Оглавление

Предисловие автора

Книга предназначена для тех, кто, обладая знаниями основ школьного курса математики, стремится систематизировать эти знания и успешно сдать вступительные экзамены в вуз.

Каждый раздел пособия содержит необходимый справочный материал и подробно разобранные примеры, взятые из практики вступительных экзаменов в вузы, предъявляющие достаточно высокие требования к математической подготовке абитуриентов. Кроме того, в пособие включены задачи для самостоятельной работы учащихся, расположенные в порядке возрастания трудности. Ко всем этим задачам даны ответы, а к некоторым наиболее трудным — краткие указания. Для удобства пользования книгой ответы приводятся сразу после условий задач параграфа (главы).

В пособие также включены образцы вариантов вступительных экзаменов таких вузов, как МГУ, МФТИ, МГИЭМ, МИРЭА, и др.

Автор стремился подобрать примеры с тем расчетом, чтобы в каждом разделе пособия был предоставлен набор ключевых задач и методов их решения, имея в виду конечную цель: способствовать формированию умений и навыков, необходимых не только для успешной сдачи вступительных экзаменов, но и для повышения уровня математической культуры учащихся.

Работа над пособием, по мнению автора, окажется особенно эффективной, если учащийся сначала попытается самостоятельно решить разобранный в тексте пример, а затем сравнит свое решение с тем, которое приводится в книге.

В работе над пособием автор опирался на многолетний опыт создания учебников и учебных пособий для средней и высшей школы, участия в организации и проведении вступительных экзаменов в Московском физико-техническом институте, чтения лекций по телевидению для поступающих в вузы и на курсах повышения квалификации учителей средних школ.

В седьмое издание включены задачи МФТИ 2003–2013 гг., новые разделы — делимость целых чисел и элементы комбинаторики. Добавлены задачи в §§ 43 и 44 (задачи с параметрами), среди которых — задачи ЕГЭ.

М. И. Шабунин

Глава 1
Действительные числа

§ 1. Необходимые и достаточные условия. Целые и рациональные числа. Метод математической индукции

Справочные сведения

1. ***Прямые и обратные теоремы. Необходимые и достаточные условия.***

а) Формулировка каждой теоремы содержит условие теоремы и заключение. Поменяв местами в формулировке некоторой теоремы условие и заключение, получим формулировку теоремы, обратной данной.

б) Пусть A — некоторое высказывание, т. е. утверждение, о котором имеет смысл говорить, что оно истинно или ложно. Тогда всякое высказывание B, из которого следует A, называется *достаточным условием* для A, а всякое высказывание C, которое следует из A, называется *необходимым условием* для A. В этих случаях пишут: $B \Rightarrow A$, $A \Rightarrow C$.

в) Если высказывания M и N таковы, что каждое из них следует из другого ($M \Rightarrow N$, $N \Rightarrow M$), то говорят, что каждое из этих высказываний является *необходимым и достаточным условием* другого, и пишут $M \Leftrightarrow N$. Тот факт, что $M \Leftrightarrow N$, выражают также следующими формулировками:

- для справедливости M *необходимо и достаточно*, чтобы имело место N;
- M справедливо *тогда и только тогда*, когда выполняется N;
- M имеет место *в том и только в том случае*, если справедливо N.

2. ***Делимость целых чисел.***

а) Множество натуральных чисел обозначают буквой $\mathbf{N}$, а множество целых чисел — буквой $\mathbf{Z}$. Если n — натуральное число, то пишут $n \in \mathbf{N}$, а если k — целое число, то пишут $k \in \mathbf{Z}$.

Натуральное число a записывают так:

$$a = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$$

или в виде суммы

$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0,$

где $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ — цифры соответствующих разрядов.

б) Если r — остаток от деления натурального числа a на натуральное число m, то

$a = mq + r,$

где r может принимать одно из значений $0, 1, \dots, m-1$; q — целое неотрицательное число.

В том случае, когда $r = 0$, говорят, что a делится на m.

в) Если r — остаток от деления натурального числа a на натуральное число m, то:

– остаток от деления на m числа na, где $n \in \mathbf{N}$, равен остатку от деления на m числа nr;

– остаток от деления на m числа a^k, где $k \in \mathbf{N}$, равен остатку от деления на m числа r^k.

г) Если r_1 и r_2 — остатки от деления на натуральное число m натуральных чисел a и b соответственно, то остатки от деления на m чисел $a + b$, $a - b$ и ab совпадают с остатками от деления на m чисел $r_1 + r_2$, $r_1 - r_2$ и $r_1 r_2$ соответственно.

д) Натуральное число делится на 4 тогда и только тогда, когда двузначное число, полученное из данного отбрасыванием всех цифр, кроме двух последних, делится на 4.

е) Натуральное число делится на 3 (на 9) тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3 (на 9).

3. *Метод математической индукции.*

Метод доказательства, называемый *методом математической индукции*, основан на следующем принципе, который является одной из аксиом арифметики натуральных чисел.

Предложение $A(n)$, зависящее от натуральной переменной n, считается истинным для всех $n \in \mathbf{N}$, если выполнены следующие два условия:

а) предложение $A(n)$ истинно для $n = 1$;

б) из предположения, что $A(n)$ истинно для $n = k$ (где k — *любое* натуральное число), следует, что оно истинно и для следующего значения n, т. е. для $n = k + 1$.

Этот принцип называется *принципом математической индукции*.

Под методом математической индукции понимают следующий способ доказательства: во-первых, проверяют истинность высказывания $A(1)$, и, во-вторых, предположив истинность высказывания $A(k)$, пытаются доказать, что истинно высказывание $A(k+1)$. Если это удается доказать (при любом натуральном k), то предложение $A(n)$ считается истинным для всех значений n.

4. ***Рациональные числа.***

а) *Рациональное число* a можно записать в виде

$$a = \frac{p}{q}, \qquad \text{где} \quad p \in \mathbf{Z}, \quad q \in \mathbf{N},$$

а сумма и произведение рациональных чисел $a = \frac{p}{q}$ и $b = \frac{p_1}{q_1}$ определяются равенствами

$$a + b = \frac{pq_1 + qp_1}{qq_1}, \qquad ab = \frac{pp_1}{qq_1}.$$

б) Любое рациональное число можно представить либо в виде конечной десятичной дроби, либо в виде бесконечной периодической десятичной дроби, используя алгоритм деления уголком. Например, $\frac{3}{8} = 0,375$; $-\frac{27}{11} = -2,4545\ldots = -2,(45)$.

Обратно, зная бесконечную периодическую десятичную дробь, можно найти соответствующее этой дроби рациональное число, используя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$a + aq + aq^2 + \cdots = \frac{a}{1-q}, \qquad |q| < 1.$$

Например, $2,4(31) = 2,4 + \frac{31}{10^3} + \frac{31}{10^5} + \cdots = 2,4 + \frac{31}{10^3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10^2}} =$ $= 2\,\frac{427}{990} = \frac{2407}{990}$. Этот же результат можно получить и другим способом. Пусть $x = 2,4(31)$, тогда $10^3 x = 2431,(31)$, $10x = 24,(31)$, откуда $990x = 2431 - 24 = 2407$, $x = \frac{2407}{990}$.

Примеры с решениями

Пример 1. Сформулировать и доказать теорему, обратную теореме Пифагора.

Решение. Условие M теоремы Пифагора можно записать в виде следующего высказывания:

$$M \equiv \{\text{в треугольнике } ABC \text{ угол } C \text{ — прямой}\},$$

а заключение N этой теоремы формулируется так:

$$N \equiv \{c^2 = a^2 + b^2\},$$

где a, b, c — стороны, лежащие против углов A, B и C соответственно.

Справедлива также теорема, обратная теореме Пифагора: если $c^2 = a^2 + b^2$, то угол C — прямой.

Для доказательства этой теоремы можно воспользоваться либо теоремой косинусов, либо третьим признаком равенства треугольников (по трем сторонам).

Пример 2. Выяснить, какое из утверждений A и B следует из другого, используя символы $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$:

1) $A \equiv \{$четырехугольник Q — ромб$\}$,
$B \equiv \{$диагонали четырехугольника Q взаимно перпендикулярны$\}$;

2) $A \equiv \{$произведение чисел x и y равно нулю$\}$,
$B \equiv \{$хотя бы одно из чисел x, y равно нулю$\}$.

Решение. 1) Здесь $A \Rightarrow B$, но из B не следует A.

2) В этом случае $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$, т. е. $A \Leftrightarrow B$.

Пример 3. Доказать, что число $a = n^3 + 17n$ делится на 6 при любом натуральном числе n.

Доказательство. Эту задачу можно решить, применив метод математической индукции. Приведем другой способ решения. Заметим, что натуральное число делится на 6 тогда и только тогда, когда на 6 делится число $a + 6k$, где k — целое число. В частности, число a делится на 6, если число $b = a - 18n = n^3 - n$ делится на 6. Но $b = n^3 - n = (n-1)n(n+1)$ — произведение трех последовательных натуральных чисел, из которых одно делится на 3 и по крайней мере одно делится на 2. Поэтому число b делится на 6, откуда следует, что число a также делится на 6.

Пример 4. Найти последнюю цифру числа $a = 432^{283}$.

Решение. Последняя цифра у числа a такая же, как и у числа 2^{283}. Выпишем последовательные степени двойки:

$$2^1 = 2,\ \ 2^2 = 4,\ \ 2^3 = 8,\ \ 2^4 = 16,\ \ 2^5 = 32,\ \ 2^6 = 64 \text{ и т. д.}$$

Отсюда следует, что последние цифры этих чисел повторяются через 4. Поэтому последняя цифра у числа 2^k такая же, как у числа 2^p, где p — одно из чисел 1, 2, 3, 4, а разность $k - p$ кратна четырем. Так как $283 = 280 + 3$, где 280 делится на 4, то последняя цифра числа 2^{283} — восьмерка ($2^3 = 8$).

Замечание. Если рассматривать последовательные натуральные степени числа 3 (или числа 7), то можно заметить, что последние цифры получаемых чисел повторяются через 4. Поэтому последняя цифра у числа 3^{214} такая же, как у числа 3^2, т. е. девятка, так как $214 = 53 \cdot 4 + 2$.

Аналогично, последняя цифра числа 7^{365} — семерка, так как $365 = 91 \cdot 4 + 1$.

Пример 5. Доказать, что число $a = (x + 7y + 3)^5(5x + 3y + 2)^4$ делится на 16 при любых целых x и y.

Доказательство. Если числа x и y — оба четные или оба нечетные, то $5x + 3y + 2$ — четное число, и поэтому $(5x + 3y + 2)^4$ делится на $2^4 = 16$. Если же одно из чисел x, y — четное, а другое — нечетное, то $x + 7y + 3$ — четное число и поэтому $(x + 7y + 3)^5$ делится на 2^5 и, значит, делится на 16.

Пример 6. Найти остаток от деления числа a на m, если:

1) $a = 37^{51} \cdot 49^{15}$, $m = 3$;
2) $a = 2^{127} + 18^{21}$, $m = 17$.

Решение. 1) Заметим, что если натуральное число n не делится на 3, т. е. $n = 3p \pm 1$, где $p \in \mathbf{N}$, то $n^2 = 3q + 1$, где $q \in \mathbf{N}$. Поэтому остаток от деления на 3 числа n^2 равен 1, если n не делится на 3. Числа 37 и 49 не делятся на 3 и, следовательно, остаток от деления на 3 каждого из чисел $37^{50} = (37^2)^{25}$, 49^{14} равен 1, а остаток от деления на 3 числа a совпадает с остатком от деления на три числа $b = 37 \cdot 49 = (36 + 1)(48 + 1)$, т. е. равен 1.

2) Так как $2^4 = 16 = 17 - 1$, $18 = 17 + 1$, а $127 = 4 \cdot 31 + 3$, то остаток от деления на 17 числа a совпадает с остатком от деления на 17 числа $b = 2^3 \cdot (-1)^{31} + 1^{21} = -8 + 1 = -7$, т. е. равен 10, поскольку $-7 = 17(-1) + 10$.

Ответ. 1) 1; 2) 10.

Пример 7. Доказать, что натуральное число

$$a = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

делится на 11 тогда и только тогда, когда на 11 делится сумма

$$s = a_0 - a_1 + a_2 + \cdots + (-1)^{n-1} a_{n-1} + (-1)^n a_n,$$

т. е. сумма цифр этого числа, взятых с чередующимися знаками.

Доказательство. Остаток от деления на 11 чисел 10^{2k}, где $k \in \mathbf{N}$, равен 1, так как $10^{2k} = \underbrace{99\ldots99}_{2k \text{ цифр}} + 1$, а остаток от деления на 11 чисел 10^{2k+1}, где $k = 0, 1, 2, \ldots$, равен -1, так как $10 = 11 - 1$, $10^{2k+1} = 10^{2k}(11 - 1)$, а остаток от деления на 11 числа 10^{2k} равен 1.

Итак, остаток от деления на 11 числа a равен s.

Пример 8. Доказать, что если число $a \in \mathbf{N}$ не делится на 5, то число $a^4 - 1$ делится на 5.

Доказательство. Пусть r — остаток от деления a на 5. Так как a не делится на 5, то $a = 5k + r$, где $k \in \mathbf{N}$, r — одно из чисел 1, 2, 3, 4. Из равенства $a^4 = (5k + r)^4 = 5p + r^4$, где $p \in \mathbf{N}$, следует, что остаток от деления a^4 на 5 равен остатку от деления r^4 на 5. Так как $1^4 = 1$, $2^4 = 5 \cdot 3 + 1$, $3^4 = 5 \cdot 16 + 1$, $4^4 = 5 \cdot 31 + 1$, то остаток от деления r^4 на 5 при $r = 1, 2, 3, 4$ равен 1. Поэтому остаток от деления $a^4 - 1$ на 5 равен нулю, т.е. число $a^4 - 1$ делится на 5, если a не делится на 5.

Пример 9. Методом математической индукции доказать равенство

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{1}$$

Доказательство. При $n = 1$ равенство (1) является верным $(1 = 1)$. Нужно доказать, что из предположения о том, что является верным равенство (1), следует справедливость равенства

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}, \tag{2}$$

полученного из (1) заменой n на $n + 1$.

Прибавляя к обеим частям (1) слагаемое $(n+1)^2$, имеем

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2. \tag{3}$$

Преобразуя правую часть (3), получаем

$$\frac{n+1}{6}(2n^2 + 7n + 6) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Таким образом, равенство (2) является верным, и поэтому формула (1) доказана для любого $n \in \mathbf{N}$.

Дадим другое доказательство формулы (1), используя символ $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, которым обозначается сумма $a_1 + a_2 + \dots + a_n$, т.е. $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Воспользуемся тождеством

$$(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1. \tag{4}$$

Полагая в (4) $x = 1, 2, \dots, n$ и складывая получаемые равенства, находим

$$\sum_{k=1}^{n} \left[(k+1)^3 - k^3\right] = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + n. \tag{5}$$

Левая часть (5) равна $(n+1)^3 - 1$, а $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Поэтому из (5) получаем

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+1)^3 - (n+1) - \frac{3}{2}n(n+1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2},$$

откуда следует равенство (1).

Пример 10. Доказать, что для любых a, b и при любом $n \in \mathbf{N}$ справедлива *формула бинома Ньютона*

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n = \\ = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k, \qquad (6)$$

где

$$C_n^0 = 1,$$

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{k!}, \quad k = 1, 2 \dots, n; \quad k! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k. \qquad (7)$$

Правую часть формулы (6) называют *разложением бинома*, числа C_n^k — *биномиальными коэффициентами*, слагаемое $C_n^k a^{n-k} b^k$ — k-*м членом разложения бинома.*

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. При $n = 1$ формула (6) верна, так как ее правая часть равна левой: $C_1^0 a + C_1^1 b = a + b$.

Предполагая справедливым равенство (6), докажем, что верна формула

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k. \qquad (8)$$

Умножая обе части равенства (6) на $(a+b)$, получаем

$$(a+b)^{n+1} = A_n + B_n,$$

где

$$A_n = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k a^{n+1-k} b^k,$$

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}.$$

Следовательно,

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^k + C_n^{k-1}) a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}. \qquad (9)$$

Сравнивая правые части равенств (8) и (9), заключаем, что для доказательства формулы (8) достаточно показать, что

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k. \qquad (10)$$

Используя (7), находим

$$C_n^{k-1} = \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-2))}{(k-1)!} = \frac{kn(n-1)\cdots(n-(k-2))}{k!}.$$

Поэтому

$$C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-2))}{k!}(n-(k-1)+k) = \\ = \frac{(n+1)((n+1)-1)\cdots((n+1)-(k-1))}{k!} = C_{n+1}^k.$$

Равенство (10) доказано и поэтому справедливо равенство (8). Итак, формула (6) верна при любом $n \in \mathbf{N}$.

Отметим, что

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))}{k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))(n-k)!}{k!(n-k)!},$$

т. е.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{11}$$

Поэтому формулу (6) можно записать в виде

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k, \qquad \text{где} \quad 0! = 1.$$

Из (11) следует, что

$$C_n^k = C_n^{n-k}. \tag{12}$$

Задачи

1. Выяснить, какое из утверждений A и B следует из другого, используя символы $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$:

1) $A \equiv \{$каждое из чисел a, b делится на $5\}$, $B \equiv \{$сумма $a+b$ делится на $5\}$;

2) $A \equiv \{$последняя цифра числа a четная$\}$, $B \equiv \{$число a делится на $4\}$;

3) $A \equiv \{$треугольник ABC — равнобедренный$\}$, $B \equiv \{$две медианы треугольника ABC равны между собой$\}$;

4) $A \equiv \{$из отрезков, длины которых равны a, b, c, можно составить треугольник$\}$, $B \equiv \{$положительные числа a, b, c связаны неравенствами $a+b>c$, $b+c>a$, $c+a>b\}$.

2. Натуральные числа a и b таковы, что a^2+b^2 делится на 3. Следует ли отсюда, что каждое из чисел a, b делится на 3?

3. Доказать, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9.

4. Доказать, что при любом натуральном n сумма n^3+3n^2+2n делится на 6.

5. Доказать, что при любом натуральном n число a делится на m, если:

1) $a = 7^n + 3^{n+1}$, $m = 4$; 2) $a = 21^n + 4^{n+2}$, $m = 17$;

3) $a = 7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n$, $m = 19$; 4) $a = 6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$, $m = 11$.

6. Доказать, что если натуральное число $\overline{abc}$ делится на 37, то и число $\overline{cab}$ делится на 37.

7. Пусть x и y — такие натуральные числа, что число $7x+5y$ делится на 13. Доказать, что число $41x+46y$ также делится на 13.

8. Найти последнюю цифру числа a, если:

1) $a = 2^{587}$; 2) $a = 3^{375}$;

3) $a = 7^{158}$; 4) $a = 26^{78} + 4^{50}$;

5) $a = 72^{129} + 43^{425}$; 6) $a = 43^{43} - 17^{17}$.

9. Доказать, что число $10^{25} + 10^{17} - 164$ делится на 18.

10. Найти остаток от деления числа a на m, если:

1) $a = 25^{26} + 29^{27}$, $m = 3$; 2) $a = 2^{367} + 43$, $m = 17$.

11. Доказать, что $n^5 - n$ делится на 5 при любом $n \in \mathbf{N}$.

12. Доказать, что произведение $(5m + 3n + 9)^3(m + 7n + 2)^4$ делится на 8 при любых натуральных m и n.

13. Представить рациональное число a в виде бесконечной периодической десятичной дроби, если:

1) $a = \dfrac{14}{99}$; 2) $a = \dfrac{601}{495}$.

14. Записать бесконечную периодическую десятичную дробь a в виде $\frac{p}{q}$, где p и q — натуральные числа, не имеющие общих делителей:

1) $a = 2,(13)$; 2) $a = 1,3(18)$.

15. Методом математической индукции доказать, что при всех $n \in \mathbf{N}$ справедливо равенство:

1) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$;

2) $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \dots + (n-1)n^2 = \dfrac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$.

Ответы

1. 1) $A \Rightarrow B$. 2) $B \Rightarrow A$; 3) $A \Leftrightarrow B$; 4) $A \Leftrightarrow B$. **2.** Да.
8. 1) 6; 2) 7; 3) 9; 4) 2; 5) 5; 6) 0. **10.** 1) 0; 2) 1. **13.** 1) 0,(15); 2) 1,2(14).
14. 1) $\frac{211}{99}$; 2) $\frac{29}{22}$.

§ 2. Действительные числа, степени и корни, логарифмы. Тождественные преобразования алгебраических выражений

Справочные сведения

1. ***Множество действительных чисел.***

а) *Иррациональное число* — бесконечная десятичная непериодическая дробь. Рациональные числа, представимые бесконечными периодическими десятичными дробями, и иррациональные числа образуют *множество действительных чисел* **R**.

б) Арифметические действия и правила сравнения для действительных чисел определяются так, что свойства этих действий, а также свойства равенств и неравенств оказываются такими же, как и для рациональных чисел. Правила сравнения и операции над действительными числами подробно изучаются в курсе высшей математики.

в) *Модулем* действительного числа a называется неотрицательное число (обозначается $|a|$) такое, что

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если} \quad a \geqslant 0, \\ -a, & \text{если} \quad a < 0. \end{cases}$$

2. *Возведение в целую степень.*

а) Определение степени.

Если a — действительное число ($a \in \mathbf{R}$), n — натуральное число ($n \in \mathbf{N}$), то

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}},$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \qquad a \neq 0,$$

$$a^0 = 1, \qquad a \neq 0.$$

б) Свойства степени.

Если $a \neq 0$, $b \neq 0$, m и n — целые числа ($m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$), то

$$a^n a^m = a^{n+m}, \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m},$$
$$(a^n)^m = a^{nm},$$
$$(ab)^n = a^n b^n, \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

в) Степень суммы и разности.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$
$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac,$$
$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a).$$

г) Разность и сумма степеней.

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b),$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2),$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2),$$
$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$
$$a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a+b)(a^{2k} - a^{2k-1}b + a^{2k-2}b^2 - \dots + b^{2k}).$$

3. *Разложение многочлена на множители.*

а) Если $x = a$ — корень многочлена $P_n(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$, где $c_n \neq 0$, т. е. $P_n(a) = 0$, то $P_n(x) = (x-a)Q_{n-1}(x)$, где $Q_{n-1}(x)$ — многочлен степени $n-1$.

б) Если x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена ax^2+bx+c, $a \neq 0$, то

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2).$$

4. *Производные пропорции.*

а) Если $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, то $\dfrac{m_1a+m_2b}{n_1a+n_2b} = \dfrac{m_1c+m_2d}{n_1c+n_2d}$ при условии, что $n_1a+n_2b \neq 0$.

б) Если $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, то $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{m_1a+m_2c}{m_1b+m_2d}$ при условии, что $m_1b+m_2d \neq 0$.

в) Если $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dots = \dfrac{a_n}{b_n}$, то $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{m_1a_1+m_2a_2+\dots+m_na_n}{m_1b_1+m_2b_2+\dots+m_nb_n}$ при условии, что $m_1b_1+m_2b_2+\dots+m_nb_n \neq 0$.

5. *Действия с корнями (радикалами).*

а) *Арифметический корень n-й степени из числа a* (обозначается $\sqrt[n]{a}$, $n \geqslant 2$) — неотрицательное число, n-я степень которого равна a, т. е. если $a \geqslant 0$, $n \in \mathbf{N}$ ($n \geqslant 2$), то

$$\sqrt[n]{a} \geqslant 0, \qquad (\sqrt[n]{a})^n = a.$$

Если $n=2$, то арифметический корень из числа a обозначается $\sqrt{a}$ и называется *арифметическим квадратным корнем*.

б) Свойства арифметического корня ($n \in \mathbf{N}$, $m \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$, $m \geqslant 2$).

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}, \qquad a \geqslant 0, \quad b \geqslant 0;$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \qquad a \geqslant 0, \quad b > 0;$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}, \qquad a \geqslant 0;$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}, \qquad a \geqslant 0.$$

в) Для любого $a \in \mathbf{R}$ справедливо равенство

$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$$

и, в частности,

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

г) Если $a < 0$, то

$$\sqrt[2k+1]{a} = -\sqrt[2k+1]{|a|}.$$

д) Формула «сложного радикала». Если $a \geqslant 0$, $a^2 - b \geqslant 0$, то

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

6. ***Степень с рациональным и действительным показателем.***

а) Степень с рациональным показателем определяется равенством

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \qquad \text{где} \quad a > 0, \quad n \in \mathbf{N}, \quad m \in \mathbf{Z}.$$

б) Свойства степени с рациональным показателем (p, q — рациональные числа, $a > 0$, $b > 0$).

$$a^p a^q = a^{p+q},$$
$$a^p : a^q = a^{p-q},$$
$$(a^p)^q = a^{pq},$$
$$(ab)^p = a^p b^p,$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}.$$

в) Степень с действительным иррациональным показателем x и основанием a, где $a > 0$, определяется как действительное число (обозначается a^x), являющееся пределом последовательности $\{a^{r_n}\}$, где $\{r_n\}$ — последовательность рациональных чисел такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$. При этом для степени с любым действительным показателем справедливы те же свойства, которыми обладает степень с рациональным показателем. Это доказывается в курсе высшей математики.

7. ***Логарифмы.***

а) *Логарифм числа* b, где $b > 0$, *по основанию* a, где $a > 0$, $a \neq 1$ (обозначается $\log_a b$), — показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b, т. е.

$$a^{\log_a b} = b.$$

Это равенство называют *основным логарифмическим тождеством*.

Логарифм числа a по основанию 10 называют *десятичным* и обозначают $\lg a$, а логарифм числа a по основанию e называют *натуральным* и обозначают $\ln a$.

б) Свойства логарифмов.

Если $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $r \in \mathbf{R}$, то

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c,$$
$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c,$$
$$\log_a b^r = r \log_a b.$$

В частности,

$$\log_a a^r = r.$$

в) Формула перехода к новому основанию.

Если $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $c > 0$, $c \neq 1$, то

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Эта формула называется *формулой перехода* от логарифма по основанию a к логарифму по основанию c. Частные случаи формулы перехода:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \qquad a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0, \quad b \neq 1;$$

$$\log_{a^\alpha} b^\beta = \frac{\beta}{\alpha} \log_a b, \qquad a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0, \quad \alpha \neq 0.$$

Примеры с решениями

Пример 1. Упростить выражение

$$A = \left(\frac{a^6 + b^6}{a^4 - b^4} + \frac{a^2b^4 - a^4b^2}{a^4 + b^4 - 2a^2b^2}\right) : (a - b) - b.$$

Решение. Используя формулы для суммы кубов, разности квадратов и квадрата разности, получаем $a^6 + b^6 = (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4)$, $a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$.

Сократив числитель и знаменатель первой дроби на $a^2 + b^2$, а второй дроби — на $a^2 - b^2$, находим

$$A = \left(\frac{a^4 - a^2b^2 + b^4}{a^2 - b^2} - \frac{a^2b^2}{a^2 - b^2}\right) : (a - b) - b =$$

$$= \frac{(a^2 - b^2)^2}{(a^2 - b^2)(a - b)} - b = (a + b) - b = a.$$

Ответ. a.

Пример 2. Упростить выражение

$$A = \frac{8}{1 + a^8} + \frac{4}{1 + a^4} + \frac{2}{1 + a^2} + \frac{1}{1 + a} + \frac{1}{1 - a}$$

и найти его значение при $a = 2^{-\frac{1}{16}}$.

Решение. Сумма двух последних дробей равна $\dfrac{2}{1 - a^2}$, а сумма трех последних дробей равна $\dfrac{4}{1 - a^4}$. Следовательно, $A = \dfrac{8}{1 + a^8} + \dfrac{8}{1 - a^8} = \dfrac{16}{1 - a^{16}}$. Если $a = 2^{-\frac{1}{16}}$, то $A = \dfrac{16}{1 - \frac{1}{2}} = 32$.

Ответ. $\dfrac{16}{1 - a^{16}}$; 32.

Пример 3. Вычислить сумму

$$S = \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \dots + \frac{1}{97\cdot 99} + \frac{1}{99\cdot 101}\,.$$

Решение. В этой задаче речь идет не о приближенном значении суммы, которое можно получить с помощью таблиц или других вычислительных средств, а о точном значении суммы, т. е. о записи S в виде отношения двух натуральных чисел.

Ключевой момент решения задачи — представление дроби $\dfrac{1}{(2K+1)(2K+3)}$ в виде разности двух дробей, т. е. использование равенства

$$\frac{1}{(2K+1)(2K+3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2K+1} - \frac{1}{2K+3}\right).$$

Применяя это равенство, получаем

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \dots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{97} - \frac{1}{99}\right) + $$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{99} - \frac{1}{101}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots - \frac{1}{99} + \frac{1}{99} - \frac{1}{101}\right).$$

Все слагаемые полученной суммы, за исключением первого и последнего, попарно взаимно уничтожаются и поэтому

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{101}\right) = \frac{98}{2\cdot 3\cdot 101} = \frac{49}{303}\,.$$

Ответ. $S = \dfrac{49}{303}$.

Замечание. Метод, использованный в этой задаче, можно применить для вычисления суммы

$$S = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_n a_{n+1}}\,,$$

где a_1, a_2, $\dots$, a_{n+1} — последовательные отличные от нуля члены арифметической прогрессии.

Пример 4. Доказать, что равенство

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc, \tag{1}$$

где a, b, c — положительные числа, является верным тогда и только тогда, когда

$$a = b = c. \tag{2}$$

Решение. Воспользуемся равенством

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac) = a^3+b^3+c^3-3abc. \tag{3}$$

Это равенство справедливо для любых чисел a, b, c, в чем нетрудно убедиться, произведя действия в левой части (3).

Если a, b, c — положительные числа, то из (1) и (3) следует, что должно выполняться равенство

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac=0, \tag{4}$$

которое можно записать в виде

$$\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2\right]=0. \tag{5}$$

Но равенство (5) для действительных чисел a, b и c выполняется (является верным) только в том случае, когда выполняются условия (2).

Замечание. Из (3)–(5) следует, что для любых чисел a, b, c справедливо равенство

$$a^3+b^3+c^3-3abc = \\ =\frac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right). \tag{6}$$

Если a, b, c — неотрицательные числа, то правая часть (6) — неотрицательное число, и поэтому

$$a^3+b^3+c^3 \geqslant 3abc. \tag{7}$$

Полагая в (7) $a^3=x$, $b^3=y$, $c^3=z$, получаем неравенство

$$\frac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt{xyz},$$

связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое неотрицательных чисел x, y, z.

Пример 5. Доказать, что если три действительных числа a, b, c удовлетворяют условию

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}, \tag{1}$$

то по крайней мере два из этих чисел равны по абсолютной величине и противоположны по знаку, т. е. выполняется хотя бы одно из условий

$$a=-b, \qquad b=-c, \qquad c=-a. \tag{2}$$

Решение. Умножив обе части равенства (1) на $abc(a+b+c)$, приведем его к виду

$$(ab+bc+ac)(a+b+c)-abc=0. \tag{3}$$

Раскрыв скобки в левой части (3), получим

$$a^2b+2abc+a^2c+ab^2+b^2c+bc^2+ac^2=0. \tag{4}$$

Разложим левую часть S равенства (4) на множители:

$$S=a^2(b+c)+ab(b+c)+ac(b+c)+bc(b+c)= \\ =(b+c)(a^2+ab+ac+bc)=(b+c)(a+b)(a+c). \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует, что

$(a+b)(b+c)(c+a)=0$

и поэтому выполняется хотя бы одно из условий (2).

Замечание. Полученный результат позволяет сформулировать следующее утверждение: если действительные числа a, b, c связаны условием (1), то при любом натуральном k справедливо равенство

$$\frac{1}{a^{2k+1}}+\frac{1}{b^{2k+1}}+\frac{1}{c^{2k+1}}=\frac{1}{a^{2k+1}+b^{2k+1}+c^{2k+1}}.$$

Пример 6. Сократить дробь

$$A=\frac{a^3-3a-2}{a^3+a^2-4a-4}.$$

Решение. Так как числитель $P(a)$ и знаменатель $Q(a)$ дроби A обращаются в нуль при $a=-1$, то многочлены $P(a)$ и $Q(a)$ делятся на $a+1$. Разложим эти многочлены на множители. Получим $P(a)=a^3-a-2(a+1)=a(a-1)(a+1)-2(a+1)=(a+1)(a^2-a-2)=$ $=(a+1)(a-2)(a+1)$, $Q(a)=a^2(a+1)-4(a+1)=(a+1)(a-2)(a+2)$. Следовательно, $A=\dfrac{a+1}{a+2}$.

Ответ. $A=\dfrac{a+1}{a+2}$.

Пример 7. Упростить выражение

$$A=\sqrt{a+2-2\sqrt{a+1}}+\sqrt{a+5+4\sqrt{a+1}}.$$

Решение. Выражение имеет смысл при $a\geqslant -1$. Заметив, что $a+2-2\sqrt{a+1}=a+1-2\sqrt{a+1}+1=(\sqrt{a+1}-1)^2$, $a+5+4\sqrt{a+1}=$ $=(\sqrt{a+1}+2)^2$, и применив формулу $\sqrt{b^2}=|b|$, получим

$A=|\sqrt{a+1}-1|+\sqrt{a+1}+2.$

Если $\sqrt{a+1}\geqslant 1$, то $a\geqslant 0$ и тогда $A=2\sqrt{a+1}+1$. Если $0\leqslant a+1<1$, т.е. $-1\leqslant a<0$, то $A=1-\sqrt{a+1}+\sqrt{a+1}+2=3$.

Ответ.

$$A=\begin{cases}2\sqrt{a+1}+1, & \text{если } a\geqslant 0,\\ 3, & \text{если } -1\leqslant a<0.\end{cases}$$

Пример 8. Упростить выражение

$$A=\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}+\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}.$$

Решение. Умножив числители и знаменатели дробей на $\sqrt{2}$, запишем A в следующем виде:

$$A=\frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{3})}{2-\sqrt{4-2\sqrt{3}}}+\frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{3})}{2+\sqrt{4+2\sqrt{3}}}.$$

Так как $4-2\sqrt{3}=(\sqrt{3}-1)^2$, $4+2\sqrt{3}=(\sqrt{3}+1)^2$, то имеем $A=\dfrac{\sqrt{2}(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}+\dfrac{\sqrt{2}(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}$.

Приводя дроби к общему знаменателю, получаем

$$A=\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)+(2+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{2}=\sqrt{2}.$$

Ответ. $\sqrt{2}$.

Замечание. Тот же результат можно получить, применив формулу «сложного» радикала, в силу которой имеет место $\sqrt{2-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$.

Пример 9. Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби

$$A=\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}}\,.$$

Решение. Обозначим $\sqrt[3]{2}=a$, тогда $a^3=2$, $A=\dfrac{1}{1+a+2a^2}=$ $=\dfrac{1}{a^2+(1+a+a^2)}$. Умножая числитель и знаменатель полученной дроби на $a-1$ и применяя формулу разности кубов, запишем A в следующем виде:

$$A=\frac{a-1}{a^2(a-1)+a^3-1}=\frac{a-1}{3-a^2}=\frac{\sqrt[3]{2}-1}{3-\sqrt[3]{4}}\,.$$

Снова применяя формулу разности кубов, получаем

$$A=\frac{(\sqrt[3]{2}-1)(9+3\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16})}{23}=\frac{7\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}-3}{23}\,.$$

Ответ. $\dfrac{7\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}-3}{23}$.

Пример 10. Доказать, что

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4.$$

Доказательство. Пусть $a=20+14\sqrt{2}$, $b=20-14\sqrt{2}$, $A=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$. Применяя формулу куба суммы и учитывая, что $a+b=40$, $ab=400-196\cdot 2=8$, получаем

$$A^3=\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)^3=a+b+3\sqrt[3]{ab}\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)=40+6A.$$

Таким образом, левая часть A рассматриваемого равенства является корнем уравнения

$$x^3-6x-40=0.$$

Это уравнение имеет корень $x = 4$, а его левую часть можно записать в виде $(x-4)(x^2+4x+10)$. Так как уравнение $x^2+4x+10=0$ не имеет действительных корней, а левая часть равенства A — действительное число, то $A = 4$.

Пример 11. Вычислить:

$$1)\ A = 5^{2-\log_5 9}; \qquad 2)\ B = \frac{1}{3}\log_{\frac{1}{3}} 8 - \log_{\frac{1}{3}} 12 + \log_{\frac{1}{3}} 54.$$

Решение. 1) Применяя свойства степени и основное логарифмическое тождество, получаем

$$A = 5^2 \cdot (5^{\log_5 9})^{-1} = \frac{25}{9}.$$

2) Используя свойства логарифмов, находим

$$B = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{8^{\frac{1}{3}} \cdot 54}{12}\right) = \log_{\frac{1}{3}} 3^2 = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = -2.$$

Ответ. 1) $\frac{25}{9}$; 2) -2.

Пример 12. Доказать, что:

1) $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$, если $a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ b \neq 1$;

2) $\dfrac{\log_a c}{\log_{ab} c} = 1 + \log_a b$, если $a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ a \neq 1,$ $ab \neq 1;\ c \neq 1$.

Доказательство. 1) Пусть A и B — соответственно левая и правая части равенства. Тогда $\log_b A = \log_b c \cdot \log_b a$, $\log_b B = \log_b a \cdot \log_b c$. Так как $\log_b A = \log_b B$, то $A = B$.

2) Используя формулу перехода, получаем

$$\frac{\log_a c}{\log_{ab} c} = \frac{\log_c ab}{\log_c a} = 1 + \frac{\log_c b}{\log_c a} = 1 + \log_a b.$$

Следовательно, левая часть равенства совпадает с правой.

Пример 13. Выразить $\log_{600} 900$ через a и b, где $a = \log_5 2$, $b = \log_2 3$.

Решение. Применяя формулу перехода и свойства логарифмов, получаем

$$\log_{600} 900 = \frac{\log_2 900}{\log_2 600} = \frac{\log_2(2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2)}{\log_2(2^3 \cdot 3 \cdot 5^2)} = \frac{2 + 2\log_2 3 + 2\log_2 5}{3 + \log_2 3 + 2\log_2 5} =$$

$$= \frac{2\left(1 + b + \dfrac{1}{a}\right)}{3 + b + \dfrac{2}{a}} = \frac{2(1+a+ab)}{2+3a+ab}.$$

Ответ. $\frac{2(1+a+ab)}{2+3a+ab}$.

ШАБУНИН Михаил Иванович

Доктор педагогических наук, профессор кафедры высшей математики МФТИ, автор свыше двухсот научных и учебно-методических работ, один из авторов учебников алгебры для 7–11 классов средней школы, учебников и сборников задач по математическому анализу и теории функций комплексного переменного для студентов вузов, автор многих по собий для абитуриентов.

Заслуженный работник высшей школы РФ, лауреат премии Правительства Российской Федерации в области образования за 2002 год, член Научно-методического Совета по математике Министерства образования и науки РФ, заслуженный профессор МФТИ.

В пособии представлены:

- Теория
- Примеры с решениями
- Задачи с ответами и указаниями
- Варианты вступительных экзаменов

ISBN 978-5-00101-199-6