УДК 51(075.32)
ББК 22.1я723
КТК 11
В75

Авторы:
Л. В. Воронина — заведующий кафедрой теории и методики обучения естествознанию, математике и информатике в период детства Института педагогики и психологии детства (ФГБОУ ВО «Уральский государственный педагогический университет»), д. пед. н., профессор;
Е. А. Утюмова — доцент кафедры теории и методики обучения естествознанию, математике и информатике в период детства Института педагогики и психологии детства (ФГБОУ ВО «Уральский государственный педагогический университет»), к. пед. н.

Рецензент:
М.В. Николаева — профессор кафедры педагогики и психологии начального образования ФГБОУ ВО «Волгоградский государственный социально-педагогический университет», д. пед. н.;
Н.Г. Егорова — старший научный сотрудник Объединенного института проблем информатики НАН Беларуси, к. ф-м. н.

Воронина Л. В.
В75 Математика : учеб. пособие / Л. В. Воронина, Е. А. Утюмова. — Ростов н/Д : Феникс, 2020. — 298, [1] с. : ил. — (Среднее профессиональное образование).

ISBN 978-5-222-32358-8

Учебное пособие составлено в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по специальностям «Дошкольное образование», «Преподавание в начальных классах», «Специальное дошкольное образование», «Коррекционная педагогика в начальном образовании». Предназначено для изучения дисциплины естественно-научного цикла «Математика» (ЕН.01).

В учебном пособии рассматриваются понятия «множество», «величина», «натуральное число», «текстовая задача», «геометрическая фигура», которые являются базовыми для педагогов дошкольного и начального образования. Профессионально-педагогическая направленность учебного пособия создается за счет тщательного отбора теоретического материала и упражнений для самостоятельной работы. Весь материал изложен на понятном и доступном для обучающихся математическом языке, с большим количеством примеров, что позволяет использовать его как для работы под руководством преподавателя, так и для самостоятельного изучения курса математики.

УДК 51(075.32)
ББК 22.1я723

ISBN 978-5-222-32358-8

Содержание

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие составлено в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по специальностям 44.02.01 «Дошкольное образование», 44.02.02 «Преподавание в начальных классах», 44.02.04 «Специальное дошкольное образование», 44.02.05 «Коррекционная педагогика в начальном образовании» и предназначено для изучения дисциплины естественно-научного цикла «Математика» (ЕН.01).

В образовательном процессе большое внимание уделяется всестороннему развитию ребенка дошкольного и младшего школьного возраста средствами каждого предмета, в связи с чем огромная роль отводится математике. Говоря об основных целях изучения математики в ДОУ и начальной школе, прежде всего следует отметить:

— развитие логического мышления ребенка;
— приобретение им прочных знаний по основам математической науки, необходимых для продолжения образования;
— понимание детьми прикладного значения математики.

Исходя из указанных целей, можно сформулировать следующие основные задачи преподавания математики в педагогическом колледже:

— раскрыть студентам мировоззренческое значение математики, углубить их представления о роли и месте математики в изучении окружающего мира;
— дать студентам необходимые математические знания, на основе которых строится дошкольный курс и курс начальной школы;
— способствовать развитию мышления студентов;
— развивать умение самостоятельной работы с учебными пособиями и другой математической литературой.

Курс математики призван обеспечить студентам необходимую подготовку для дальнейшей работы по углублению и расширению математических знаний, использованию их в будущей практической работе.

В соответствии с поставленными целью и задачами курс состоит из восьми разделов: «Множества, отношения между множествами и операции над ними», «Величины и их измерение», «Натуральные числа и нуль», «Системы счисления», «Текстовая задача и процесс ее решения», «Геометрические фигуры», «Правила приближенных вычислений», «Методы математической статистики».

Содержание материала является теоретической основой дошкольного и школьного курса математики.

В разделе «Множества, отношения между множествами и операции над ними» определяется общетеоретическая база, на которой строится все дальнейшее изложение. Здесь описан теоретико-множественный язык, используемый затем во всем пособии.

В разделе «Величины и их измерение» наряду с геометрическими (длина, площадь, объем) рассматриваются и физические (масса, время) скалярные величины. Такой подход определяется профессиональными требованиями к подготовке педагога дошкольного и начального образования.

В третьем разделе представлены различные подходы к понятию натурального числа. Материал этого раздела особенно важен с точки зрения профессиональной подготовки студентов.

В четвертом разделе рассматриваются позиционные и непозиционные системы счисления, запись и чтение чисел в десятичной системе счисления.

В пятом разделе раскрывается понятие «текстовая задача», дается ее определение, структура задачи, виды задач. Решение текстовой задачи раскрывается как переход от словесной модели реальной ситуации к математической.

Раздел «Геометрические фигуры» направлен на рассмотрение возникновения и развития геометрии как науки, на изучение геометрических фигур на плоскости и в пространстве.

В седьмом разделе рассматриваются правила приближенных вычислений, округления чисел, абсолютная и относительная погрешности.

Восьмой раздел посвящен основным понятиям математической статистики, здесь раскрывается статистическая обработка информации и результатов исследования.

В результате освоения дисциплины обучающийся научится:

— применять математические методы для решения профессиональных задач;
— решать текстовые задачи;
— выполнять приближенные вычисления;
— проводить элементарную статистическую обработку информации и результатов исследования;
— представлять полученные данные графически.

При освоении данной дисциплины у обучающихся формируются знания:

— о множестве, отношениях между множествами, операциях над ними;
— о величинах и их измерении;
— об истории создания систем единиц измерения величин;
— об этапах развития понятия натурального числа и нуля;
— о системах счисления;
— о текстовой задаче и процессе ее решения;
— об истории развития геометрии;
— об основных свойствах геометрических фигур на плоскости и в пространстве;
— о правилах приближенных вычислений;
— о методах математической статистики.

Данное пособие может быть использовано как для работы под руководством преподавателя, так и для самостоятельного изучения курса математики.

1

Множества, отношения между множествами и операции над ними

1.1. Понятие множества

Основоположником теории множеств по праву считается немецкий математик Георг Кантор (1845–1918). В основе данной теории лежит понятие множества. Г. Кантор писал: «Множество есть многое, мыслимое нами как единое». Исходя из этого, множество рассматривалось им как собрание (совокупность) каких-либо предметов реального мира, которые обладают общим свойством. Другими словами, множество — это совокупность предметов, рассматриваемая как один предмет.

Например, учащиеся одного класса — множество, элементы которого — учащиеся, общее свойство — обучение в одном классе.

Следует иметь в виду, что сказанное не является определением понятия множества, оно всего лишь раскрывает смысл этого понятия. *Множество* — это основное неопределяемое понятие в математике, в соответствии с чем оно не определяется через другие. Его суть можно пояснить на примерах: *группа* студентов, *коллектив* педагогов, *набор* красок и др. Выделенные курсивом слова имеют тот же смысл, что и слово «множество».

Термин «множество» в разговорной речи чаще всего употребляется, когда речь идет о большом количестве предметов. В теории множеств рассматриваются разные множества и бесконечные множества, и множества, состоящие из одного или нескольких объектов, и множества, не содержащие ни одного объекта, — *пустые* множества.

Множества в математике обозначают заглавными буквами латинского алфавита: A, B, C, D... Пустое множество обозначается символом $\varnothing$.

Элементами множества называют объекты, из которых оно образовано. Элементы обозначают строчными буквами латинского алфавита: a, b, c, d...

Отношение между множеством и его элементами выражают словами «является элементом» или «принадлежит». Предложение «Элемент a принадлежит множеству A» обозначается следующим образом: $a \in A$. Если же a не является элементом множества A, то есть не принадлежит ему, то пишут $a \notin A$.

Множества по количеству элементов бывают: *пустые* (не имеют ни одного элемента), *конечные* (число элементов можно выразить конкретным натуральным числом), *бесконечные* (число элементов нельзя выразить конкретным натуральным числом). Например, множество месяцев в году — конечное множество, множество капель воды в море — бесконечное.

Также в математике выделяют *универсальное множество* — такое множество, подмножество которого рассматривается в данной задаче. Универсальное множество обозначается буквой U.

Например, если в задаче рассматриваются треугольники, четырехугольники, пятиугольники, то в качестве универсального выступает множество многоугольников (так как все перечисленные фигуры являются многоугольниками).

В детском саду в качестве универсального множества можно использовать блоки Дьенеша (логические блоки). В комплект входит 48 блоков. Каждый блок обладает 4 свойствами: имеет определенную форму, цвет, размер и толщину. Имеется 4 формы (круг, квадрат, треугольник и прямоугольник), 3 цвета (красный, синий, желтый), 2 размера (большой и маленький) и 2 толщины (тонкий и толстый). Может применяться также плоский вариант: 24 фигуры разной формы, цвета и размера, толщина у всех фигур одинаковая. Данные блоки применяются при выполнении различных заданий. Например: «Выберите из всех фигур только красные фигуры», «Найдите желтые треугольники» и т.п.

Если элементами множества являются числа, то такие множества называют *числовыми*. Данные множества имеют стандартные обозначения: N — множество натуральных чисел, N_0 — множество целых неотрицательных чисел, Z — множество целых чисел, Q — множество рациональных чисел, R — множество действительных чисел. Перечисленные числовые множества являются бесконечными. В качестве универсального множества здесь выступает R — множество действительных чисел.

В математике в большей мере используются бесконечные множества (точки, фигуры, числа и др.), но основные математические идеи и логические структуры могут быть смоделированы на конечных множествах.

При обучении детей дошкольного и младшего школьного возраста математике обычно используются конечные множества. Элементами таких множеств могут быть самые разнообразные предметы любой природы — как конкретные (машинки, куклы, тетради, карандаши, муляжи фруктов, овощей, посуда и т.п.), так и изображения таких предметов.

1.2. Способы задания множеств

В математике множество считается заданным, если о любом объекте можно сказать, принадлежит он этому множеству или нет.

Существует два способа задания множеств. Первый способ связан с перечислением всех элементов, принадлежащих множеству, в произвольном порядке. Так, если a, b, c, d, e — обозначения различных объектов, то множество A, содержащее все эти объекты, записывают как $A = \{a; b; c; d; e\}$.

Описанный способ применяется только для конечных множеств при условии, что в нем небольшое количество элементов.

Например:

A — множество цифр: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

B — множество дней недели: B = {понедельник, вторник, среда, ..., воскресенье}.

Второй способ задания множеств используется в случае, когда задать множество перечислением его элементов трудно или невозможно (например, бесконечные множества). В данном способе указывают характеристическое свойство элементов множества.

Характеристическое свойство элементов множества — это такое свойство, которым обладает каждый элемент, принадлежащий данному множеству, и не обладает ни один элемент, ему не принадлежащий.

Множество элементов A, обладающих характеристическим свойством P, в математике принято обозначать так: $A = \{x \mid P(x)\}$, где x — элемент множества A. Читается: множество всех x таких, что x обладает свойством $P(x)$. Кроме буквы x можно использовать любые другие буквы латинского алфавита.

Например, множество C однозначных натуральных чисел, которые делятся на 3, запишется так:

$$C = \{\, x \mid x \in N, x < 10, x \text{ делится на } 3\}.$$

Таким образом, для того чтобы задать некоторое множество, надо либо перечислить его элементы, либо указать характеристическое свойство его элементов. Часто одно и то же множество может быть задано тем и другим способом.

Например:

$A = \{x \mid x \in N, x - 4 = 3\}$ — это конечное множество, и его можно задать перечислением элементов: $A = \{7\}$.

$B = \{x \mid x \in R, 4 < x < 9\}$ — бесконечное множество, а именно, числовой промежуток (4, 9).

$C = \{x \mid x \in N, x^2 + 12 = 3\}$ — это пустое множество, $C = \{\varnothing\}$, т.к. ни одно натуральное число не удовлетворяет данному уравнению.

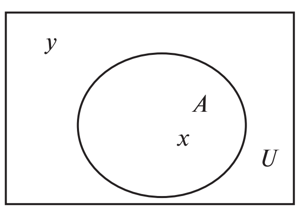
Уметь задавать множества разными способами очень важно. Этому обучаются уже дети дошкольного и младшего школьного возраста.

Например:

1. Детям предлагается задание: «Назовите числа, которые больше 3, но меньше 7». В формулировке задания указывается характеристическое свойство множества «быть больше 3 и меньше 7». Для выполнения задания нужно перечислить элементы множества: 4, 5, 6.
2. Задание для детей: «Скажите, что это за множество: {1 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}». В формулировке задания множество задано перечислением его элементов. При ответе нужно указать характеристическое множество: «Это однозначные числа».

Смысл упражнений — перейти от одного способа задания множества к другому.

Для наглядного изображения множеств используются специальные чертежи, которые в математике называются диаграммами Эйлера–Венна. Для этого множества, сколько бы они ни содержали элементов, представляют в виде кругов (овалов). Точки, находящиеся внутри круга, считаются элементами множества. Точки, находящиеся за кругом, обозначают элементы, не принадлежащие данному множеству. Универсальное множество чаще всего изображают с помощью прямоугольника.



На рисунке показано, что $x \in A$, а $y \notin A$.

Задания, связанные с понятиями «множество» и «элементы множества», пронизывают весь процесс обучения в детском саду и начальной школе. Выше уже были представлены некоторые примеры. Аналогичные задания встречаются и в других предметах: «Перечислите всех домашних животных, изображенных на картинке», «Назовите все цвета радуги» и т.д.

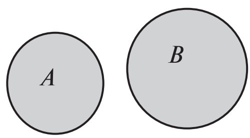
1.3. Отношения между множествами

Ранее мы рассмотрели понятие множества, элементы множества. Однако в математике изучаются не только сами множества, но и отношения, взаимосвязи между ними.

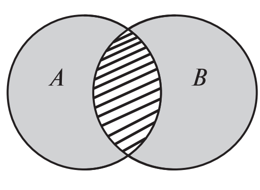
Пусть даны два произвольных множества A и B. Элемент, принадлежащий одновременно множеству A и множеству B, называют *общим элементом* этих множеств.

Рассмотрим следующие ситуации:

- ✓ **Если множества *A* и *B* не имеют общих элементов,** то их называют *непересекающимися*. В данном случае говорят, что множества A и B находятся в отношении ***непересечения***.
  Например, A — множество кругов, B — множество треугольников.
  На диаграмме Эйлера–Венна непересекающиеся множества можно изобразить следующим образом:



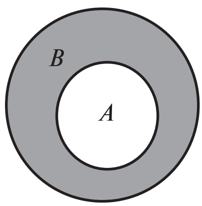
- ✓ **Если множества *A* и *B* имеют общие элементы,** то между ними возможны следующие 4 случая отношений.
  1. Не все элементы множества A принадлежат множеству B и не все элементы множества B принадлежат множеству A. В этом случае говорят, что множества A и B находятся в отношении ***пересечения***. Сами множества A и B называются *пересекающимися*.
  Например, A — множество двузначных чисел, B — множество чисел, которые делятся на 5.
  Изобразим пересекающиеся множества на диаграмме Эйлера–Венна:



2. Все элементы множества A принадлежат множеству B, но множество B содержит элементы, не принадлежащие множеству A. В данном случае говорят, что множества A и B находятся в отношении ***включения*** и множество A *включается* в множество B.

Например, A — множество хвойных деревьев, B — множество деревьев.

При изображении этих множеств на диаграмме Эйлера–Венна следует круг, изображающий множество A, полностью поместить в круг, изображающий множество B:



Если каждый элемент множества A принадлежит множеству B, то A называют *подмножеством* множества B. Для обозначения данной ситуации используется знак $\subset$, т.е. $A \subset B$. Прочитать эту символическую запись можно по-разному: A подмножество B, A включено в B, A включается в B, A принадлежит B, A содержится в B и др.

Свойства отношения включения:

1) Рефлексивность: любое множество является подмножеством самого себя, т.е. для всякого множества A: $A \subset A$.

2) Транзитивность: для любых множеств A, B, C, если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$.

3) Пустое множество является подмножеством любого множества, т.е. для всякого множества A: $\varnothing \subset A$.

Пустое множество $\varnothing$ и само множество A называют несобственными подмножествами множества A. Все остальные подмножества множества A называются собственными.

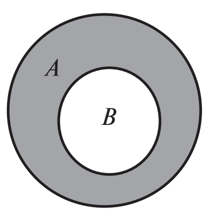
В качестве примера выполним задание: «Выделить все подмножества множества $A = \{1, 3, 5\}$». Сначала выделим одноэлементные подмножества $\{1\}, \{3\}, \{5\}$, затем двухэлементные $\{1, 3\}$, $\{1, 5\}$, $\{3, 5\}$. Исходя из написанных выше свойств, выделим еще два подмножества — само множество A и пустое множество $\varnothing$. Таким образом, множество A содержит 8 подмножеств.

В математике доказано, что если во множество A входит n элементов, то количество его подмножеств определяется по формуле 2^n.

В приведенном примере в множестве А содержится 3 элемента. Подставляем в формулу, получаем $2^3 = 8$. Таким образом, при выполнении задания мы нашли все подмножества множества A.

3. Все элементы множества B принадлежат множеству A, но множество A содержит элементы, не принадлежащие множеству B. В этом случае говорят, что множество *B включается* в множество A.

Эта ситуация похожа на предыдущую ситуацию. Только в ней наоборот: множество B содержится в A. При изображении этих множеств на диаграмме Эйлера–Венна следует круг, изображающий множество B, полностью поместить в круг, изображающий множество A:



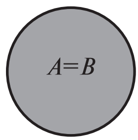
4. Если все элементы множества A принадлежат множеству B и все элементы множества B принадлежат множеству A, то в этом случае множества A и B находятся в отношении ***равенства***. Множества A и B в данном случае называются *равными*.

Два множества A и B называются *равными*, если $A \subset B$ и $B \subset A$, или, по-другому, два множества A и B *равны*, если они состоят из одних и тех же элементов.

Например, A — множество равносторонних треугольников, B — множество треугольников с равными углами.

Равенство множеств A и B обозначают символом $A = B$ и читают «A равно B».

На диаграмме Эйлера–Венна равные множества изображают в виде одного круга:



Свойства отношения равенства:

1) Рефлексивность: любое множество равно самому себе, т. е. для всякого множества A: $A = A$.

2) Симметричность: для любых множеств A и B, если $A = B$, то и $B = A$.

3) Транзитивность: для любых множеств A, B, C, если $A = B$ и $B = C$, то $A = C$.

Изобразим в виде блок-схемы алгоритм определения отношений между множествами A и B (рис. 1) [1].

Устанавливать отношения между множествами — важное умение для педагога. Дело в том, что математика и другие науки изучают не только определенные объекты и явления, но и взаимосвязи, в том числе и отношения между множествами.

В процессе обучения дети могут встретиться с такими заданиями: «Выдели из предложенных фигур прямоугольники», «Назови из данных грибов несъедобные», «Раскрась только круги» и др. В этих заданиях детям приходится выделять часть некоторой совокупности, то есть они находят подмножества данных множеств с помощью некоторого свойства.

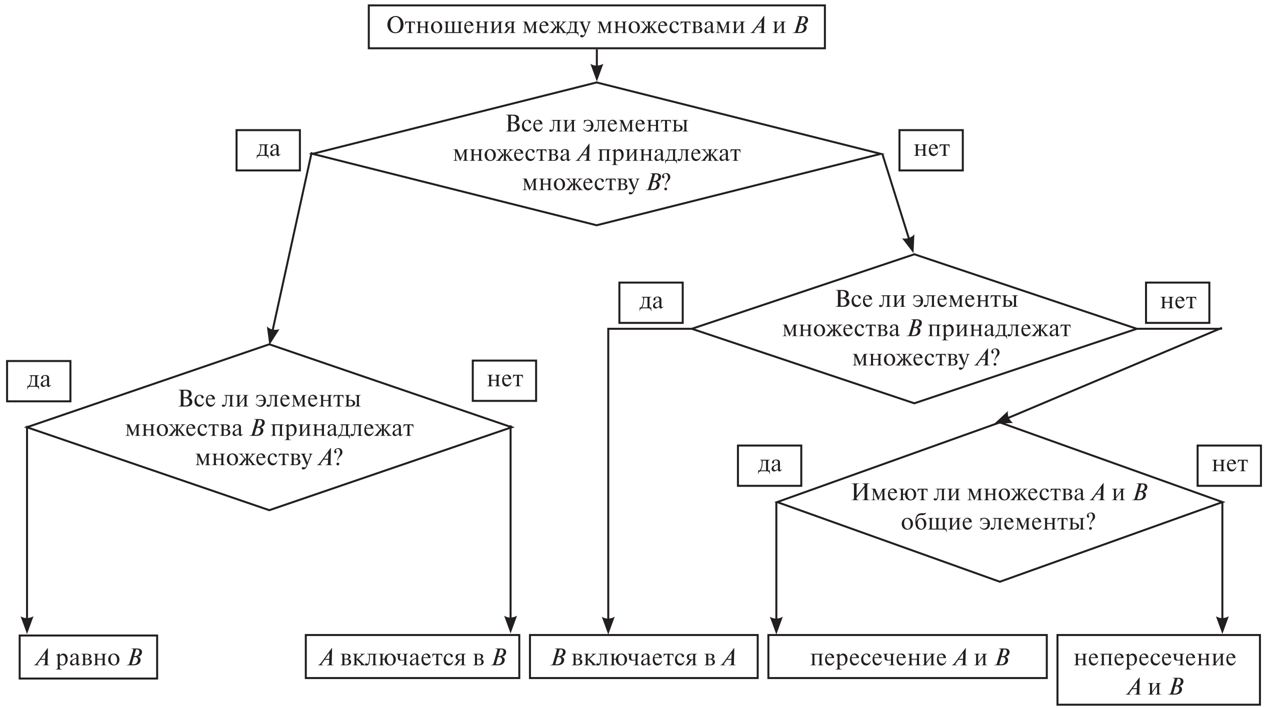


Рис. 1. Блок-схема алгоритма определения отношений между множествами *A* и *B*

В детском саду выделение подмножества может быть смоделировано с помощью игры с одним обручем. Например, на полу располагается один обруч. У каждого ребенка в руке один блок (из набора блоков Дьенеша). Дети по очереди располагают блоки в соответствии с заданием воспитателя, например, внутри обруча — все квадраты, а вне обруча — все остальные. После решения задачи дети отвечают на вопросы: «Какие блоки лежат внутри обруча?», «Какие блоки лежат вне обруча?» При ответе на второй вопрос необходимо, чтобы дети использовали термин «не квадраты».

1.4. Операции над множествами

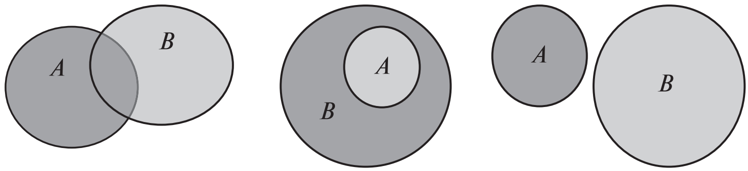
Из элементов двух и более множеств можно образовать новые множества. Считают, что эти новые множества получены путем выполнения операций над множествами. По аналогии с операциями над числами: если взять два числа, то после выполнения операции сложения или вычитания получим новое число. Известно, что над числами можно выполнять такие операции, как сложение, вычитание, умножение, деление. Над множествами выполняются следующие операции: объединение, пересечение, вычитание, декартово произведение. Рассмотрим эти операции.

Объединением множеств A и B называется множество, содержащее те и только те элементы, которые принадлежат множеству A или B.

Объединение обозначается с помощью символа $A \cup B$. Знак $\cup$ легко запомнить — он похож на недописанную букву О.

Определение объединения с помощью символов можно записать так: $A \cup B = \{x \mid x \in A$ или $x \in B\}$.

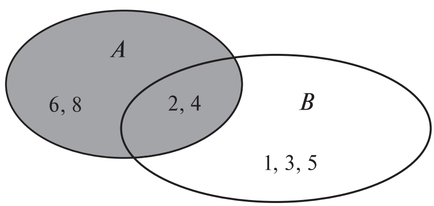
На диаграммах Эйлера–Венна объединение множеств A и B, находящихся в разных отношениях, изображается следующим образом:



На всех трех рисунках объединение A и B — области, закрашенные темно-серым и светло-серым цветом. Во втором случае: так как $A \subset B$, то $A \cup B = B$.

Рассмотрим примеры, раскрывающие каждую ситуацию, изображенную на рисунках.

Пусть даны множества: $A = \{2, 4, 6, 8\}$ и $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Подчеркнем общие элементы множеств A и B, чтобы не повторять их два раза. Тогда объединение множеств A и B будет равно: $A \cup B = \{\underline{2}, \underline{4}, 6, 8\} \cup \{1, \underline{2}, 3, \underline{4}, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$.



Пусть даны множества: $A = \{\text{р}, \text{о}, \text{к}\}$ и $B = \{\text{с}, \text{у}, \text{р}, \text{о}, \text{к}\}$. Из условия видно, что все элементы множества A принадлежат и множеству B, т.е. $A \subset B$. Найдем объединение этих множеств: $A \cup B = \{\underline{\text{р}}, \underline{\text{о}}, \underline{\text{к}}\} \cup \{\text{с}, \text{у}, \underline{\text{р}}, \underline{\text{о}}, \underline{\text{к}}\} = \{\text{с}, \text{у}, \text{р}, \text{о}, \text{к}\}$, т.е результат объединения равен всему множеству B.

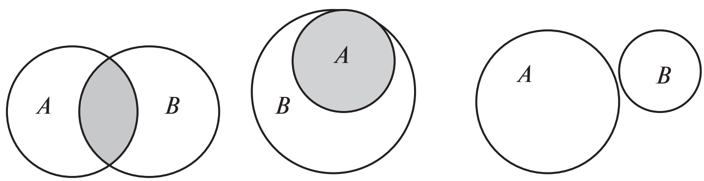
Для третьей ситуации рассмотрим случай, когда множества A и B заданы характеристическими свойствами их элементов. Так, свойство элементов множества A — «быть съедобным грибом», а свойство элементов множества B — «быть несъедобным грибом». Тогда объединением множеств A и B будет множество, элементы которого обладают следующим характеристическим свойством: «быть съедобным или несъедобным грибом», т.е. все грибы.

Пересечением множеств A и B называется множество, состоящее из тех и только из тех элементов, которые принадлежат множеству A и множеству B одновременно.

Обозначается пересечение с помощью символа $A \cap B$. Символ перечесения $\cap$ легко запомнить — он похож на закругленную букву П.

Определение пересечения с помощью символов можно записать в виде: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$.

На диаграммах Эйлера–Венна пересечение множеств A и B, находящихся в разных отношениях, изображается следующим образом:

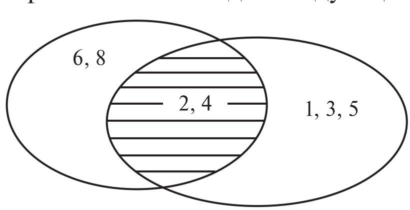


На всех трех рисунках пересечением множеств A и B является закрашенная область. Во втором случае: так как $A \subset B$, то $A \cap B = A$. В третьем случае: так как множества A и B непересекающиеся, то, соответственно, у них нет общих элементов и их пересечение равно пустому множеству.

Рассмотрим примеры. За основу возьмем примеры множеств, представленные при рассмотрении операции объединения.

$A = \{2, 4, 6, 8\}$ и $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Тогда пересечение множеств A и B будет равно: $A \cap B = \{\underline{2}, \underline{4}, 6, 8\} \cap \{1, \underline{2}, 3, \underline{4}, 5\} = \{2, 4\}$.

На диаграмме это выглядит следующим образом:



A = {р, о, к} и B = {с, у, р, о, к}. Из условия видно, что все элементы множества A принадлежат и множеству B,

4

Системы счисления

4.1. Позиционные и непозиционные системы счисления

Как было отмечено в предыдущей теме, понятие числа возникло в глубокой древности из практических потребностей людей. В это же время возникла необходимость в названии чисел и их записи.

Под *системой счисления* понимают язык для наименования чисел, их записи и для выполнения действий над ними.

Древними людьми для осуществления счета были придуманы различные способы: они делали небольшие зарубки на палке, ветке, завязывали на веревке узлы, использовали мелкие предметы (ракушки, камешки, листья и т.п.), а в дальнейшем стали использовать пальцы рук и ног.

Использование зарубок на палке или узлов на веревке для «записи» чисел было не слишком удобным, так как возникали ситуации, при которых приходилось делать много зарубок (узлов), это затрудняло как запись, так и сравнение чисел друг с другом. Кроме этого было трудно выполнять действия над ними. Вследствие этого начали появляться экономичные записи чисел: стали вести счет группами, состоящими из одинакового количества элементов, например, встречались группы по 5, 10, 12, 20, 60 элементов. Так, в частности, были племена, которые использовали для счета только пальцы одной руки (у этих племен пятеричная система счета), в других племенах, в которых люди ходили босиком, для счета использовали пальцы как рук, так и ног, поэтому у них довольно большое распространение получила двадцатеричная система счисления. В Древнем Вавилоне использовали для счета группы по 60 единиц. Данная система используется и в настоящее время при измерении времени.

Однако все-таки самой распространенной системой счисления была десятичная, которая возникла в Индии в VI веке. Данная система основана на группировании предметов десятками, а начало свое она берет от счета на пальцах, на каждой руке — по 5 пальцев, на двух руках — 10 пальцев.

Таким образом, людьми было создано много различных способов записи чисел. Способ записи чисел с помощью цифр, который принят теперь во всем мире, был создан в Древней Индии. Однако Индия была оторвана от других стран, и арабы были первыми «чужими», которые заимствовали цифры у индийцев.

Европейцы познакомились с достижениями индийской и арабской математики в XI веке. С XIII века стала внедряться десятичная система, и к XVI веку она стала повсеместно использоваться в странах Западной Европы. В России десятичная система счисления стала употребляться начиная примерно с XVII века.

Система счисления — это знаковая система, в которой числа записываются по определенным правилам с помощью символов некоторого алфавита. Символы, с помощью которых записываются числа, называются *цифрами*. Система счисления включает в себя законы, по которым числа записываются и читаются, а также законы, по которым производятся операции над числами.

В математике различают два вида систем счисления: ***позиционная*** и ***непозиционная***.

Позиционная система счисления характеризуется тем, что в ней один и тот же знак (символ) может обозначать различные числа в зависимости от места (позиции), которое занимает этот знак в записи числа. Положение, которое занимает цифра при письменном обозначении числа, называется *разрядом*.

В качестве примера можно привести десятичную систему счисления.

В десятичной системе счисления для записи чисел используется десять знаков, цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. При помощи этих цифр можно записать любое число в данной системе счисления.

В *непозиционной системе счисления* каждый знак (из совокупности знаков, принятых в данной системе для обозначения чисел) всегда обозначает одно и то же число, независимо от места (позиции), занимаемого этим знаком в записи числа. В качестве примера непозиционной системы счисления можно привести римскую систему, которая возникла в средние века и была связана со счетом на пальцах, это отобразилось на обозначении цифр латинскими буквами: I — обозначает один палец, V — раскрытую ладонь (т.е. 5 пальцев), X — две перекрещенные ладони (т.е. 10 пальцев).

Для записи чисел 100 и 1000 используются первые буквы соответствующих латинских слов, *centum* — «сто», *mille* — «тысяча». Таким образом, получается следующее соответствие между десятичной и римской системами счисления:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Знаки I, V, X, L, C, D, M используются для узловых чисел (1, 5,10, 50, 100, 500, 1000). Все остальные числа в римской нумерации получаются при выполнении двух арифметических операций — сложения и вычитания:

1) если знак, соответствующий большему узловому числу, стоит перед знаком меньшего узлового числа, то они складываются (правило сложения).
   Например: III = I + I + I = 3, VI = 6,
   XVIII = X + V + I + I + I = 18;
2) если же, наоборот, знак меньшего узлового числа стоит перед знаком большего узлового числа, то меньший знак вычитается из большего (правило вычитания).
   Например: IV = V – I = 4, IX = X – I = 9, XL = L – X = 40.

В качестве примеров рассмотрим записи нескольких чисел в римской нумерации.

278 — это сто плюс сто (CC) плюс семьдесят, т.е. пятьдесят плюс десять, плюс десять (LXX), плюс восемь (VIII), т.е. пять плюс три раза по I, следовательно, число 278 записывается как CCLXXVIII.

625 — это шестьсот, т.е. пятьсот плюс сто (DC) плюс двадцать, т.е. два раза по десять (XX) плюс пять. Таким образом, число 625 записывается так — DCXXV.

Число 3047 записывается так — MMMXLVII, что обозначает: три тысячи (MMM) плюс сорок, т.е. пятьдесят без десяти (XL), и плюс семь (VII).

Из последнего примера видно, что если число содержит несколько тысяч, то для его записи используется повторение знака M. Если же числа пяти- и шестизначные, то их записывают с помощью маленькой буквы m, слева от которой записывали тысячи, а справа — сотни, десятки, единицы. Например, запись CCXXVIImDCCXLIV обозначает 227 744.

4.2. Запись чисел в десятичной системе счисления

Как было отмечено выше, в десятичной системе счисления для записи чисел используется 10 цифр. Из этих цифр образуются конечные последовательности, которые являются краткими записями чисел. Например, последовательность цифр 82 591 является краткой записью числа 8 дес. тыс. + 2 тыс. + 5 сот. + 9 дес. + 1 или в другом виде: $8 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 1$.

Десятичная запись натурального числа x — это представление его в виде: $x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$, где коэффициенты $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ принимают значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и $a_n \neq 0$.

Сумму $a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$ в краткой форме принято записывать так: $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$.

В данной записи числа 1 (т.е. 10^0), 10 (т.е. 10^1), 10^2, 10^3, … 10^n называют разрядными единицами соответственно первого, второго, третьего, ..., $n + 1$ разряда. Следует иметь в виду, что счет разрядов идет справа налево. Так как эта система десятичная, поэтому 10 единиц одного разряда составляют 1 единицу следующего высшего разряда.

Каждые три разряда, начиная с первого, соединяют в группу, которая называется *классом*. Первый класс называется *классом единиц*, в него входят три разряда — единицы, десятки, сотни.

Следующие три разряда (четвертый, пятый и шестой) объединяются во второй класс, называемый *классом тысяч*. В него входят следующие разряды: единицы тысяч, десятки тысяч, сотни тысяч.

Затем идет третий класс — *класс миллионов*, который состоит тоже из трех разрядов: седьмого, восьмого и девятого, т.е. из единиц миллионов, десятков миллионов и сотен миллионов и т.д. Выделение данных классов упрощает процесс записи и прочтения чисел.

Десятичная запись числа позволяет по-новому взглянуть на сравнение чисел.

Если даны два натуральных числа x и y, запись которых в десятичной системе счисления имеет вид: $x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0$, $y = b_m \cdot 10^m + b_{m-1} \cdot 10^{m-1} + ... + b_1 \cdot 10 + b_0$, то число x меньше числа y, если выполнено одно из условий: а) $n < m$ (число разрядов в записи числа x меньше, чем в записи числа y); б) $n = m$, но $a_n < b_n$; в) $n = m$, $a_n = b_n$, ..., $a_k = b_k$, но $a_{k-1} < b_{k-1}$.

Рассмотрим это на примере: пусть $x = 9364$, а $y = 59\,514$. В числе y пять разрядов, а в числе x — четыре, т.е. $n < m$. Поэтому, $x < y$, или $9364 < 59\,514$. Рассмотрим другой пример: пусть $x = 4526$, а $y = 4584$. Начнем сравнение этих чисел со старших разрядов: число тысяч и сотен в записи чисел x и y одинаковое, поэтому смотрим на предыдущие разряды: число десятков в числе x меньше, чем десятков в числе y, поэтому можно сделать вывод, что $x < y$, или $4526 < 4584$.

В десятичной системе каждое число имеет свое название. Для этого имеются названия первых десяти чисел. Названия последующих чисел образуются из данных при помощи следующего способа: название числа получается в соответствии с определением десятичной записи и путем прибавления еще нескольких слов. Рассмотрим, как получается название чисел второго десятка (их можно представить в виде $1 \cdot 10 + a_0$). Они образуются из соединения названий первых девяти натуральных чисел и слова «дцать», видоизмененного от слова *десять*:

11 — *один-на-дцать* — один на десять,

13 — *три-на-дцать* — три на десять,

16 — *шест-на-дцать* — шесть на десять,

19 — *девят-на-дцать* — девять на десять.

Для названия числа 20 используется слово «двадцать», т.е. два десятка.

Для названия чисел третьего десятка, т.е. чисел вида $2 \cdot 10 + a_0$, используют слово «двадцать», к которому прибавляют названия чисел первого десятка: двадцать один, двадцать два, двадцать пять, двадцать девять.

По аналогичной схеме можно получить названия всех остальных чисел до 100. Однако в двух ситуациях появляются особые слова: сорок и девяносто. Словом «сорок» обозначается четыре десятка, а словом «девяносто» — девять десятков. Для обозначения десяти десятков вводится слово сто, которое затем используется для названия чисел второй сотни. Названия чисел от 101 до 199 получаются из слова «сто» и названий чисел первого и последующих десятков: сто один, сто два, ..., сто десять, ..., сто тридцать восемь, ..., сто девяносто девять. Отсчитав эту сотню, получим две сотни, которые называются «двести». Для получения названия чисел, больших двухсот, также используются названия чисел первого и последующих десятков, но теперь их присоединяют к слову «двести». Затем, получая новые сотни: триста, четыреста, пятьсот и т.д., названия даем им с помощью описанного выше способа. Когда отсчитаем десять сотен, то получим особое название *тысяча*.

Далее счет ведется следующим образом: к тысяче прибавляем по единице — одна тысяча один, одна тысяча два, одна тысяча три, ..., одна тысяча двести, ..., одна тысяча пятьсот

Учебное издание

Воронина Людмила Валентиновна,
Утюмова Екатерина Александровна

МАТЕМАТИКА

Ответственный редактор *М.С. Железнякова*
Выпускающий редактор *Г.А. Логвинова*
Технический редактор *А.О. Столярова*

Формат 84×108/32. Бумага типографская № 2.
Тираж 1500 экз. Заказ
Сайт издательства: www.phoenixrostov.ru
Интернет-магазин: www.phoenixbooks.ru

ООО «Феникс», 344011, Россия, Ростовская область,
г. Ростов-на-Дону, ул. Варфоломеева, 150
Тел. (863) 261-89-59, факс (863) 261-89-50

Свои пожелания и предложения
по качеству и содержанию книг
вы можете сообщить по e-mail:
idea@fenixrostov.ru

Изготовлено в России
Дата изготовления: 08.2019.

Изготовитель: АО «Первая Образцовая типография»
филиал «УЛЬЯНОВСКИЙ ДОМ ПЕЧАТИ»
432980, Россия, Ульяновская обл.,
г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14