставляется за верное выполнение пяти заданий. За выполнение дополнительной части может быть выставлена отдельная оценка или добавлен балл к оценке, если в основной части работы допущена ошибка.

В конце сборника приведено примерное тематическое планирование (из расчёта 3 ч в неделю) с указанием места проведения каждой контрольной работы.

¹ А. Г. Мордкович, П. В. Семенов, Л. А. Александрова, Е. Л. Мардахаева. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень. 11 класс. В 2 ч. Ч. 1. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2019. — 256 с.

А. Г. Мордкович, П. В. Семенов, Л. А. Александрова, Е. Л. Мардахаева. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень. 11 класс. В 2 ч. Ч. 2. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2019. — 208 с.

Контрольная работа № 1

Вариант 1

1. Выпишите первые семь членов последовательности

$$y_n = 5 - (-1)^n.$$

Ответьте на вопросы.

- а) Является ли данная последовательность монотонной?
б) Является ли данная последовательность ограниченной?
2. Вычислите:
- а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6}{5^n} + 4 \right) \left(3 - \frac{2}{n^5} \right)$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 2x + 5}{3x^2 + 1}$.
3. Найдите приращение аргумента и приращение функции $y = 4^x$ при переходе от точки $x_0 = 2$ к точке $x_1 = 2,5$.

4. Вычислите:

а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x - 2}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 3x}{2x}$.

5. Постройте эскиз графика функции $y = f(x)$, обладающей следующими свойствами: $D(f) = (-\infty; +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 4$, $f(3) = 0$.

6*. Вычислите: $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{\sqrt{x-1} - 3}{x^2 - 11x + 10}$.

Вариант 2

1. Выпишите первые шесть членов последовательности

$$y_n = 1 + (-2)^n.$$

Ответьте на вопросы.

- а) Является ли данная последовательность монотонной?
б) Является ли данная последовательность ограниченной?

2. Вычислите:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{6^n} - 3 \right) \left(\frac{5}{n^6} + 2 \right)$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^2 + 1}{2x^2 - 3x + 4}$.

3. Найдите приращение аргумента и приращение функции $y = \log_2 x$ при переходе от точки $x_0 = \frac{1}{8}$ к точке $x_1 = \frac{1}{4}$.

4. Вычислите:

а) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{3x^2 - 10x + 3}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7 \sin 6x}{3x}$.

5. Постройте эскиз графика функции $y = f(x)$, обладающей следующими свойствами: $D(f) = (-\infty; +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -3$, $f(2) = -2$.

6*. Вычислите: $\lim_{x \rightarrow 17} \frac{x^2 - 18x + 17}{\sqrt{x - 1} - 4}$.

Вариант 3

1. Выпишите первые шесть членов последовательности $y_n = 3 - 3 \cdot (-1)^n$.

Ответьте на вопросы.

а) Является ли данная последовательность монотонной?

б) Является ли данная последовательность ограниченной?

2. Вычислите:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2^n} + 5 \right) \left(4 - \frac{7}{n^2} \right)$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15x^2 - 4x - 1}{5x^2 + 2}$.

3. Найдите приращение аргумента и приращение функции $y = \sin x$ при переходе от точки $x_0 = \frac{\pi}{6}$ к точке $x_1 = \frac{\pi}{2}$.

4. Вычислите:

а) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{x - 4}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \sin 2x}{5x}$.

5. Постройте эскиз графика функции $y = f(x)$, обладающей следующими свойствами: $D(f) = (-\infty; +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 5$, $f(-2) = 0$.

6*. Вычислите: $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x^2 - 8x + 15}$.

Вариант 4

1. Выпишите первые пять членов последовательности

$$y_n = 10 + (-3)^n.$$

Ответьте на вопросы.

- а) Является ли данная последовательность монотонной?
 б) Является ли данная последовательность ограниченной?

2. Вычислите:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 - \frac{4}{3^n} \right) \left(\frac{2}{n^3} + 8 \right)$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 - 3}{4x^2 + x + 3}$.

3. Найдите приращение аргумента и приращение функции

$y = \operatorname{tg} x$ при переходе от точки $x_0 = \frac{\pi}{6}$ к точке $x_1 = \frac{\pi}{3}$.

4. Вычислите:

а) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{3x^2 - 16x + 5}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 5x}{2x}$.

5. Постройте эскиз графика функции $y = f(x)$, обладающей следующими свойствами: $D(f) = (-\infty; +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -4$, $f(-3) = -1$.

6*. Вычислите: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{\sqrt{x-1} - 1}$.

Контрольная работа № 2

Вариант 1

1. Найдите производную функции:

а) $y = x^3 - 4x^2 + 16x - 3$; б) $y = \sqrt{x} \left(x - \frac{5}{x} \right)$.

2. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \frac{5x + 2}{1 - 8x}$. Вычислите $f'(1)$.

3. Составьте уравнение касательной, проведённой к параболе $y = x^2 + 3x - 4$ в точке $x = 2$.

4. Решите уравнение $f'(x) = 0$, если $f(x) = \frac{x^2 + 16}{x}$.

5. Докажите, что функция $y = \frac{1}{x}$ удовлетворяет соотношению $y - y' = y^2(x + 1)$.

- 6*. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = \sqrt{x} + 3$, параллельной прямой $y = \frac{x}{4} - 1$.

Вариант 2

1. Найдите производную функции:

а) $y = x^3 + 6x^2 - 17x + 2$; б) $y = \frac{7}{x} \cdot (x + \sqrt{x})$.

2. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \frac{3x - 2}{5x + 4}$. Вычислите $f'(-1)$.

3. Составьте уравнение касательной, проведённой к параболе $y = x^2 - 4x + 3$ в точке $x = -1$.
4. Решите уравнение $f'(x) = 0$, если $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{x}{2}$.
5. Докажите, что функция $y = \sqrt{x}$ удовлетворяет соотношению $2yy' = 1$.
- 6*. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = x^3 - 2x + 3$, параллельной прямой $y = 5 - 2x$.

Вариант 3

1. Найдите производную функции:
- а) $y = x^3 - 9x^2 + 13x - 1$; б) $y = \sqrt{x} \left(x + \frac{7}{x} \right)$.
2. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \frac{4x + 1}{2 - 3x}$. Вычислите $f'(-3)$.
3. Составьте уравнение касательной, проведённой к параболе $y = x^2 + 5x - 6$ в точке $x = -4$.
4. Решите уравнение $f'(x) = 0$, если $f(x) = \frac{x^2 + 9}{3x}$.
5. Докажите, что функция $y = \frac{1}{x}$ удовлетворяет соотношению $y + y' = y^2(x - 1)$.
- 6*. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = \sqrt{x} - 2$, параллельной прямой $y = \frac{x}{6} + 5$.

Вариант 4

1. Найдите производную функции:

а) $y = x^3 + 3x^2 - 12x - 5$; б) $y = \frac{6}{x} \cdot (\sqrt{x} - x)$.

2. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \frac{1 - 7x}{3x + 2}$. Вычислите $f'(5)$.

3. Составьте уравнение касательной, проведённой к параболе $y = x^2 - 3x + 2$ в точке $x = 4$.

4. Решите уравнение $f'(x) = 0$, если $f(x) = \frac{x}{5} + \frac{5}{x}$.

5. Докажите, что функция $y = \sqrt{x}$ удовлетворяет соотношению $\frac{y}{y'} = 2x$.

6*. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = x^3 + 4x - 2$, параллельной прямой $y = 4x + 1$.

Контрольная работа № 3

Вариант 1

1. Найдите производную данной функции:

а) $y = x^{10} + \frac{1}{x^{10}} + \sqrt[10]{x}$; б) $y = e^x \cdot \sin x$; в) $y = \frac{x}{\ln x}$.

2. Найдите производную данной функции:

а) $y = \sqrt{3x + 5}$; б) $y = 5^{1-2x}$; в) $y = \ln\left(\frac{x - e}{2}\right)$.

3. Составьте уравнение касательной, проведённой к графику функции $y = \frac{e^x + 2x}{3}$ и образующей с положительным направлением оси абсцисс угол 45° .

4. Решите уравнение $f'(x) = 0$, если $f(x) = (2x - 6)^{10}(5x + 1)$.

5. При каком значении параметра a касательная, проведённая к графику функции $y = a \sin x + 2 \cos x$ в точке $x = \frac{\pi}{2}$, проходит через точку $(0; \pi + 3)$?

6*. Докажите, что функция $y = \operatorname{tg} x$ удовлетворяет уравнению $y^2 - y' + 1 = 0$.

Вариант 2

1. Найдите производную данной функции:

а) $y = x^5 + \frac{1}{x^5} + \sqrt[5]{x}$; б) $y = e^x \cdot \cos x$; в) $y = \frac{\ln x}{x}$.

2. Найдите производную данной функции:

а) $y = \sqrt{3 - 7x}$; б) $y = 5^{3x+1}$; в) $y = \operatorname{tg}\left(\frac{x - \pi}{4}\right)$.

3. Составьте уравнение касательной, проведённой к графику функции $y = 3\ln x - 2x$ и образующей с положительным направлением оси абсцисс угол 45° .
4. Решите уравнение $f'(x) = 0$, если $f(x) = (3x - 15)^8(2x + 5)$.
5. При каком значении параметра a касательная, проведённая к графику функции $y = 3\sin x + a\cos x$ в точке $x = \frac{\pi}{2}$, проходит через точку $(1; \pi + 1)$?
- 6*. Докажите, что функция $y = \ln 3x$ удовлетворяет уравнению $y'e^y = 3$.

Вариант 3

1. Найдите производную данной функции:
- а) $y = x^7 + \frac{1}{x^7} + \sqrt[7]{x}$; б) $y = e^x \cdot \ln x$; в) $y = \frac{x}{\sin x}$.
2. Найдите производную данной функции:
- а) $y = \sqrt{5x - 7}$; б) $y = 8^{4-3x}$; в) $y = \ln\left(\frac{x + e}{3}\right)$.
3. Составьте уравнение касательной, проведённой к графику функции $y = \frac{e^x + 3x}{4}$ и образующей с положительным направлением оси абсцисс угол 45° .
4. Решите уравнение $f'(x) = 0$, если $f(x) = (5x - 20)^9(3x + 1)$.
5. При каком значении параметра a касательная, проведённая к графику функции $y = a\sin x + 3\cos x$ в точке $x = \frac{\pi}{2}$, проходит через точку $\left(\frac{\pi}{2}; 2\right)$?
- 6*. Докажите, что функция $y = \operatorname{ctg} x$ удовлетворяет уравнению $y^2 + y' + 1 = 0$.

Вариант 4

1. Найдите производную данной функции:

а) $y = x^4 + \frac{1}{x^4} + \sqrt[4]{x}$; б) $y = x \cdot \ln x$; в) $y = \frac{\cos x}{x}$.

2. Найдите производную данной функции:

а) $y = \sqrt{1 - 9x}$; б) $y = 7^{4x-5}$; в) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{x + \pi}{6}\right)$.

3. Составьте уравнение касательной, проведённой к графику функции $y = 4\ln x - 3x$ и образующей с положительным направлением оси абсцисс угол 45° .

4. Решите уравнение $f'(x) = 0$, если $f(x) = (3x - 12)^7(5x + 2)$.

5. При каком значении параметра a касательная, проведённая к графику функции $y = 2\sin x + a\cos x$ в точке $x = \frac{\pi}{2}$, проходит через точку $\left(\frac{2}{3}; \frac{3\pi}{2}\right)$?

6*. Докажите, что функция $y = \ln 5x$ удовлетворяет уравнению $y + \ln y' = \ln 5$.