УДК 51
ББК 22.1
Г96

*Серия «Всё для каждого образованного человека»
основана в 2019 году*

Гусев, Игорь Евгеньевич.

Г96 Математика для каждого образованного человека / И. Е. Гусев. — Москва : Издательство АСТ, 2019. — 208 с.: илл. — (Всё для каждого образованного человека).

ISBN 978-5-17-116959-6.

Математика — уникальный язык мирового общения — связывает не только народы, но и разные области науки. Ученые говорят, что познать мир по-настоящему можно только с помощью математических моделей и расчетов, которые и предлагает эта точная наука. Замечательные и иррациональные числа, кватернионы Гамильтона и коническое сечение Аполлония, струны — в математике и в материи, фракталы Мандельбротта и риманова геометрия — эти и множество других гениальных открытий представлены на страницах этой книги.

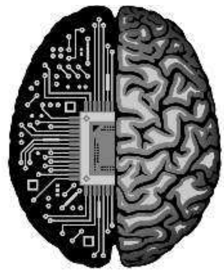
УДК 51
ББК 22.1

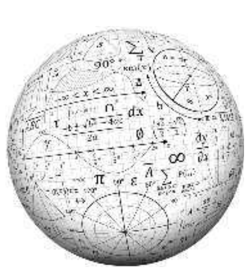
ISBN 978-5-17-116959-6

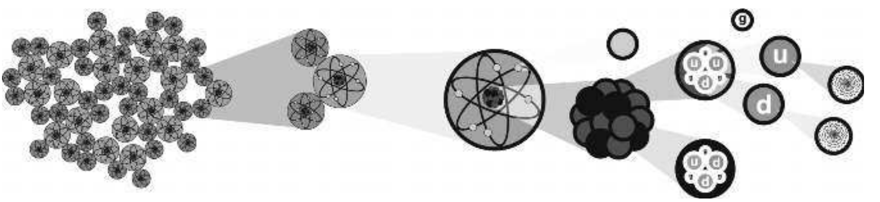
Предисловие

Математика охватывает, пожалуй, все области человеческой деятельности — и строительство, и транспорт, и музыку, и даже языкознание. Физика буквально пронизана математикой, химия и биология также тесно связаны с ней, а инженеры, не обладая математическими знаниями, вообще не смогли бы работать. Недаром Кант сказал: «В каждом отделе естествознания есть лишь столько настоящей науки, сколько в нем математики». И это совсем не удивительно, ведь познать мир по-настоящему можно только с помощью расчетов и моделей, которые как раз и предоставляет математическое знание. Здесь же вполне уместны и слова Галилея: «Книга природы написана на естественном языке разума — языке математики».

Умение находить аксиомы и доказывать теоремы позволяет четко мыслить в любой области знания. Математика только на первый взгляд может показаться далекой от жизни наукой, занимающейся абстрактными вопросами наподобие ленты Мёбиуса, точками вне и внутри замкнутой кривой или отношениями между числами. Все математические модели и идеи рано или поздно находят свое применение либо на практике, либо в других науках, помогая познавать мир. И конечно же, каждый образованный человек должен разбираться в основах этой царицы наук.







АКСИОМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД ЕВКЛИДА

Отличительной особенностью математики является используемый ею метод рассуждения. Основу его составляют набор аксиом и применение к этим аксиомам дедуктивного доказательства (вывода). Слово «аксиома» имеет греческое происхождение и возникло из выражения «мыслить подобающим образом». Само понятие аксиомы — истины, столь самоочевидной, что она ни у кого не вызывает сомнения, — также введено греками.

Иными словами, должно существовать некоторое число утверждений — постулатов, или аксиом, которые принимаются в качестве истинных и доказательство которых не требуется. Из них можно пытаться вывести все другие теоремы путем чисто логической аргументации. Доказать теорему или иное утверждение — значит установить, что эта теорема есть необходимое логическое следствие из тех или иных утверждений; последние, в свою очередь, должны быть доказаны ранее, и т. д.

Выбор аксиом в значительной степени произволен. Однако от них будет мало пользы, если они недостаточно просты или если их слишком много. Далее, система постулатов должна быть совместимой (непротиворечивой) в том смысле, что никакие две теоремы, которые могут быть выведены из них, не должны содержать взаимных противоречий, и полной в том смысле, что всякая теорема, имеющая место в рассматриваемой области, может быть выведена из этих аксиом. Желательно также, чтобы система постулатов была независимой, т. е. чтобы ни один из них не был логическим следствием остальных.

Аксиомы о математических понятиях вводятся для того, чтобы понятия раскрывали те или иные стороны реальности. Скажем, аксиомы для отрицательных и комплексных чисел с необходимостью обязаны отличаться от аксиом для поло-

Евклид (ок. 325 — ок. 265 г. до н. э.), древнегреческий математик. Своим главным трудом — книгами «Начала» — заложил фундамент современной математики. Они стали образцом математического трактата, строго и систематически излагающего основные положения математической науки с помощью аксиоматического метода.

ОН БЫЛ ПЕРВЫМ

Евклид осуществил два великих нововведения. Первое — это идея доказательства. Евклид не считал любое математическое утверждение истинным, пока оно не установлено с помощью последовательности логических шагов, позволяющих вывести данное утверждение из того, что уже известно. Второе нововведение — это осознание того факта, что процесс доказательства должен начинаться с исходных утверждений, которые доказать нельзя. Евклид сформулировал пять таких фундаментальных предположений-постулатов, на которых основываются все его дальнейшие построения. Четыре из них просты и очевидны: любые две точки можно соединить прямой линией; любой конечный отрезок прямой можно продолжить; можно провести окружность с любым центром и любым радиусом; все прямые углы равны между собой.

Фрагмент «Начал» Евклида, найденный в древнеегипетском городе Оксиринх.

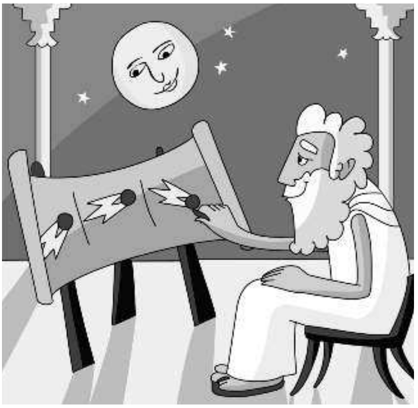
жительных чисел или последние должны по крайней мере допускать обобщения, охватывающие отрицательные и комплексные числа. Но сколь ни фундаментальны понятия и аксиомы, именно дедуктивные выводы из аксиом дают возможность получать полностью новое знание. Из многих типов рассуждений (индуктивных, по аналогии, дедуктивных и т. д.) только дедуктивное гарантирует правильность заключения. Например, делая вывод «Все яблоки красные» на том основании, что тысяча просмотренных нами яблок были красными, мы пользуемся индуктивным рассуждением, поэтому наше заключение ненадежно. Принципы дедуктивного рассуждения, если их применить к любым посылкам, приводят к заключениям столь же надежным, как и посылки. Следовательно, если посылки были истинными, то заключения также будут истинными. Мы можем проверить сколько угодно чисел и убедиться, что каждое из них представимо в виде суммы двух простых чисел. Однако мы не можем утверждать, что наш результат есть математическая теорема, поскольку он не был получен путем дедуктивного доказательства.

Вместе с тем, выдающиеся открытия очень редко оказывались результатом применения чисто аксиоматических методов и дедуктивных рассуждений. Подлинный источник развития математики — это творческая мысль, питаемая интуицией. И если даже некоторые математики считают аксиоматизацию тем идеалом, к которому должна стремиться математика, было бы большой ошибкой считать, что аксиоматика сама по себе является сутью математики. Творческая, конструктивная интуиция ученого привносит в математику недедуктивные и иррациональные моменты, делая ее в этом отношении похожей на музыку или живопись.

РЕЗУЛЬТАТЫ

На основе логических построений, опираясь на свои аксиомы, Евклид получил ряд важных результатов:

- **Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон (это утверждение известно как теорема Пифагора).**
- **Любой угол можно точно разделить на две равные части, используя только циркуль и линейку.**
- **Можно построить правильные многоугольники с 3, 4, 5, 6, 8, 10 и 12 сторонами, используя только циркуль и линейку.**
- **Имеется ровно пять правильных тел: тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр.**



Евклид не только занимался математикой, но и писал труды по астрономии.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Евклид дал определения основным геометрическим понятиям — точке, линии (прямой или искривленной), окружности, прямому углу, плоскости и поверхности. Некоторые понятия он определил довольно точно. «Параллельные прямые, — писал он, — это прямые линии, которые, находясь на одной плоскости, продолженные до бесконечности в обоих направлениях, ни в одном из этих направлений не пересекаются».

ПРИНЦИП МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

Известно, что последовательность натуральных чисел 1, 2, 3, 4, . . . не имеет конца: при ее перечислении, как только достигается некоторое число *n*, вслед за ним сейчас же можно написать ближайшее к нему натуральное число *n* + 1. Желая как-нибудь назвать эти свойства последовательности натуральных чисел, математики говорят, что этих чисел существует бесконечное множество.

Последовательность натуральных чисел представляет простейший и самый естественный пример бесконечного (в математическом смысле), играющего важнейшую роль в современной математике.

Последовательный, шаг за шагом, переход от n к $n + 1$, порождающий бесконечный ряд натуральных чисел, лежит в основе одного из главных методов рассуждений, используемых в этой науке, — метода (или принципа) математической индукции. Это основной принцип, на котором строятся математические доказательства. Скажем, подавляющее большинство формул, справедливых для натуральных чисел, могут быть доказаны методом математической индукции.

В общем смысле индукцией называют переход от частных утверждений к общим. Напротив, переход от общих утверждений к частным называется дедукцией.

Таким образом, индукция позволяет получить множество общих утверждений на основе известных или очевидных фактов. А метод математической индукции призван определить справедливость полученных утверждений.

Обозначим через A некоторое утверждение, относящееся к произвольному натуральному числу n. Ну, например, пусть A будет следующим утверждением: «Сумма углов в выпуклом многоугольнике с $n + 2$ сторонами равна $180° \cdot n$». Или возьмем в качестве примера утверждение: «Проводя n прямых на плоскости, нельзя разбить ее больше чем на $2n$ частей». Чтобы доказать подобного рода теорему для произвольного значения n, недостаточно доказать ее отдельно для первых 10, или 100, или даже 1000 значений n.

Блез Паскаль (1623—1662), французский математик и физик. В трактате «Об арифметическом треугольнике» (1654) дал современное объяснение метода математической индукции.

Принцип математической индукции формулируется следующим образом. Предположим, что требуется установить справедливость бесконечной последовательности математических утверждений $A_1, A_2, A_3, \ldots$, которые, будучи совместно взятыми, образуют некоторое общее утверждение A.

Допустим, что: а) проведено математическое рассуждение, показывающее, что если верно A_r, то верно и A_{r+1}, каково бы ни было натуральное число r, и б) установ-

ЧАСТНОЕ И ОБЩЕЕ

Число 128 делится на 2 без остатка — пример частного утверждения. Из него можно сформулировать немало более общих утверждений, причем как истинных, так и ложных. К примеру, более общее утверждение, что все целые числа, оканчивающиеся на 8, делятся на 2 без остатка, является истинным, а утверждение, что все трехзначные числа делятся на 2 без остатка, ложно.

лено, что A_1 верно. Тогда все предложения нашей последовательности верны и, следовательно, предложение A доказано.

Пример 1: арифметическая прогрессия. Каково бы ни было значение n, сумма $1 + 2 + 3 + . . . + n$ первых n натуральных чисел равна $\frac{n(n+1)}{2}$.

Решение.

Чтобы доказать эту теорему по принципу математической индукции, мы должны для произвольного значения n установить справедливость соотношения A_n:

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

1. Если r — некоторое натуральное число и если известно, что утверждение A_r справедливо, т. е. если известно, что

$$1 + 2 + 3 + ... + r = \frac{r(r+1)}{2},$$

то, прибавляя к обеим частям последнего равенства по $r + 1$, мы получаем:

$$1 + 2 + 3 + ... + r + (r + 1) = \frac{r(r+1)}{2} + (r+1) =$$

$$= \frac{r(r+1)+2(r+1)}{2} = \frac{(r+1)\,(r+2)}{2},$$

а это как раз и есть утверждение A_{r+1}.

2. Утверждение A_1, очевидно, справедливо, так как $1 = 1 \cdot 2/2$.

Итак, по принципу математической индукции утверждение A_n справедливо при любом n.

Принцип математической индукции применяется и в геометрии.

Пример 2. Доказать, что число диагоналей выпуклого n-угольника G_n равно $\frac{n(n-3)}{2}$.

Доказательство.

1. При $n = 3$ утверждение справедливо, ибо в треугольнике $G_3 = \frac{3(3-3)}{2} = 0$ диагоналей.

2. Предположим, что во всяком выпуклом k-угольнике имеется $G_k = \frac{k(k-3)}{2}$ диагоналей.

3. Докажем, что тогда в выпуклом $(k + 1)$-угольнике число диагоналей равно $G_{k+1} = \frac{(k+1)(k-2)}{2}$.

Пусть $A_1A_2A_3...A_kA_{k+1}$ — выпуклый $(k + 1)$-угольник. Проведем в нем диагональ A_1A_k. Чтобы подсчитать общее число диагоналей этого $(k + 1)$-угольника, нужно подсчитать число диагоналей в k-угольнике $A_1A_2...A_k$, прибавить к полученному числу $(k - 2)$, т. е. число диагоналей $(k + 1)$-угольника, исходящих из вершины A_{k+1}, и, кроме того, следует учесть диагональ $A_1 A_k$.

Таким образом, число диагоналей $(k + 1)$-угольника равно

$$G_{k+1} = G_k + (k - 2) + 1 =$$

$$= \frac{k(k-3)}{2} + (k-2) + 1 = \frac{(k+1)(k-2)}{2}.$$

Вследствие принципа математической индукции утверждение верно для любого выпуклого n-угольника.

ЕЩЕ ОДИН ПРИМЕР

Докажем формулу

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Метод математической индукции предполагает доказательство в три шага.

1. Проверим равенство для $n = 1$. Имеем

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Это верное равенство.

2. Предположим, что формула $S_k = \frac{k}{k+1}$ справедлива.

3. Докажем, считая предыдущее соотношение справедливым, что

$$S_{k+1} = \frac{k+1}{(k+1)+1} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Сумма $k+1$ первых членов последовательности есть сумма первых k членов исходной числовой последовательности и $(k + 1)$-го члена: $S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$.

Подставляя в это равенство выражение для S_k из п. 2 и проведя элементарные преобразования, получим: $S_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$.

Следовательно, доказано равенство третьего пункта.

Таким образом, выполнены все три шага метода математической индукции и тем самым доказано наше предположение о справедливости формулы $S_n = \frac{n}{n+1}$.

ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ

При решении самых различных задач часто бывают полезны общие принципы, облегчающие нахождение решений. Таковы, например, принципы математической индукции, суперпозиции, аналогии. Здесь рассматривается еще один весьма плодотворный подход — использование так называемого принципа Дирихле. Другие его наименования — принцип ящиков и принцип голубятни. Это утверждение часто оказывается полезным при доказательстве важнейших теорем в теории чисел, алгебре, геометрии.

Наиболее часто принцип Дирихле формулируется в одной из следующих форм: если пять кроликов помещены в четыре клетки, то в одной из клеток находятся не менее двух кроликов; или, другими словами, нельзя посадить пять кроликов в четыре клетки так, чтобы в каждой клетке находилось не более одного кролика.

В более общей форме этот принцип выглядит так: если $n + 1$ кроликов помещены в n клеток, то имеется клетка, в которой находятся не менее двух кроликов. Это тривиальное утверждение можно обобщить: если $2n + 1$ кроликов помещены в n клеток, то по крайней мере в одной клетке находятся не менее трех кроликов.

Существует еще более общая форма принципа Дирихле, включающая все предыдущие: если $kn + 1$ кроликов помещены в n клеток, то в одной из клеток находятся не менее $k + 1$ кроликов; или, в эквивалентной форме, нельзя посадить $kn + 1$ кроликов в n клеток так, чтобы в каждой клетке находилось не более k кроликов.

НЕМНОГО ИСТОРИИ

Свои исследования Дирихле проводил с кроликами и контейнерами. Он продемонстрировал, что если поместить, допустим, 5 кроликов в 7 контейнеров, то в среднем в одном контейнере будет находиться 5/7 животного. Однако кролика нельзя разделить на части, следовательно, хотя бы одна клетка будет пустовать (5/7 округляется в меньшую сторону до 0 целых). Точно так же и в обратном случае: если кроликов 7, а ящиков 5, то хотя бы в одном из них будет 2 кролика (7/5 округляется в бо́льшую сторону до 2 целых). Отталкиваясь от этого утверждения, математик пришел к идее, которую сформулировал в форме принципа.

Петер Густав Лежён Дирихле (1805—1859), немецкий математик, сделавший ряд крупных открытий в этой науке, а также высказавший плодотворную идею принципа, получившего его имя.

Принцип Дирихле по традиции принято излагать именно на примере кроликов или голубей и клеток.

Пример 1. В мешке лежат шарики двух разных цветов: черного и белого. Какое

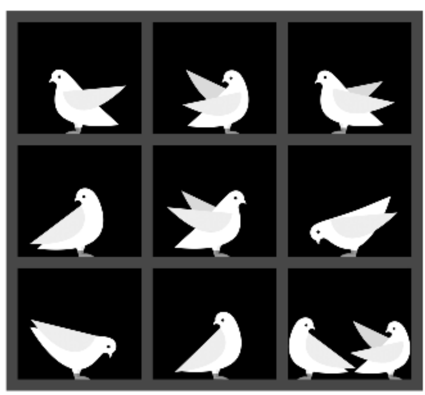


Иллюстрация принципа Дирихле на примере голубей и клеток.

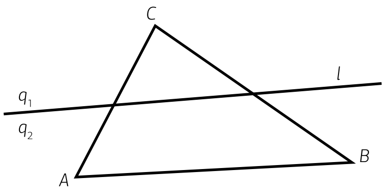
наименьшее число шариков нужно вынуть из мешка вслепую так, чтобы среди них заведомо оказались два шарика одного цвета?

Решение.

Достанем из мешка три шарика. Если бы среди этих шариков было не более одного шарика каждого из двух цветов, то всего было бы не более двух шаров — это очевидно и противоречит тому, что мы достали три шарика. С другой стороны, понятно, что двух шариков может и не хватить. Ясно, что «кроликами» здесь являются шарики, а «клетками» — цвета: черный и белый.

Пример 2. Доказать, что если прямая l, расположенная в плоскости треугольника ABC, не проходит ни через одну из его вершин, то она не может пересечь все три стороны треугольника.

Решение.



Обозначим полуплоскости, на которые прямая l разбивает плоскость треугольника ABC, через q_1 и q_2; эти полуплоскости будем считать не содержащими точек прямой l. Вершины рассматриваемого треугольника (точки A, B, C) будут «кроликами», а полуплоскости q_1 и q_2 — «клетками». Каждый «кролик» попадает в какую-нибудь «клетку» (ведь прямая l не проходит ни через одну из точек A, B, C). Так как «кроликов» три, а «клеток» только две, то найдутся два «кролика», попавшие в одну «клетку»; иначе говоря, найдутся такие две вершины треугольника ABC, которые принадлежат одной полуплоскости (см. рисунок).

Пусть, скажем, точки A и B находятся в одной полуплоскости, то есть лежат по одну сторону от прямой l. Тогда отрезок AB не пересекается с l. Итак, в треугольнике ABC нашлась сторона, которая не пересекается с прямой l.

МНОЖЕСТВА И ОТОБРАЖЕНИЯ

На языке теории множеств (см. раздел «Канторовская алгебра множеств») принцип Дирихле утверждает, что если множество из n элементов разбито на m непересекающихся частей, не имеющих общих элементов, где $n > m$, то по крайней мере в одной части будет более одного элемента. А на языке отображений (раздел «Функции как сердце математического анализа») он выглядит так: если в A (множестве предметов) больше элементов, чем в B (множестве ящиков), то не существует обратимого отображения A в B.

АНАЛОГИ ПРИНЦИПА ДИРИХЛЕ

Существует еще несколько похожих на принцип Дирихле (и столь же очевидных) утверждений, используемых в геометрических и аналитических задачах. Вот они:

1. Если сумма площадей нескольких фигур меньше S, то ими нельзя покрыть фигуру площади S.

2. Если на отрезке длины l расположено несколько отрезков с суммой длин L, то найдется точка, покрытая не более чем $[L]$ этими отрезками.

3. Если тело с объемом V разбили на n частей (которые не имеют общих внутренних точек), то объем наибольшей части не меньше V/n, а объем наименьшей — не больше V/n.

4. Если среднее арифметическое нескольких чисел больше A, то хотя бы одно из этих чисел больше A.

Курт Гёдель (1906—1978), австрийский математик. Доказанная им теорема о неполноте считается одним из величайших достижений научной мысли.

Давид Гильберт (1862—1943), немецкий математик. Выявил и рассмотрел 23 важнейшие нерешенные проблемы, которые сыграли существенную роль в развитии математики на протяжении последующих десятилетий.

СТРОГАЯ ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРЕМЫ ГЁДЕЛЯ

Всякая система математических аксиом, начиная с определенного уровня сложности, либо внутренне противоречива, либо неполна.

ТЕОРЕМА ГЁДЕЛЯ

В 1900 г. в Париже прошел II Международный математический конгресс, на котором крупнейший математик того времени Давид Гильберт изложил в виде тезисов сформулированные им 23 наиважнейшие, по его мнению, задачи, которые предстояло решить математикам наступающего XX в. Гильберт особенно подчеркнул важность доказательства непротиворечивости математики. Подтверждением этому стала проблема, значившаяся в его списке под вторым номером. Это был вопрос: самодостаточна ли математика? Он сводился к необходимости строго доказать, что система аксиом — базовых утверждений, принимаемых в математике за основу без доказательств, — совершенна и полна, то есть позволяет математически описать все сущее. Надо было доказать, что можно задать такую систему аксиом, что, во-первых, они будут взаимно непротиворечивы, а во-вторых, из них можно будет вывести заключение относительно истинности или ложности любого утверждения. Такое свойство называют полнотой аксиоматических систем.

Вспомним школьную геометрию. В евклидовой планиметрии (геометрии на плоскости) можно безоговорочно доказать, что утверждение «сумма углов треугольника равна 180°» истинно, а утверждение «сумма углов треугольника равна 137°» ложно. Если говорить по существу, то в евклидовой геометрии любое утверждение либо ложно, либо истинно, и третьего не дано. И в начале прошлого века математики полагали, что такая же ситуация должна наблюдаться в любой логически непротиворечивой системе.

В 1931 г. австрийский математик Курт Гёдель опубликовал короткую статью, опрокинувшую весь мир так называемой математической логики. После долгих и сложных математико-теоретических выкладок он получил главный результат, который назвали теоремой Гёделя о неполноте.

Она утверждает, что ни одна система математических и логических аксиом не позволяет охватить все содержащиеся в ней истины, не говоря уже о всей математике, поскольку любая система аксиом неполна. В любой аксиоматической системе существуют утверждения, недоказуемые в рамках данной системы. Истинность таких утверждений может быть установлена лишь с помощью неформальных рассуждений.

Теорема Гёделя о неполноте, показавшая, что аксиоматизация имеет свои пределы, разительно отличалась от господствовавших в конце XIX в. представлений о математике как о совокупности аксиоматизируемых (и аксиоматизированных) теорий. Эта теорема нанесла сокрушительный удар по мечтам о всеобъемлющей аксиоматизации математики. Неадекватность аксиоматического подхода сама по себе противоречием не была; однако она явилась полной неожиданностью, поскольку математики предполагали, что в рамках некоторой аксиоматической

ОТ ГЁДЕЛЯ ДО ПЕНРОУЗА

Английский математик Роджер Пенроуз показал, что теоремы Гёделя можно использовать для доказательства наличия принципиальных различий между человеческим мозгом и компьютером. Он рассуждал так. Компьютер действует строго логически и не способен определить, истинно или ложно утверждение *A*, если оно выходит за рамки аксиоматики, а такие утверждения, согласно теореме Гёделя, неизбежно имеются. Человек же, столкнувшись с таким логически недоказуемым и неопровержимым утверждением *A*, всегда способен определить его истинность или ложность, исходя из повседневного опыта. По крайней мере, в этом человеческий мозг превосходит компьютер, скованный чистыми логическими схемами. Человеческий мозг способен понять всю глубину истины, заключенной в теоремах Гёделя, а компьютерный — никогда. Следовательно, человеческий мозг представляет собой что угодно, но не просто компьютер. Он способен принимать решения.

системы любое истинное в ней утверждение заведомо доказуемо.

Выразимся конкретнее. Возьмем любое утверждение типа «Предположение №17 в данной системе аксиом логически недоказуемо» и назовем его утверждением *A*. Так вот, Гёдель попросту доказал следующее удивительное свойство любой системы аксиом: «Если можно доказать утверждение *A*, то можно доказать и утверждение не-*A*».

Иными словами, если можно доказать справедливость утверждения «Предположение №17 недоказуемо», то можно доказать и справедливость утверждения «Предположение №17 доказуемо». То есть, возвращаясь к формулировке второй задачи Гильберта, если система аксиом полна (то есть любое утверждение в ней может быть доказано), то она противоречива.

Единственным выходом из такой ситуации остается принятие неполной системы аксиом. Это значит следующее: приходится мириться с тем, что в контексте любой логической системы у нас останутся утверждения типа *A*, которые являются заведомо истинными или ложными, — и мы можем судить об их истинности лишь вне рамок принятой нами аксиоматики. Если же таких утверждений не имеется, значит, наша аксиоматика противоречива, и в ее рамках неизбежно будут присутствовать формулировки, которые можно одновременно и доказать, и опровергнуть.

Итак, формулировка первой, или слабой, теоремы Гёделя о неполноте: «Любая формальная система аксиом содержит неразрешенные предположения». Но на этом Гёдель не остановился, сформулировав и доказав вторую, или сильную, теорему о неполноте: «Логическая полнота (или неполнота) любой системы аксиом не может быть доказана в рамках этой системы. Для ее доказательства или опровержения требуются дополнительные аксиомы».

ЗНАЧЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ГЁДЕЛЯ

Значение работы Курта Гёделя далеко выходит за пределы собственно математики. Вместе с другими великими научными открытиями первой половины XX столетия — теорией относительности и квантовой механикой — теорема Гёделя продемонстрировала ограниченность формально-логического мышления и механико-детерминистической картины мира, созданной наукой предшествующих столетий. Оказалось, что и материальная природа, и интеллектуальная деятельность, и даже нравственные императивы и социальные процессы подчиняются принципиально другим закономерностям, где имеют место и неустранимая сложность, и неопределенность, и случайность, и необратимость. Так, в обществе непредсказуемость реализуется через феномен личной свободы индивидуума, заложенной в его природе. Именно присутствие человека в качестве субъекта, осуществляющего вольный и непредсказуемый выбор, делает исторический процесс сложным и не подчиняющимся никаким непреложным законам вселенского развития.

АБАК

Развитие древних государств Европы и Азии и усиление торговых связей между ними вызвало потребность в устройстве, облегчающем расчеты при совершении торговых сделок и сборе налогов. В результате было создано устройство абак, известное практически у всех народов.

Ворота Иштар в Вавилоне, где был изобретен первый абак.

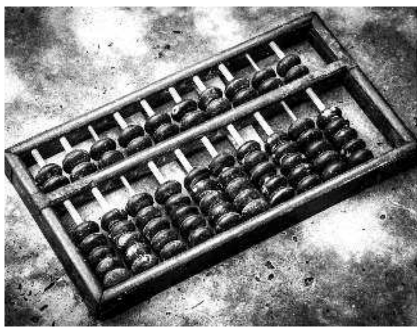
Точно неизвестно, где именно появился абак. Согласно одной из версий — в Древней Вавилонии (первое упоминание о нем относится примерно к 3500 г. до н. э.). Вавилонский абак состоял из деревянной дощечки, посыпанной песком, на который наносились бороздки. В этих бороздках размещались камешки или жетоны, обозначавшие цифры. В Вавилонии использовалась шестидесятеричная позиционная система, поэтому, чтобы не выкладывать в каждой бороздке по 60 камешков, ее делили на две части: в одной помещали камешки, отсчитывающие десятки (не более пяти), а в другой — камешки, отсчитывающие единицы (не более девяти).

При этом количество камешков в первой бороздке обозначало количество единиц, во второй — десяток и так далее. Если в одной бороздке число, отсчитываемое камешками, превышало 59, то камешки снимали и помещали один камешек в следующую бороздку.

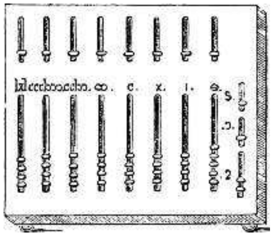
Вычисления на абаке производились перемещением камешков (или похожих объектов: косточек, зернышек и т.п.) в углубления досок (которые в разных странах и веках могли изготавливаться из бронзы, камня, слоновой кости, цветного стекла). Впоследствии вместо насыпных песчаных бороздок на абаке стали расчерчивать полосы и колонки, а еще позднее появились струны и веревки. Однако главный «инновационный» принцип исчисления по разрядам сохранялся. Один и тот же камешек на абаке мог означать и единицы, и десятки, и сотни, и тысячи — в зависимости от того, в каком ряду (полосе) он лежал.

По другой версии, это счетное устройство впервые появилось в Финикии, государстве на восточном побережье Средиземного моря (XIII—VIII вв. до н. э.). Финикийцы активно занимались морской торговлей и пиратством. В Древнюю Грецию абак был завезен именно финикийцами и стал там незаменимым помощником греческих купцов. В 1846 г. на острове Саламин близ Афин был найден отлично сохранившийся мраморный абак той эпохи размером 150 × 75 см.

От греков абак был позаимствован египтянами и древними римлянами. Со време-



Китайский абак суан-пан. Изобретен в конце второго тысячелетия до н. э. Состоял из деревянной рамки, разделенной на верхние и нижние секции. В нижней секции на каждом ряду располагалось по пять косточек, в верхней — по две. Таким образом, для того чтобы выставить на этих счетах число 6, ставили сначала косточку, соответствующую пятерке, а затем добавляли одну косточку в разряд единиц. С помощью суан-пана можно было не только складывать, но и умножать, делить, оперировать с дробями, извлекать квадратные и кубические корни.



Римский абак.

нем его переняли арабы, а через них — испанцы и французы. В Средние века вся банковская система Западной Европы использовала абаки. Первые банки в Европе были созданы рыцарским орденом тамплиеров.

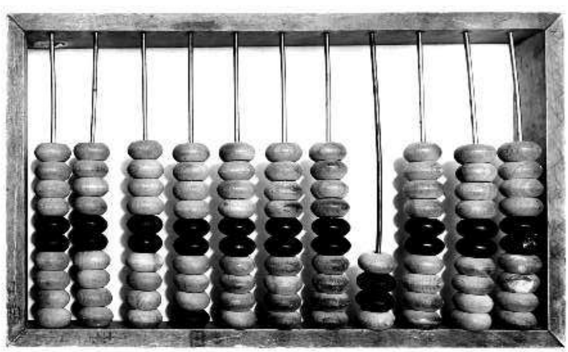
Особая заслуга в совершенствовании и популяризации этого прибора среди европейцев принадлежит ученому и церковному деятелю второй половины X в. Герберту Орильякскому (будущему Папе Римскому Сильвестру II). Он увеличил число разрядных колонок (вместо 12 их стало теперь 27), что позволило оперировать огромными числами (до 10^{27}). Кроме этого, в абак было введено три дополнительные колонки для счета денег и иных мер. Во времена Герберта во многих школах учили искусству работы с абаком. Было создано множество пособий по работе с устройством, благодаря чему оно получило широкое распространение и использовалось вплоть до XVIII в.

Обучение вычислениям на абаке в Средние века.

На Руси долгое время считали по косточкам, раскладываемым в кучки. С XVI в. получили распространение счеты. Для представления чисел использовалась десятичная система счисления. Это, вероятно, было обусловлено тем фактом, что в XVI в. десятичный принцип счисления был впервые применен в денежном деле России. В это время какому-то наблюдательному человеку пришла в голову идея заменить горизонтальные линии счета костьми горизонтально натянутыми веревками, навесив на них, по существу, все те же кости. Возможно, что подсказка пришла от четок, древнейшего примитивного счетного инструмента, который был широко распространен в русском быту в XVI в.

Впрочем, в те времена термина «счеты» еще не существовало, и прибор именовался дощаным счетом. Один из ранних образцов такого устройства представлял собой два соединенных ящика, одинаково разделенных по высоте перегородками. В каждом ящике были два счетных поля с натянутыми веревками или проволочками. На верхних десяти веревках находились по девять косточек (четок), на 11-й — четыре, на остальных веревках — по одной.

Дощаный счет давал возможность производить четыре арифметических действия как с целыми числами, так и с дробями, для вычислений с которыми предназначались неполные ряды дощаного счета с разным количеством костей. Но из дробей рассматривались только 1/2 и 1/3, а также полученные из них при помощи последовательного деления на 2.



Русские счеты, или дощаный счет. Широкое использование счетов началось в XVI—XVIII вв. Тогда они и приняли тот вид, в котором сохранились и поныне. В них осталось лишь одно счетное поле, на спицах которого размещались либо десять, либо четыре косточки (спица с четырьмя четками — дань полушке, денежной единице в 1/4 копейки).

СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Система счисления — это способ записи чисел. Обычно они записываются с помощью специальных знаков — цифр (хотя и не всегда). Всем известны две системы счисления — арабская и римская. В первой используются цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, и это позиционная система счисления. А во второй — I, V, X, L, C, D, M, и это непозиционная система счисления.

В позиционных системах счисления количество, обозначаемое цифрой в числе, зависит от ее позиции, а в непозиционных — нет. Например:
11 — здесь первая единица обозначает десятку, а вторая — единицу;
II — здесь обе единицы обозначают единицу;
345, 259, 521 — здесь цифра 5 в первом случае обозначает пятерку, во втором — 50, а в третьем — 500;
XXV, XVI, VII — здесь, где бы ни стояла цифра V, она везде обозначает пять единиц. Другими словами, величина, обозначаемая знаком V, не зависит от его позиции.
Сложение, умножение и другие математические операции в позиционных системах счисления выполнить легче, чем в непозиционных, т. к. математические операции осуществляются по несложным алгоритмам (например, умножение в столбик, сравнение двух чисел).
В мире наиболее распространены позиционные системы счисления. Помимо знакомой всем с детства десятичной (где используются десять цифр от 0 до 9) в технике широкое распространение нашли такие системы счисления как двоичная (используются цифры 0 и 1), восьмеричная и шестнадцатеричная.

Термины

Основание системы счисления — это количество знаков, которые используются для записи цифр.

Древние китайские мудрецы, изучая мир, описали его с помощью восьми триграмм. Эти сведения были изложены в «Книге Перемен». Лейбниц, изучая ее тексты, заметил соответствие гексаграмм, построенных на основе триграмм, бинарным числам двоичной системы счисления от 0 до 111 111 (что равно 63).

Разряд — это позиция цифры в числе.
Разрядность числа — количество цифр, из которых состоит число (например, 264 — трехразрядное число, 00 010 101 — восьмиразрядное число). Разряды нумеруются справа налево (например, в числе 598 восьмерка занимает первый разряд, а пятерка — третий).
Итак, в позиционной системе счисления числа записываются таким образом, что каждый следующий (движение справа

РУКА КАК ОСНОВА СИСТЕМ СЧИСЛЕНИЯ

Легко понять, что сколько есть чисел, столько же может быть и оснований систем счисления. Но используются только самые удобные. Почему основание наиболее употребительной в быту системы счисления — десять? Потому, что на руках у нас десять пальцев. Правда, на одной руке их только пять. Действительно, существовали и пятеричные системы счисления. А у индейцев майя основанием было число 20 — сообразно количеству пальцев на всех конечностях.

ТВОРЕЦ И ДВОИЧНАЯ СИСТЕМА

Исключительно высоко расценивал двоичную систему немецкий математик Лейбниц. По этому поводу его коллега француз Лаплас отмечал: «В своей бинарной арифметике Лейбниц видел прообраз творения. Ему представлялось, что единица представляет божественное начало, а нуль — небытие и что Высшее Существо создает все сущее из небытия точно таким же образом, как единица и нуль в его системе выражают все числа».

Триграмма (гуа) «Книги Перемен» — графический символ основных процессов, происходящих в живой и неживой природе. Черты (яо) бывают двух родов: цельные или прерванные посредине. В них нетрудно увидеть сходство с цифрами 0 и 1 двоичной системы.

налево) разряд больше другого на степень основания системы счисления.

Одно и то же число можно представить в различных системах счисления. Представление числа при этом различно, а значение остается одним и тем же.

Двоичная система счисления

В двоичной системе счисления используются всего две цифры — 0 и 1. Другими словами, двойка является основанием двоичной системы счисления. (Аналогично у десятичной системы основание — десять.)

Чтобы научиться понимать числа в двоичной системе счисления, сначала рассмотрим, как формируются числа в привычной для нас десятичной системе счисления.

В такой системе имеются десять знаков-цифр (от 0 до 9). Когда счет достигает девяти, то вводится новый разряд (десятки), а единицы обнуляются и их счет начинается заново. После 19 разряд десятков увеличивается на единицу, а единицы снова обнуляются. И так далее. Когда десятки доходят до девяти, то появляется третий разряд — сотни.

Двоичная система счисления аналогична десятичной за исключением того, что в формировании числа участвуют всего лишь две цифры: 0 и 1. Как только разряд достигает своего предела (т. е. единицы), появляется новый разряд, а старый обнуляется.

Попробуем считать в двоичной системе:
0 — это ноль;
1 — это один (и это предел разряда);
10 — это два;
11 — это три (и это снова предел);
100 — это четыре;
101 — пять;
110 — шесть;
111 — семь и т. д.

Перевод чисел из двоичной системы счисления в десятичную

Очевидно, что в двоичной системе счисления длина чисел с увеличением значения очень быстро растет. Как определить, что значит выражение 10 001 001? Непривычный к такой форме записи чисел человек обычно не может сообразить, сколько это. Полезно было бы уметь переводить двоичные числа в десятичные.

В десятичной системе счисления любое число можно представить в форме суммы единиц, десяток, сотен и т. д. Например:

$$1476 = 1000 + 400 + 70 + 6.$$

Можно пойти еще дальше и разложить так:

$$1476 = 1 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0.$$

В этой записи 1, 4, 7 и 6 —это набор цифр, из которых состоит число 1476. Все эти цифры поочередно умножаются на десять, возведенное в ту или иную степень. Десять — это основание десятичной системы счисления. Степень, в которую возводится десятка, — это разряд цифры минус единица.

Аналогично можно разложить и любое двоичное число. Только основанием здесь будет двойка:

$$10\,001\,001 = 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0.$$

Если посчитать сумму составляющих, то в итоге мы получим десятичное число, соответствующее 10 001 001:

$$1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 128 + 0 + 0 + 0 + 8 + 0 + 0 + 1 = 137.$$

Таким образом, число 10 001 001 по основанию два равно числу 137 по основанию десять. Записать это можно так:

$$10\,001\,001_2 = 137_{10}.$$

ПОЧЕМУ ДВОИЧНАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ ТАК РАСПРОСТРАНЕНА

Двоичная система счисления — это язык вычислительной техники. Каждая цифра должна быть как-то представлена на физическом носителе. Если это десятичная система, то придется создать такое устройство, которое может быть в десяти состояниях. Это сложно. Проще изготовить физический элемент, который может быть лишь в двух состояниях (например, есть ток или нет тока). Это одна из основных причин, почему двоичной системе счисления уделяется столько внимания.

Шестнадцатеричная система счисления

Шестнадцатеричная система счисления широко используется в компьютерной науке из-за легкости перевода в нее двоичных чисел. При шестнадцатеричной записи числа получаются более компактными.

В этой системе счисления используются цифры от 0 до 9 и шесть первых латинских букв — A (10), B (11), C (12), D (13), E (14), F (15).

При переводе двоичного числа в шестнадцатеричное первое разбивается на группы по четыре разряда, начиная с конца. В случае, если количество разрядов не делится нацело, то первая четверка дописывается нулями впереди. Каждой четверке соответствует цифра шестнадцатеричной системы счисления (см. таблицу).

Например:

$$10011000101 = 0100\ 1100\ 0101 = 4\ C\ 5 = 4C5.$$

При желании число 4C5 можно перевести в десятичную систему счисления следующим образом (C следует заменить на соответствующее данному символу число в десятичной системе счисления — это 12):

$$4C5 = 4 \cdot 16^2 + 12 \cdot 16^1 + 5 \cdot 16^0 = 4 \cdot 256 + 192 + 5 = 1221.$$

Максимальное двухразрядное число, которое можно получить с помощью шестнадцатеричной записи, — это FF:

$$FF = 15 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0 = 240 + 15 = 255.$$

255 — это максимальное значение одного байта, равного восьми битам: 1111 1111 = = FF. Поэтому с помощью шестнадцатеричной системы счисления очень удобно кратко (с помощью двух цифр-знаков) записывать значения байтов.

Десятичная (основание — 10)	Двоичная (основание — 2)	Шестнадцатеричная (основание — 16)
0	0000	0
1	0001	1
2	0010	2
3	0011	3
4	0100	4
5	0101	5
6	0110	6
7	0111	7

Десятичная (основание — 10)	Двоичная (основание — 2)	Шестнадцатеричная (основание — 16)
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F

Сравнительная таблица трех систем счисления — двоичной, десятичной и шестнадцатеричной.