

ОГЛАВЛЕНИЕ

От авторов	4
Предисловие	5
Используемые обозначения	6
Часть I. Теория и задачи	7
1. Десятичная запись целого числа, НОД, НОК, алгоритм Евклида.....	7
2. Разложение на множители.....	14
3. Простые и составные числа.....	19
4. Деление с остатком.....	23
5. Сравнение по модулю.....	33
6. Признаки делимости.....	35
7. Уравнения в целых числах.....	44
Часть II. Указания и решения	51
1. Десятичная запись целого числа, НОД, НОК, алгоритм Евклида.....	51
2. Разложение на множители.....	87
3. Простые и составные числа.....	117
4. Деление с остатком.....	139
5. Сравнение по модулю.....	186
6. Признаки делимости.....	197
7. Уравнения в целых числах.....	237
Ответы	265
Список литературы	271

ОТ АВТОРОВ

Уважаемые читатели, вы держите в руках одну из книг серии «ВМК МГУ — школе». Учебно-методические пособия, входящие в эту серию, являются результатом более чем пятнадцатилетнего труда коллектива авторов, работающих на подготовительных курсах факультета вычислительной математики и кибернетики (ВМК) МГУ имени М. В. Ломоносова.

Сейчас изданы пособия по алгебре, геометрии, информатике и физике для старшеклассников для подготовки к ЕГЭ, олимпиадам и вступительным экзаменам в вузы. Недавно вышли пособия по математике для подготовки к ГИА для девятиклассников.

Но мы не хотим останавливаться только на стандартных задачах, необходимых для сдачи ГИА и ЕГЭ и экзаменов в вузы. Мы хотим, чтобы школьники с младших классов и до окончания школы могли решать задачи повышенной сложности — олимпиадные задачи, на которые у учителя обычно не остаётся времени на обычном уроке математики. Большинство книг по этой тематике выходят без разбивки по классам либо без разбивки по темам. Многие хорошие книги с олимпиадными задачами вышли давно и с тех пор не переиздавались. Мы собрали много задач из различных старых и не очень старых сборников олимпиадных задач и предлагаем их вам.

Настоящее пособие рассчитано на 5–7 классы и является вторым в серии пособий по олимпиадным задачам. Будет ещё несколько книг для 5–7 классов. Параллельно мы уже ведём работу над сборником задач для 8–9 классов. Завершит серию пособие для 10–11 классов.

Большинство олимпиадных задач, особенно для школьников младших и средних классов, не намного сложнее обычных школьных задач по математике. Поэтому не бойтесь их. Они только все вместе выглядят страшными, а каждая задача по отдельности вполне вам по силам. Берите их и решайте. Дорогу осилит идущий.

*Заместитель декана по учебной работе
факультета вычислительной математики и кибернетики
МГУ имени М. В. Ломоносова,
доцент кафедры математической физики*

М. В. Федотов

ПРЕДИСЛОВИЕ

Каждый раздел пособия содержит теоретические основы, описание методов решения задач, примеры применения методов и набор заданий для решения. Задачи в разделах в основном расположены по принципу *от простого — к сложному*. Аналогичная ситуация имеет место и с последовательностью разделов, поэтому сами разделы и задачи в разделах рекомендуется изучать в предложенном порядке. Приступать к решению задач надо после изучения соответствующего теоретического материала и разбора примеров.

После номера задачи указаны классы, для которых эта задача была предложена на олимпиаде. Однако это разделение на классы довольно условно. Понятно, что если задачу давали в 5 классе, то её можно давать и в 6–7 классах, и часто, наоборот, задача, которую давали на олимпиаде для 6–7 классов, вполне по силам пятиклассникам. Поэтому, придерживаясь рекомендаций о принадлежности задачи тому или иному классу, относитесь к ним творчески. Кстати, распределение задач по разделам тоже не всегда однозначно. Одну и ту же задачу можно было отнести к разным разделам.

В принципе, по этому пособию можно заниматься три года: в 5 классе пройти по всем разделам, выбирая задачи для 5 класса, в 6 классе снова пройти по всем разделам, выбирая задачи для 6 класса и т. д. А можно пройти и за более короткий срок: за два года, если вы начали заниматься в 6 классе, или за год, если вы уже в 7 классе.

Рекомендуется школьникам 5–7 классов, интересующимся олимпиадными задачами, учителям математики, руководителям кружков и факультативов.

Желаем удачи!

ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\{a\}$	— множество, состоящее из одного элемента a ;
\cup	— объединение;
\cap	— пересечение;
\emptyset	— пустое множество;
\in	— знак принадлежности;
\subset	— знак включения подмножества;
\forall	— для любого;
$A \setminus B$	— разность множеств A и B ;
\Rightarrow	— следовательно;
\Leftrightarrow	— тогда и только тогда, когда;
\mathbb{N}	— множество всех натуральных чисел; $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$;
\mathbb{Z}	— множество всех целых чисел;
\mathbb{Q}	— множество всех рациональных чисел;
\mathbb{R}	— множество всех действительных чисел;
ОДЗ	— область допустимых значений;
$\left\{ \begin{array}{l} \dots \\ \dots \end{array} \right.$	— знак системы, означающий, что должны выполняться все условия, объединённые этим знаком;
$\left[\begin{array}{l} \dots \\ \dots \end{array} \right.$	— знак совокупности, означающий, что должно выполняться хотя бы одно из условий, объединённых этим знаком.

Необходимо отметить, что в формулировках задач параллельно с математически более корректной терминологией типа «длина отрезка AB равна 5» и записью $|AB| = 5$ используются школьная терминология типа «отрезок AB равен 5» и запись $AB = 5$.

Часть I. ТЕОРИЯ И ЗАДАЧИ

В этом пособии приведены задачи на целые числа. Такие задачи предлагают на любой олимпиаде. В наших пособиях мы уже встречались с задачами на целые числа, например в книге «Арифметические задачи» в разделах, посвящённых логическим задачам. Здесь мы обобщим уже известные нам свойства целых чисел и рассмотрим некоторые новые типы задач.

В задачах этого пособия иногда встречается произведение n подряд идущих натуральных чисел, начиная с единицы. Такое произведение называется *факториалом числа n* : $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ (читается « n -факториал»).

При решении задач этого пособия полезно помнить *формулы сокращённого умножения*:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b);$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a \pm b) = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3;$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2);$$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

для любого целого $n > 1$;

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

для любого нечётного $n > 1$

(минусы и плюсы во второй скобке чередуются).

1. Десятичная запись целого числа, НОД, НОК, алгоритм Евклида

Теоретический материал

В этом разделе собраны задачи на использование основных свойств целых чисел. Приведём некоторые теоретические факты.

Любое натуральное число можно разложить в сумму по степеням числа 10:

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0.$$

Основная теорема арифметики гласит: каждое натуральное число, кроме единицы, раскладывается в произведение простых сомножителей, причём единственным образом, т. е. любое натуральное число n , большее единицы, можно представить в каноническом виде

$$n = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \dots \cdot p_k^{m_k},$$

где p_1, p_2, \dots, p_k — простые числа; k, m_1, m_2, \dots, m_k — натуральные числа.

Наибольшее натуральное число, на которое делятся целые числа n_1 и n_2 , называется их *наибольшим общим делителем* и обозначается $\text{НОД}(n_1, n_2)$. Если $\text{НОД}(n_1, n_2) = 1$, то числа n_1 и n_2 называются *взаимно простыми*.

Наименьшее натуральное число, которое делится на целые числа n_1 и n_2 , называется их *наименьшим общим кратным* и обозначается $\text{НОК}(n_1, n_2)$.

Для того чтобы найти $\text{НОД}(n_1, n_2)$, надо в каноническом разложении чисел n_1 и n_2 найти все общие простые сомножители и возвести каждый из них в наименьшую степень, в которой этот множитель входит в каноническое разложение чисел n_1 и n_2 . Произведение полученных степеней простых множителей даёт $\text{НОД}(n_1, n_2)$. Если же перемножить все простые сомножители чисел n_1 и n_2 в наибольших степенях, то получим $\text{НОК}(n_1, n_2)$. Запишем правила нахождения наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного двух натуральных чисел формулами: если $n_1 = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \dots \cdot p_k^{m_k}$, $n_2 = p_1^{l_1} \cdot p_2^{l_2} \cdot \dots \cdot p_k^{l_k}$, то

$$\begin{aligned} \text{НОД}(n_1, n_2) &= p_1^{\min(m_1, l_1)} \cdot p_2^{\min(m_2, l_2)} \cdot \dots \cdot p_k^{\min(m_k, l_k)}, \\ \text{НОК}(n_1, n_2) &= p_1^{\max(m_1, l_1)} \cdot p_2^{\max(m_2, l_2)} \cdot \dots \cdot p_k^{\max(m_k, l_k)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим несколько примеров.

Примеры решения задач

Пример 1. Доказать, что сумма двух нечётных чисел чётна, а произведение нечётно.

Решение. Рассмотрим два произвольных нечётных числа n_1 и n_2 . Их можно представить в виде $n_1 = 2m + 1$, $n_2 = 2k + 1$. Тогда их сумма

$$n_1 + n_2 = 2m + 1 + 2k + 1 = 2(m + k + 1),$$

очевидно, чётна, а произведение

$$n_1 \cdot n_2 = (2m + 1) \cdot (2k + 1) = 2(2mk + m + k) + 1$$

нечётно. Утверждение доказано.

Пример 2. Доказать, что $\text{НОД}(n_1, n_2) \cdot \text{НОК}(n_1, n_2) = n_1 \cdot n_2$.

Решение. Это равенство следует из канонических разложений чисел n_1 и n_2 , определений $\text{НОД}(n_1, n_2)$, $\text{НОК}(n_1, n_2)$ и очевидного равенства

$$\min(n_1, n_2) + \max(n_1, n_2) = n_1 + n_2.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \text{НОД}(n_1, n_2) \cdot \text{НОК}(n_1, n_2) &= \\ &= p_1^{\min(m_1, l_1)} \cdot p_2^{\min(m_2, l_2)} \cdot \dots \cdot p_k^{\min(m_k, l_k)} \cdot p_1^{\max(m_1, l_1)} \cdot p_2^{\max(m_2, l_2)} \cdot \dots \\ &\quad \dots \cdot p_k^{\max(m_k, l_k)} = \\ &= p_1^{\min(m_1, l_1) + \max(m_1, l_1)} \cdot p_2^{\min(m_2, l_2) + \max(m_2, l_2)} \cdot \dots \\ &\quad \dots \cdot p_k^{\min(m_k, l_k) + \max(m_k, l_k)} = \\ &= p_1^{m_1 + l_1} \cdot p_2^{m_2 + l_2} \cdot \dots \cdot p_k^{m_k + l_k} = \\ &= p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \dots \cdot p_k^{m_k} \cdot p_1^{l_1} \cdot p_2^{l_2} \cdot \dots \cdot p_k^{l_k} = n_1 \cdot n_2. \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

Пример 3. Доказать, что $\text{НОД}(n_1, n_2) = \text{НОД}(n_1 \pm n_2, n_2)$.

Решение. Пусть $n = \text{НОД}(n_1, n_2)$. Тогда существуют взаимно простые целые числа p и q такие, что $n_1 = n \cdot p$ и $n_2 = n \cdot q$. Поэтому $n_1 \pm n_2 = n \cdot (p \pm q)$. Поскольку числа $(p \pm q)$ и q взаимно просты, $\text{НОД}(n_1 \pm n_2, n_2) = n$, что и требовалось доказать.

Пример 4. Выполнив деление с остатком n_1 на n_2 , получим $n_1 = n_2 \cdot t + r_1$. Доказать, что $\text{НОД}(n_1, n_2) = \text{НОД}(n_2, r_1)$.

Решение. Пусть $n = \text{НОД}(n_1, n_2)$. Тогда существуют взаимно простые целые числа p и q такие, что $n_1 = n \cdot p$ и $n_2 = n \cdot q$. Следовательно,

$$n \cdot p = n \cdot q \cdot t + r_1.$$

Поэтому r_1 делится на n и не делится на q (иначе p делилось бы на q). Значит, $\text{НОД}(n_2, r_1) = n$, что и требовалось доказать.

Замечание. На утверждениях примеров 3 и 4 основан алгоритм Евклида нахождения НОД двух чисел.

Пусть a, b — натуральные числа, $a \geq b$. Требуется найти $\text{НОД}(a, b)$. Выполнив деление с остатком a на b , получим $a = b \cdot q_0 + r_1$. Если $r_1 = 0$, то a делится нацело на b и $\text{НОД}(a, b) = b$. Если же $r_1 \neq 0$, то, выполнив деление с остатком b на r_1 , получим, что $b = r_1 \cdot q_1 + r_2$. Затем выполняется деление с остатком r_1 на r_2 и т. д. В результате повторных делений получим систему равенств

$$\begin{aligned} a &= b \cdot q_0 + r_1, & b &= r_1 \cdot q_1 + r_2, & r_1 &= r_2 \cdot q_2 + r_3, \dots, \\ r_{n-2} &= r_{n-1} \cdot q_{n-1} + r_n, & r_{n-1} &= r_n \cdot q_n, \end{aligned}$$

где $b > r_1 > r_2 > \dots > r_n > 0$. Из утверждений примеров 3 и 4 следует, что последний ненулевой остаток r_n является $\text{НОД}(a, b)$.

Пример 5. Отец и сын решили померить шагами расстояние между двумя деревьями, для чего отошли одновременно от одного и того же дерева. Длина шага отца — 70 см, сына — 56 см. Найти расстояние между этими деревьями, если известно, что следы их совпали 10 раз, причём в последний раз ровно у второго дерева.

Решение. Разложим на простые множители числа 70 и 56: $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$; $56 = 2^3 \cdot 7$. Найдём НОК(70, 56) = $2^3 \cdot 5 \cdot 7 = 280$. Следовательно, через каждые 280 см следы отца и сына совпадают. Поскольку следы совпали ровно 10 раз, то расстояние между двумя деревьями равно $280 \cdot 10 = 2800$ см, т. е. 28 метров.

Ответ. 28 м.

Задачи

- а) Запишите наибольшее и наименьшее семизначные числа.

б) Какое наибольшее и какое наименьшее семизначное число можно написать четырьмя нулями и тремя единицами?
- Возраст дедушки выражается наименьшим трёхзначным числом, которое записывается различными цифрами. Сколько лет дедушке?
- Вычеркните в числе 4 000 538 пять цифр так, чтобы оставшееся число стало наибольшим.
- Из числа 12345678910111213...5657585960 вычеркните 100 цифр так, чтобы оставшееся число стало наибольшим.
- Сколько существует натуральных чисел, меньших 100, в записи которых цифра 5 использована хотя бы 1 раз?
- а) Сумма 2002 натуральных чисел — нечётное число. Каким числом — чётным или нечётным — является произведение этих чисел?

б) Доказать, что если произведение двух чисел есть число нечётное, то сумма этих чисел всегда будет числом чётным.
- Сколькими нулями оканчивается число

$$100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100?$$
- Сколькими нулями оканчивается произведение

$$2003! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2001 \cdot 2002 \cdot 2003?$$
- В произведении всех целых чисел от 1 до 100 вычеркнули все нули. Какой будет последняя цифра получившегося числа — чётной или нечётной?
- Доказать, что если перемножить все целые числа от 1 до 1965, то получится число, последняя ненулевая цифра которого чётна.

11. $\overline{6-7}$ Каково наименьшее натуральное n , при котором $n!$ делится на 990?
12. $\overline{6-7}$ Может ли $n!$ оканчиваться ровно на 5 нулей?
13. $\overline{6-7}$ Подряд записаны числа 1, 2, ..., 2001, 2002. Каких цифр при записи этих чисел использовано больше: двоек или единиц? На сколько больше?
14. $\overline{6-7}$ Найти двузначное число, равное сумме его цифр, увеличенной в 6 раз.
15. $\overline{6-7}$ Найти все такие двузначные числа N , что сумма цифр числа N в пять раз меньше самого числа N .
16. $\overline{6-7}$ Найти все натуральные числа, которые в 12 раз больше суммы своих цифр.
17. $\overline{6-7}$ Найти все трёхзначные числа, которые уменьшаются в 5 раз после вычёркивания первой цифры.
18. $\overline{6-7}$ На каждой из одиннадцати карточек написано по цифре, не превосходящей пяти. Расположив эти карточки в ряд, Миша получил 11-значное число; затем, расположив те же карточки по-другому, Миша получил второе 11-значное число. Доказать, что сумма двух этих чисел будет содержать хотя бы одну чётную цифру в своей десятичной записи.
19. $\overline{6-7}$ Показать, что $(100 - a)(100 - b) = 100((100 - a) - b) + ab$ и что двузначные числа, близкие к 100, удобно перемножать так:
 $86 \cdot 97 = (86 - 3) \cdot 100 + 14 \cdot 3 = 8342$, где $14 = 100 - 86$, $3 = 100 - 97$.
20. $\overline{6-7}$ Доказать, что
 а) два числа $\overline{ab} = 10a + b$ и $\overline{ac} = 10a + c$, т. е. такие числа, у которых число десятков одинаковое, можно перемножать по формуле $10a((10a + b) + c) + bc$;
 б) два числа $\overline{ab} = 10a + b$ и $\overline{ac} = 10a + c$, у которых число десятков одинаковое, а сумма единиц $b + c = 10$, можно перемножать по формуле $100a(a + 1) + bc$, т. е. число десятков a надо умножить на следующее за ним число $(a + 1)$ и к произведению приписать справа произведение единиц.
21. $\overline{6-7}$ Какое наибольшее значение может принимать выражение
 $ae k - af h + bfg - bdk + cdh - ceg$,
 если каждое из чисел a, \dots, k равно 1 или -1 ?
22. $\overline{6-7}$ Число $111 \dots 11$ (100 единиц) представлено в виде
 $a_0 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + \dots + a_{99} \cdot 10^{99}$,
 где a_0, a_1, \dots, a_{99} — неотрицательные целые числа, сумма которых не больше 100. Доказать, что все они равны 1.
23. $\overline{6-7}$ Найти сумму цифр куба числа, состоящего из трёх единиц и некоторого количества нулей.

24. $\overline{6-7}$ Если сложить несократимую дробь с единицей, то вновь полученная дробь также будет несократима. Почему?
25. $\overline{6-7}$ Если правильная дробь несократима, то дробь, дополняющая её до 1, также несократима. Почему?
26. $\overline{6-7}$ Доказать, что наибольший общий делитель суммы двух чисел и их наименьшего общего кратного равен наибольшему общему делителю самих чисел.
27. $\overline{5-6}$ Используя алгоритм Евклида, найти:
а) НОД(607, 477); б) НОД(343, 246); в) НОД(6494, 6303).
28. $\overline{5-6}$ Сократить дробь: а) $\frac{3953}{871}$; б) $\frac{6059}{1241}$; в) $\frac{6821}{2147}$; г) $\frac{10\,027}{32\,671}$.
29. $\overline{6-7}$ НОК двух чисел равно 240, а их НОД равен 8. Найти эти числа, если известно, что меньшее из чисел содержит только один множитель 5, не входящий в большее число.
30. $\overline{6-7}$ НОК двух чисел, не делящихся друг на друга, равно 630, а их НОД равен 18. Найти эти числа.
31. $\overline{6-7}$ Даны дроби $\frac{8}{15}$ и $\frac{18}{35}$. Найти наибольшее из всех чисел, при делении на которое каждой из данных дробей получаются целые числа.
32. $\overline{6-7}$ Даны дроби $\frac{35}{396}$ и $\frac{28}{297}$. Найти наименьшее положительное из всех чисел, при делении которого на каждую из данных дробей получаются целые числа.
33. $\overline{6-7}$ Существуют ли натуральные числа a и b такие, что дроби $\frac{a}{b}$, $\frac{a+1}{b}$, $\frac{a+1}{b+1}$ несократимы?
34. $\overline{7}$ Доказать, что числа $27n + 4$ и $18n + 3$ взаимно простые при любом натуральном n .
35. $\overline{7}$ Найти НОД чисел $2n + 3$ и $n + 7$.
36. $\overline{7}$ Доказать, что при любом натуральном n несократима дробь: а) $\frac{12n+1}{30n+2}$; б) $\frac{14n+3}{21n+4}$.
37. $\overline{7}$ Найти все целые n , при которых $\frac{19n+17}{7n+11}$ — целое число.
38. $\overline{6-7}$ Доказать, что НОК чисел $1, 2, \dots, 2n$ равно НОК чисел $n+1, n+2, \dots, 2n$.
39. $\overline{7}$ Решить в натуральных числах уравнение
$$\text{НОК}(x^2, y) + \text{НОК}(x, y^2) = 1996.$$
40. $\overline{5-7}$ Конфеты «Сладкая математика» продаются по 12 штук в коробке, а конфеты «Геометрия с орехами» — по 15 штук в коробке. Какое наименьшее число коробок конфет того и другого сорта необходимо купить, чтобы тех и других конфет было поровну?

41. $\overline{5-7}$ Коля, Серёжа и Ваня регулярно ходили в кинотеатр. Коля бывал в нём каждый 3-й день, Серёжа — каждый 7-й, Ваня — каждый 5-й. Сегодня все ребята были в кино. Когда все трое встретятся в кинотеатре в следующий раз?
42. $\overline{5-7}$ Бак был полон воды. Эту воду поровну разлили по трём бидонам. Оказалось, что в первом бидоне вода заняла половину его объёма, во втором бидоне вода заняла $\frac{2}{3}$, а в третьем бидоне — $\frac{3}{4}$ его объёма. Бак и все три бидона вмещают по целому числу литров. При каком наименьшем объёме бака возможна такая ситуация?
43. $\overline{6-7}$ Жители острова Невезения, как и мы с вами, делят сутки на несколько часов, час на несколько минут, а минуту на несколько секунд. Но у них в сутках 77 минут, а в часе 91 секунда. Сколько секунд в сутках на острове Невезения?
44. $\overline{5-7}$ В классе учится меньше 50 школьников. За контрольную работу седьмая часть учеников получила пятёрки, третья — четвёрки, половина — тройки. Остальные работы были оценены как неудовлетворительные. Сколько было таких работ?
45. $\overline{6-7}$ На складе имеются ножи и вилки. Число тех и других, вместе взятых, больше 300, но меньше 400. Если ножи и вилки вместе считать десятками или дюжинами, то в обоих случаях получается целое число десятков и целое число дюжин. Сколько было ножей и вилок на складе, если ножей было на 160 меньше, чем вилок?
46. $\overline{6-7}$ Для изготовления новогодних подарочных наборов купили орехов, конфет и пряников — всего 760 штук. Орехов взяли на 80 штук больше, чем конфет, а пряников — на 120 штук меньше, чем орехов. Какое наибольшее число одинаковых подарков для детей можно сделать из этого запаса?
47. $\overline{6-7}$ Три автобуса в 6 часов утра отправились с одной и той же станции по трём различным маршрутам и совершают рейс туда и обратно: первый автобус — за 1 ч 30 мин, второй — за 1 ч 50 мин и третий — за 1 ч 10 мин. По совершении каждого рейса автобусы через 10 минут отправляются в следующий рейс по тому же маршруту. Через сколько часов
- 1) первый автобус отправится одновременно со вторым;
 - 2) второй автобус — с третьим;
 - 3) все три автобуса одновременно отправятся с конечной станции?
48. $\overline{6-7}$ Мальчик и девочка измерили одно и то же расстояние в 143 м шагами. Так как длины их шагов различны, то их следы совпали 20 раз. Шаг девочки 55 см. Найти длину шага мальчика, если известно, что она больше длины шага девочки, но меньше 75 см.

49. $\overline{6-7}$ В универсаме города Гайдаровска продавалось (1 января) девять товаров по цене 1 руб. каждый. Начиная со второго января ежедневно стоимость каждого товара увеличивалась в два или три раза. Известно, что 1 февраля все товары имели различные цены. Доказать, что цены каких-то двух товаров различаются по крайней мере в 25 раз.
50. $\overline{6-7}$ Фома и Ерёма нашли на дороге по пачке 11-рублёвок. В чайной Фома выпил 3 стакана чая, съел 4 калача и 5 бубликов. Ерёма выпил 9 стаканов чая, съел 1 калач и 4 бублика. Стакан чая, калач и бублик стоят по целому числу рублей. Оказалось, что Фома может расплатиться 11-рублёвками без сдачи. Показать, что это может сделать и Ерёма.
51. $\overline{6-7}$ Марсиане делят сутки на 13 часов. После того как Марсианский Заяц уронил часы в чай, у них изменилась скорость вращения секундной стрелки, а скорость вращения других стрелок осталась прежней. Известно, что каждую полночь все три стрелки совпадают. Сколько всего за сутки может быть таких моментов времени, когда три стрелки совпадут?
52. $\overline{6-7}$ Доказать, что произведение 100 последовательных натуральных чисел не может быть 100-й степенью целого числа.

2. Разложение на множители

Теоретический материал

В этом разделе приведены задачи, в которых используется разложение целого числа на произведение нескольких сомножителей.

Рассмотрим несколько примеров.

Примеры решения задач

Пример 1. Число $3n$ делится на 5. Верно ли, что n делится на 5?

Решение. Поскольку 3 не делится на 5, то на 5 делится n .

Ответ. Да.

Пример 2. Написать в общем виде произведение трёх последовательных натуральных чисел и объяснить, почему оно во всяком случае делится на 6, а может быть, даже на 24.

Решение. Три подряд идущих натуральных числа можно представить в виде $n - 2$, $n - 1$ и n , где n — некоторое натуральное число.

Если n нечётно, то $n - 1$ чётно, т. е. делится на 2. Из трёх подряд идущих натуральных чисел одно обязательно делится

на 3. Поэтому произведение трёх последовательных натуральных чисел обязательно разделится на 6.

Если же n чётно, то чётными будут числа $n - 2$ и n , причём как минимум одно из них делится на 2, а другое обязательно разделится на 4, так как из четырёх подряд идущих натуральных чисел $n - 2$, $n - 1$, n , $n + 1$ одно обязательно разделится на 4 и это число не $n + 1$, поскольку оно нечётно. Учитывая, что из трёх подряд идущих натуральных чисел одно обязательно делится на 3, получаем, что в этом случае произведение трёх последовательных натуральных чисел разделится на $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Пример 3. На складе стеклотары могут храниться банки из-под консервированных овощей по 0,5 л, 0,7 л и 1 л. Сейчас на складе имеется 2500 банок общей вместимостью 1998 л. Доказать, что на складе есть хотя бы одна полулитровая банка.

Решение. Пусть на складе нет банок по 0,5 л, а банок по 0,7 л лежит x штук. Тогда банок по 1 л всего $(2500 - x)$ штук. Поскольку общая вместимость банок 1998 л, получаем уравнение

$$0,7 \cdot x + 1 \cdot (2500 - x) = 1998 \iff 0,3x = 502 \iff x = 1673 \frac{1}{3}.$$

Но x должно быть целым числом, значит, предположение о том, что на складе нет полулитровых банок, неверно.

Покажем, что задача имеет решение. Условию задачи удовлетворяет, например, следующий набор: 404 полулитровые банки, 1000 банок по 0,7 л и 1096 литровых банок.

Задачи

1. $\overline{5-6}$ Делится ли $2^9 \cdot 3$ на 6?
2. $\overline{5-6}$ Верно ли, что если натуральное число делится на 4 и на 3, то оно делится на 12?
3. $\overline{5-6}$ Верно ли, что если натуральное число делится на 4 и на 6, то оно делится на $24 = 4 \cdot 6$?
4. $\overline{5-6}$ Число n не делится на 3. Может ли делиться на 3 число $2n$?
5. $\overline{5-6}$ Число n чётно. Верно ли, что $3n$ делится на 6?
6. $\overline{5-6}$ Число $5n$ делится на 3. Верно ли, что n делится на 3?
7. $\overline{5-6}$ Число $15n$ делится на 6. Верно ли, что n делится на 6?
8. $\overline{6-7}$ Даны три последовательных натуральных числа, из которых первое — чётное. Доказать, что их произведение кратно 24.
9. $\overline{6-7}$ Доказать, что произведение любых пяти последовательных чисел делится: а) на 30; б) на 120.
10. $\overline{6-7}$ Доказать, что $(n + 2)(n^2 + n + 6)$ делится на 6 при любом $n \in \mathbb{N}$.

11. $\overline{6-7}$ Доказать, что если p — простое число и $p > 3$, то число $p^2 - 1$ делится на 24.
12. $\overline{6-7}$ Доказать, что $n^3 - 4n$ делится на 48 при чётном n .
13. $\overline{6-7}$ Доказать, что $n^6 - n^4 - n^2 + 1$ делится на 128 при нечётном n .
14. $\overline{6-7}$ Обозначим через \overline{ab} число с цифрами a и b . Доказать, что число $\overline{ab} + \overline{ba}$ делится на 11.
15. $\overline{6-7}$ Доказать, что разность трёхзначных чисел, из которых одно написано теми же цифрами, что и другое, но в обратном порядке, делится на 9 и 11.
16. $\overline{6-7}$ Даны два четырёхзначных числа. У одного из них вторая и третья цифры — нули, а другое число записано теми же цифрами, что и первое, но в обратном порядке. Доказать, что разность этих чисел делится на 27 и 37.
17. $\overline{6-7}$ Записать в общем виде четырёхзначное число, цифра сотен которого равна 0, а остальные цифры не равны 0. Показать, что разность между этим числом и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, делится на 9 и не делится на 111.
18. $\overline{6-7}$ В шестизначном числе первая цифра совпадает с четвёртой, вторая — с пятой, третья — с шестой. Доказать, что это число кратно 7, 11, 13.
19. $\overline{6-7}$ Найти четыре различных натуральных числа таких, что произведение любых трёх из них, сложенное с единицей, делится на четвёртое.
20. $\overline{6-7}$ Найти четыре различных целых числа таких, что сумма любых трёх из них, сложенная с единицей, делится на четвёртое.
21. $\overline{6-7}$ Найти n различных целых чисел ($n > 2$) таких, что произведение любых $n - 1$ из них делится на оставшееся число.
22. $\overline{6-7}$ Группа восьмиклассников решила поехать во время каникул на экскурсию в Углич. Ежемесячно каждый ученик вносил определённое количество рублей (без копеек), одинаковое для всех, и в течение пяти месяцев было собрано 49 685 руб. Сколько было в группе учеников и какую сумму внёс каждый?
23. $\overline{6-7}$ Решите ребус: а) $AX \cdot UX = 2001$; б) $BAO \cdot BA \cdot B = 2002$.
24. $\overline{6-7}$ В конце четверти Вовочка выписал подряд в строчку свои текущие отметки по пению и поставил между некоторыми из них знак умножения. Произведение получившихся чисел оказалось равным 2007. Какая отметка выходит у Вовочки в четверти по пению? (Учительница пения использует пятибалльную систему оценивания и не ставит единиц.)

25. $\overline{6-7}$ Компания из нескольких друзей вела переписку так, что каждое письмо получали все, кроме отправителя. Каждый написал одно и то же количество писем, в результате чего все вместе было получено 440 писем. Сколько человек могло быть в этой компании?
26. $\overline{6-7}$ Несколько одинаковых по численности бригад сторожей спали одинаковое число ночей. Каждый сторож проспал больше ночей, чем сторожей в бригаде, но меньше, чем число бригад. Сколько сторожей в бригаде, если все сторожа вместе проспали 1001 человеко-ночь?
27. $\overline{6-7}$ Коля и Петя купили одинаковые беговые лыжи. Сколько стоит одна пара лыж, если Петя уплатил стоимость лыж трёхрублёвыми купюрами, Коля — пятирублёвыми, а всего они дали в кассу меньше 10 купюр?
28. $\overline{6-7}$ Ребята пришли с рыбалки с уловом. Все вместе они поймали 121 рыбку, причём количество рыбок у каждого оказалось одинаковым. Сколько ребят ходило на рыбалку?
29. $\overline{6-7}$ В школьной математической олимпиаде приняли участие учащиеся шестых классов. Ученики 6«д» класса выступили на олимпиаде следующим образом: первую задачу решили 9 учеников, вторую — 7 учеников, третью — 5 учеников, четвёртую — 3 ученика, пятую — 1 ученик. Все ученики 6«д» класса, кроме Пети, решили одинаковое число задач, а Петя — на одну задачу больше. Мог ли он стать призёром олимпиады, если призёрами олимпиады стали шестиклассники, решившие 4 или 5 задач?
30. $\overline{7}$ Доказать, что число $13 + 13^2 + \dots + 13^{2001} + 13^{2002}$ делится нацело на 7.
31. $\overline{7}$ Пятизначное число назовём *пэвэгэшным*, если оно не раскладывается в произведение двух трёхзначных чисел. Какое наибольшее число *пэвэгэшных* пятизначных чисел может идти подряд?
32. $\overline{6-7}$ Найти наибольшее число, все цифры которого различны, а их произведение равно 360.
33. $\overline{7}$ Сколько существует пар двузначных чисел a и b , для которых произведение ab является числом, записанным одинаковыми цифрами?
34. $\overline{6-7}$ Сто пиратов переносили на берег сундуки с сокровищами. Каждый сундук несли семеро пиратов. Капитан Сильвер считает, что во время переноски все пираты заработали поровну, поскольку каждый участвовал в переноске 65 сундуков. Доказать, что капитан ошибся.
35. $\overline{6-7}$ На складе стеклотары могут храниться банки из-под консервированных овощей по 0,5 л, 0,7 л и 1 л. Сейчас на скла-

де имеется 2600 банок общей вместимостью 1998 л. Доказать, что на складе есть хотя бы одна полулитровая банка.

36. $\overline{6-7}$ Два преуспевающих бизнесмена купили 100 литров газированных напитков в бутылках по 0,5 л, 0,7 л и 1 л. После этого они поссорились и решили разделить поровну свои запасы газировки. Доказать, что им удастся это сделать, не вскрывая бутылок.
37. $\overline{7}$ а) Доказать, что в любом шестидесятизначном числе, десятичная запись которого не содержит нулей, можно зачеркнуть несколько цифр так, что получившееся в результате этого число будет делиться на 1001.
б) Доказать, что в любом пятидесятизначном числе, десятичная запись которого не содержит нулей, можно зачеркнуть несколько цифр так, что получившееся в результате этого число будет делиться на 101.
38. $\overline{6}$ Назовём натуральное число *куском*, если оно получается выписыванием подряд чисел от 1 до какого-нибудь натурального $n > 1$ (например, 123 или 123 456 789 101 112). Доказать, что произведение двух *кусков* — не *кусок*.
39. $\overline{7}$ Можно ли расставить на рёбрах куба числа от 1 до 12 так, чтобы все суммы в вершинах (суммируются числа, стоящие на рёбрах, выходящих из данной вершины) были равны?
40. $\overline{7}$ В трёх магазинах было 1973 учебника. В первые три дня первый магазин продал соответственно $\frac{1}{47}$, $\frac{1}{7}$ и $\frac{1}{2}$ часть своих учебников, второй магазин — $\frac{1}{41}$, $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{3}$ часть своих учебников, а третий магазин — $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{20}$ и $\frac{1}{10}$ часть своих учебников. Сколько учебников было в каждом магазине?
41. $\overline{7}$ Известно, что a, b, c — простые числа, причём $a + b$ и ab делятся на c . Доказать, что $a^3 - b^3$ делится на c .
42. $\overline{7}$ Доказать, что произведение четырёх последовательных натуральных чисел, сложенное с единицей, есть точный квадрат.
43. $\overline{7}$ Доказать, что если каждое из двух чисел есть сумма квадратов двух целых чисел, то их произведение также есть сумма двух квадратов.
44. $\overline{7}$ Доказать, что при любом натуральном n число $\frac{10^n - 1}{81} - \frac{n}{9}$ целое.
45. $\overline{6-7}$ а) Доказать, что если сумма двух натуральных чисел равна 770, то их произведение не делится на 770.
б) Доказать, что если сумма двух натуральных чисел равна 30 030, то их произведение не делится на 30 030.



ВМК МГУ – ШКОЛЕ

Серия книг **«ВМК МГУ–школе»** – результат многолетнего труда коллектива авторов, работающих на подготовительных курсах факультета вычислительной математики и кибернетики (ВМК) МГУ имени М. В. Ломоносова. В серию входят пособия по алгебре, геометрии, физике и информатике. Все они предназначены для подготовки и успешной сдачи ГИА и ЕГЭ, а также поступления в престижные вузы страны.

Олимпиадная математика – новое направление серии «ВМК МГУ–школе». Его основная задача – научить школьников всех возрастов решать задачи повышенной сложности.

Настоящее пособие предназначено для учащихся 5–7 классов и является вторым в серии пособий по олимпиадным математическим задачам. Будут выпущены ещё несколько книг для 5–7 классов – по другим разделам математики, а также сборники задач для 8–9 и 10–11 классов.

Большинство олимпиадных задач, особенно для младшей и средней школы, не намного сложнее обычных школьных задач по математике. Поэтому не бойтесь их. Они только все вместе выглядят страшными, а каждая задача по отдельности вполне вам по силам. Берите их и решайте!