Глава 1

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ. ПОНЯТИЕ ДОВЕРИТЕЛЬНОГО ИНТЕРВАЛА

1.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Теория вероятностей использует законы больших чисел. Основным понятием теории вероятностей является понятие *вероятности*.

Вероятность — это количественная оценка возможности наступления некоторого события. В качестве вероятности выступает отношение количества исходов, благоприятствующих данному событию, к общему числу равновозможных исходов.

Классическое определение вероятности вводится с помощью понятия *ансамбля*.

Под **ансамблем** в теории вероятностей понимают большое количество n совершенно одинаковых систем, над которыми одновременно производится один и тот же опыт. Рассмотрим в качестве примера ансамбля очень большое количество совершенно одинаковых кювет, заполненных солью калия.

Природа «пометила» калий радиоактивными изотопами. В его естественном виде содержатся атомы, ядра которых испытывают самопроизвольные превращения. Такие атомы называют **радиоактивными изотопами**, а процесс ядерных превращений — **явлением радиоактивности**. Количественной оценкой числа превращений является активность, которую обозначим символом y.

Радиоактивность является статистическим (случайным) процессом, то есть возможность превращения ядра вероятностна. Ядро может испытывать превращение, а может и не испытывать.

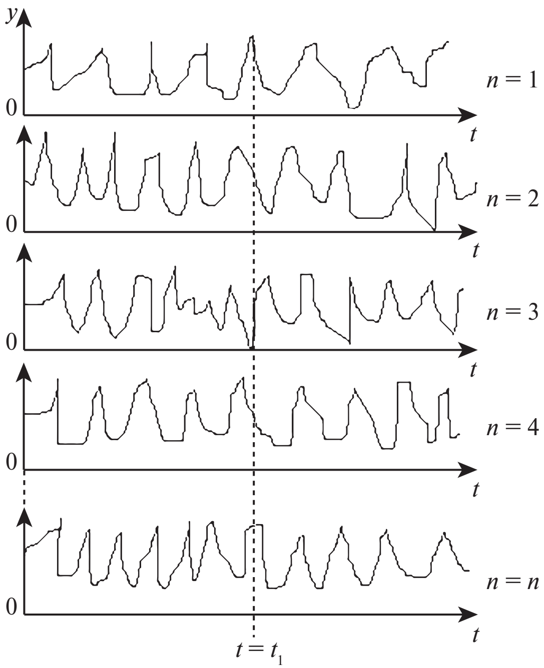

Рис. 1.1. Схематическое изображение активности от времени для ансамбля из *n* образцов

Множество совершенно одинаковых кювет, совершенно одинаково заполненных одной и той же солью калия, за превращением которой в каждой кювете одновременно наблюдают совершенно одинаковые кинокамеры, будут образовывать ансамбль.

Другим примером ансамбля, в очень грубом приближении, может быть множество палат с одинаковым количеством рожениц. Рождение ребенка здесь может рассматриваться как случай, а число малышей, родившихся в данный день, как значение случайной величины.

После окончания наблюдения мы получим n зависимостей активности от времени (рис. 1.1).

Выберем на каждой из них, совершенно произвольно, некоторый момент времени t_1, который будет соответствовать некоторому t_1-му кадру на каждой из кинопленок, и далее будем анализировать только этот момент.

Вычислим вероятность $P(y_1)$ — вероятность того, что в момент времени t_1 активность образца имела значение y_1.

Согласно определению для вычисления $P(y_1)$ нужно выполнить следующие действия.

1. Обратиться ко всем проявленным пленкам в той их части, которая соответствует моменту времени t_1 (t^1 кадр).

2. Сосчитать число кинопленок n_1, на которых для t^1 кадра зарегистрирована активность y_1 (число систем в ансамбле с активностью y_1 в момент времени t_1).

3. Вычислить предел отношения:

$$P(y_1) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_t}{n},$$

устремляя число систем в ансамбле n к бесконечности.

В результате получим $P(y_1)$ — вероятность того, что в момент времени t_1 наш образец обладал активностью y_1.

Аналогично можно вычислить $P(y_2)$ — вероятность того, что активность образца в тот же момент времени была y_2.

$$P(y_2) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_2}{n}.$$

Здесь уже в числитель отношения под знаком предела следует подставить число n_2 — число систем в ансамбле с активностью y_2.

По тому же принципу вычисляются вероятности того, что активность образца была меньше некоторой наперед заданной величины y_n. Например, вероятность $P(y < y_1)$ — вероятность того, что активность образца была меньше y_1, находится из выражения:

$$P(y < y_1) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(y < y_1)}{n}, \tag{1.1}$$

в числитель которого следует подставить число $n(y < y_1)$ — число систем в ансамбле, у которых в момент времени t_1 активность была меньше y_1.

По аналогии с выражением (1.1) для каждого значения y_i можно получить свое значение вероятности $P(y < y_i)$. Это значит, что между вероятностью типа (1.1) и активностью существует функциональная связь. Такая функциональная связь называется функцией распределения вероятности значений активности образца (рис. 1.2).

Обобщая сказанное на любую случайную величину, можно констатировать, что:

- функциональная связь между вероятностями типа $P(y < y_i)$ и случайной величиной y_i называется функцией распределения

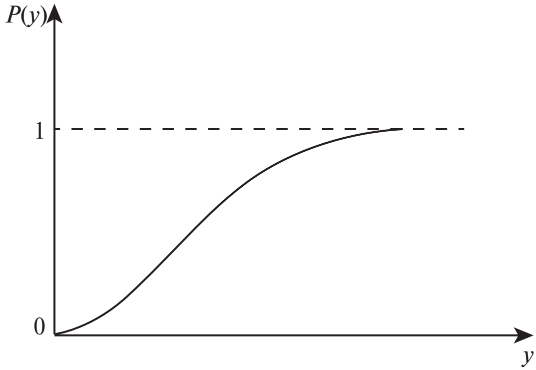

Рис. 1.2. Функция распределения вероятности случайной величины

вероятности случайной величины $P(y)$ (или *функцией распределения случайной величины*):

$$P(y) \equiv P(y < y_i) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(y < y_i)}{n}, \qquad (1.2)$$

где y_i принимает все возможные значения;

- функция распределения имеет характеристики, основными из которых являются *плотность распределения, математическое ожидание* и *дисперсия*;
- плотностью распределения называют частную производную от функции распределения, которую называют *функцией плотности вероятности случайной величины* $\varphi(y)$.

$$\varphi(y) = \frac{\partial P(y)}{\partial y}. \qquad (1.3)$$

Функция плотности вероятности случайной величины получила самое широкое распространение. В связи с этим очень часто, говоря о функции распределения плотности вероятности случайной величины, упускают слово «плотность», то есть говорят «функция распределения случайной величины», а подразумевают функцию распределения плотности вероятности. Типичный вид функции распределения плотности вероятности демонстрирует рис. 1.3.

Распространенность функции плотности вероятности следует из ее наглядного вида и удобства практического применения. Попытаемся продемонстрировать это. Воспользуемся приближением и перепишем определение (1.3) в виде:

$$\varphi(y) = \frac{\partial P(y)}{\partial y} \approx \frac{\Delta P(y)}{\Delta y}. \qquad (1.4)$$

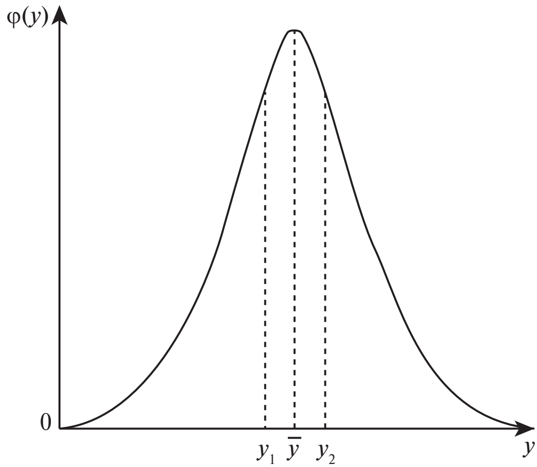

Рис. 1.3. Функция распределения плотности вероятности случайной величины

Установим физический смысл $\Delta P(y)$.

Выберем на оси абсцисс некоторый интервал $\Delta y = y_2 - y_1$ (см. рис. 1.3). Значению аргумента y_1 соответствует значение функции распределения $P(y_1)$. Значению аргумента y_2 соответствует значение функции распределения $P(y_2)$. Каждое из этих значений вычисляется в соответствии с выражением (1.2). Учитывая это, рассчитаем величину $\Delta P(y)$:

$$\Delta P = P(y_2) - P(y_1) = \lim_{n\to\infty}\frac{n(y<y_2)}{n} - \lim_{n\to\infty}\frac{n(y<y_1)}{n} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n(y<y_2)-n(y<y_1)}{n}. \qquad (1.5)$$

Здесь $n(y < y_1)$, $n(y < y_2)$ — число систем в ансамбле с активностью меньше y_1 и y_2 соответственно.

Как можно видеть из выражения (1.5), в числителе отношения под знаком предела находится число, отражающее количество систем в ансамбле с активностью больше y_1, но меньше y_2, а это в соответствии с определением вероятности (1.2) означает, что $\Delta P(y)$ — вероятность того, что исследованный образец имел активность из интервала $y_1 < y < y_2$.

Перепишем равенство (1.4) в виде:

$$\Delta P(y) \approx \varphi(y)\cdot\Delta y. \qquad (1.6)$$

В правой части выражения (1.6) произведение, численно равное площади под кривой функции распределения плотности вероятности в интервале аргументов y_1–y_2. В левой — вероятность образцу иметь активность из этого интервала величин. Следовательно, можно сделать вывод: площадь под кривой функции распределения плотности вероятности случайной величины, ограниченная на оси абсцисс некоторым интервалом значений аргумента, численно равна вероятности, с которой случайная величина может принять эти значения.

Выводы, к которым мы пришли, позволяют нам сделать еще одно суждение. Оно касается положения, которое занимает максимум кривой функции распределения плотности вероятности на оси абсцисс. Оказывается, что максимум расположен при наиболее вероятном значении аргумента. Действительно, если выделять под кривой очень узкие интервалы Δy и вычислять площади, соответствующие этим интервалам, при разном положении Δy на оси абсцисс, то очевидно, что максимальная площадь получится тогда, когда Δy будет иметь координату, соответствующую максимуму $\varphi(y)$ [см. выражение (1.6)]. Последнее же, поскольку площадь численно равна вероятности, означает, что максимум функции плотности распределения вероятности случайной величины соответствует на оси абсцисс наиболее вероятному значению случайной величины, которое называется математическим ожиданием.

Математическое ожидание очень близко по величине среднему арифметическому значению.

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Еще одна характеристика распределения — это дисперсия σ^2. **Дисперсией** называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от своего математического ожидания.

$$\sigma^2 = \frac{\sum_1^n (\bar{y} - y)^2}{n(n-1)}.$$

Дисперсия характеризует рассеяние результатов около своего среднего значения.

Таким образом, можно констатировать, что знание функции распределения позволяет количественно судить о возможности наступления того или иного события. Однако для построения функции распределения необходимо бесконечное множество экспериментов, что невозможно реализовать практически. На практике необходимо получить сведения о функции распределения из ограниченного числа опытов. Именно в этом и заключается одна из главных задач математической статистики.

1.2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ВЫБОРОЧНОГО МЕТОДА

Основное содержание математической статистики составляют методы систематизации, обработки и использования статистических данных, выявление статистических закономерностей.

Центральным понятием статистики является понятие *выборки*, под которой понимают конечную совокупность результатов опытов или наблюдений и которые рассматриваются как *выборка* из некоторой генеральной совокупности.

Генеральная совокупность — это совокупность всех объектов (единиц), относительно которых ученый намерен делать выводы при изучении конкретной проблемы. Генеральная совокупность состоит из всех объектов, которые имеют качества, свойства, интересующие исследователя. Иногда генеральная совокупность — это все взрослое население определенного региона (например, когда изучается отношение потенциальных избирателей к кандидату).

Выборкой $X = (X_1, ..., X_n)$ объема n из генеральной совокупности с распределением F называется набор из n независимых и одинаково распределенных случайных величин, имеющих распределение F.

Выборка называется *случайной*, если из генеральной совокупности элементы берутся наугад и в выборку каждый из них может попасть с одинаковой вероятностью. Если случайная выборка такова, что по ее распределению можно судить о распределении неизвестной генеральной совокупности, то такая выборка называется *репрезентативной*, то есть хорошо представляющей генеральную совокупность.

Если элементы выборки $(X_1, ..., X_n)$ упорядочить по возрастанию на каждом элементарном исходе, получится новый набор случайных величин, называемый **вариационным рядом**. Вариационный ряд позволяет построить эмпирическую функцию распределения, плотность функции распределения и вычислить математическое ожидание и дисперсию. Эти характеристики выборочного распределения используют для оценки (приближения) соответствующих неизвестных характеристик истинного распределения.

Все выборочные характеристики являются средними арифметическими независимых и одинаково распределенных случайных величин и с ростом объема выборки сходятся по вероятности к истинным характеристикам: плотности, математическому ожиданию, дисперсиям, вероятностям и т.п.

Эмпирическая функция распределения позволяет полностью описать истинное распределение F, если $F(y) = P(X_i < y)$.

Эмпирическая функция распределения F^* равна:

$$F^* = \begin{cases} 0, & \text{если } y \le X_1; \\ k/n, & \text{если } X_k < y \le X_{k+1}; \\ 1, & \text{если } y > X_n. \end{cases}$$

Ситуационная задача 1.1. Требуется количественно оценить работу полицейского радара.

Решение. Измерение скорости полицейским радаром представляет собой опыт по выявлению одного из значений генеральной совокупности случайных величин — в данном случае значений скоростей. Для того чтобы оценить способность радара выявлять их, необходим ансамбль. В качестве такого ансамбля можно воспользоваться опытом, в котором пятнадцать одинаковых радаров одновременно измеряют скорость движения одного и того же автомобиля. Пусть в результате такого опыта получена следующая выборка:

$$X = (60;\ 62;\ 65;\ 70;\ 80;\ 90;\ 60;\ 62;\ 60;\ 70;\ 80;\ 90;\ 60;\ 60;\ 50).$$

Построим по ней вариационный ряд:

$$50;\ 60;\ 60;\ 60;\ 60;\ 60;\ 62;\ 62;\ 65;\ 70;\ 70;\ 80;\ 80;\ 90;\ 90$$

и эмпирическую функцию распределения (рис. 1.4):

$$F^* = \begin{cases} 0, & \text{если } y < 0; \\ k/n = 0/15 = 0, & \text{если } 0 \le y < 50; \\ k/n = 1/15, & \text{если } 50 \le y < 60; \\ k/n = 6/15, & \text{если } 60 \le y < 62; \\ k/n = 8/15, & \text{если } 62 \le y < 65; \\ k/n = 9/15, & \text{если } 65 \le y < 70; \\ k/n = 11/15, & \text{если } 70 \le y < 80; \\ k/n = 13/15, & \text{если } 80 \le y < 90; \\ k/n = 15/15 = 1, & \text{если } 90 \le y. \end{cases}$$

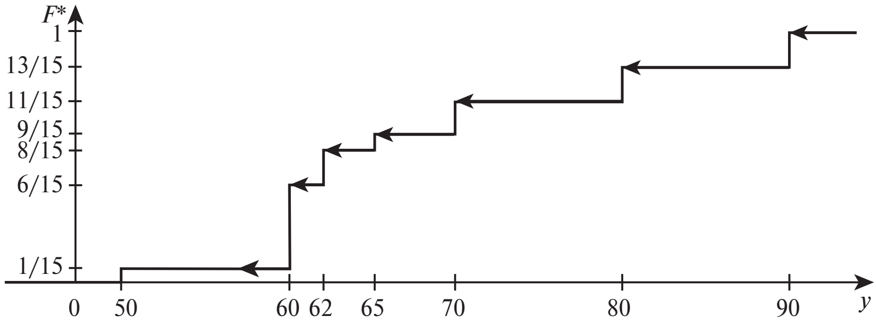

Рис. 1.4. График эмпирической функции распределения

Одной из важнейших характеристик функции распределения является плотность. Эмпирическим аналогом плотности является *гистограмма*. Гистограмма строится по *группированным данным*. Предполагаемую область значений случайной величины y делят на некоторое количество не обязательно одинаковых интервалов. Пусть $A_1, \ldots, A_k$ — интервалы на прямой, называемые *интервалами группировки*. Обозначим для $j = 1, \ldots, k$ через v_j число элементов выборки, попавших в интервал A_j. На каждом из интервалов A_j строят прямоугольник, площадь которого пропорциональна v_j. Общая площадь прямоугольников должна равняться единице. Если l_j — длина интервала A_j, то высота f_j прямоугольника над этим интервалом вычисляется по формуле:

$$f_j = \frac{v_j}{nl_j},$$

где n — общее число элементов в случайной выборке.

Построим гистограмму, характеризующую опыт с полицейскими радарами. Опыт характеризовался вариационным рядом:

(50; 60; 60; 60; 60; 60; 62; 62; 65; 70; 70; 80; 80; 90; 90).

Разобьем отрезок [50; 100] на пять равных отрезков. Отрезку [50; 60) принадлежит один элемент выборки; отрезку [60; 70) — семь; отрезку [70; 80) — два и отрезку [80; 90) — два, как и отрезку [90; 100].

Высота первого прямоугольника будет равна:

$$f_1 = \frac{v_j}{n \cdot l_j} = \frac{1}{15 \cdot 10} = \frac{1}{150}.$$

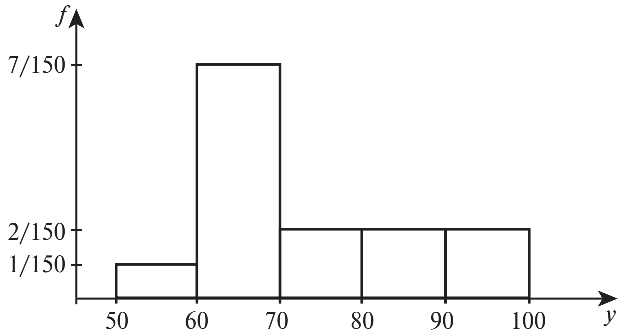

Рис. 1.5. Гистограмма при $k = 5$

Аналогично вычисляются другие высоты. Площадь каждого треугольника численно равна вероятности попадания значений случайной величины в интервал, соответствующий основанию прямоугольника (рис. 1.5).

Математическое ожидание вычисляется по формуле:

$$\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = 67{,}9,$$

а дисперсия по формуле:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_1^n \left(\overline{y} - y_i\right)^2}{n(n-1)} = 7{,}15.$$

Из полученных результатов следует, что скорость автомобиля с наибольшей вероятностью имела значение 67,9 км/ч. ■

1.3. ОЦЕНКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ С ПОМОЩЬЮ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Если экспериментатор n раз измеряет какую-либо величину (например, размер стопы), то с точки зрения статистики он осуществляет выборку значений случайной величины из генеральной совокупности, элементы которой характеризуются определенной функцией распределения и плотностью. Положение максимума на графике функции плотности соответствует значению случайной величины, которое вероятнее всего будет получено экспериментатором при исследовании образца.

Однако встает вопрос: какова же все-таки эта вероятность? В соответствии с вышеприведенными рассуждениями ответ требует вычисления площади под той частью кривой, которая ограничивается на оси абсцисс выбранными значениями аргумента. Значит, если мы хотим вычислить вероятность получения конкретного значения, то должны вычислить только площадь над этим значением. Очевидно, что та площадь оказывается равной нулю, а это значит, что вероятность получить точно какое-то значение равна нулю.

Для того чтобы обойти возникшую трудность, вводят понятие **доверительного интервала**. Говорят не о каком-то конкретном значении, а об интервале значений. Величина интервала значений будет определять площадь под кривой, а значит, и вероятность попадания в данный интервал.

Здесь действует очевидность: «цель, в которую Вы стреляете, должна быть тем больше, чем больше требование к успеху выстрела». Значит, чем бóльшую вероятность получения результата вы устанавливаете (ее называют **доверительной вероятностью**), тем шире оказывается доверительный интервал. Если вы хотите быть уверены наверняка, что тот, кто после вас будет исследовать образец, получит результат, выявленный вами, вы должны установить доверительный интервал, охватывающий все возможные значения аргумента. Ведь только в этом случае площадь под кривой будет равна единице. Ясно, что ценность такого анализа равна нулю. На практике приходится ограничивать себя той или иной доверительной вероятностью. В соответствии с этим и доверительный интервал будет даже для одного и того же исследования различным. Для того чтобы иметь возможность сопоставлять результаты, полученные разными исследователями, договорились выбирать в качестве доверительной вероятности число 0,95. Если выбирается иное значение, то это оговаривают особо.

Однако размер доверительного интервала зависит еще и от формы кривой, расположенной над этим интервалом. Говоря принятым в статистике языком, доверительный интервал будет зависеть от функции распределения плотности вероятности.

Для каждой исследуемой величины свой закон распределения. Следовательно, прежде чем проводить расчеты доверительного интервала, необходимо определить этот закон.

На сегодня сформулировано множество законов подобного рода. Назовем самые известные. Это нормальный закон (закон Гаусса), распределение Стьюдента, распределение Пуассона и др.

Основные функции распределения качественно имеют вид, аналогичный показанному на рис. 1.3. Более того, чаще всего функция симметрична относительно максимума. Именно поэтому на практике при статистической обработке экспериментальных результатов пользуются *симметричным доверительным интервалом* — симметричным относительно математического ожидания. Результат исследования представляют в виде:

$$\bar{Y} \pm 0{,}5\Delta Y,$$

где $\bar{Y}$ — наиболее вероятное значение; $0{,}5\Delta Y$ — размер доверительного интервала, который называют **абсолютной ошибкой измерения**.

В статистике показано, что наиболее вероятное значение (математическое ожидание) очень близко по величине к среднему арифметическому, поэтому в качестве $\bar{Y}$ на практике используют именно эту величину.

Рассеяние результатов относительно наиболее вероятного значения характеризуют *дисперсией*. Обычно она обозначается через s^2 или σ^2.

Дисперсия среднего арифметического вычисляется по формуле:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2}{n(n-1)}, \tag{1.7}$$

где Y_i — результат i-го измерения; $\bar{Y}$ — наиболее вероятный результат измерений, принимаемый равным среднему арифметическому значению результатов n измерений.

Чем больше дисперсия, тем более размытым оказывается максимум функции распределения плотности вероятности. Значит, дисперсия характеризует кривую функции распределения и тем самым площадь непосредственно под максимумом. Отсюда следует, что величина доверительного интервала при одной и той же доверительной вероятности зависит от дисперсии. Чем меньше дисперсия, тем у́же доверительный интервал. И наоборот: чем больше дисперсия, тем шире доверительный интервал.

Подводя итог вышесказанному, можно констатировать: доверительный интервал определяется заданной доверительной вероятностью, законом, по которому распределена функция вероятности, и дисперсией.

На практике задача исследователя состоит в нахождении доверительного интервала. Значит, ему необходимо иметь данные о доверительной вероятности, законе распределения и дисперсии. Доверительную вероятность исследователь должен задать самостоятельно. Закон распределения должен либо установить сам, либо воспользоваться полученными ранее результатами. Дисперсию же рассчитывают на основе экспериментальных данных конкретного опыта, например, по формуле (1.7).

В классической статистике, положенной в основу общепринятых правил обработки экспериментальных результатов, чаще всего полагают, что измеряемая величина подчиняется нормальному закону распределения (*закону Гаусса*):

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \tag{1.8}$$

где $\varphi(x)$ — функция плотности вероятности случайной величины x; μ — математическое ожидание; σ^2 — дисперсия; π — число пи, равное 3,14159; exp — экспоненциальная функция, основание натурального логарифма, приблизительно равное 2,71828.

Доверительную вероятность, как уже говорилось выше, выбирают равной 0,95. Следовательно, задача экспериментатора сводится к расчету дисперсии.

Рассчитав дисперсию, исследователь обращается к таблицам, в которых протабулированы значения нормальной функции распределения. Из этих таблиц можно установить, какое число «дисперсий» U «в штуках» следует использовать, чтобы рассчитать доверительный интервал при заданной доверительной вероятности. На рис. 1.6 продемонстрированы четыре доверительных интервала для разных доверительных вероятностей: 0,6826; 0,9544; 0,9973; 0,999936. Для доверительной вероятности 0,95 имеем $U = 1{,}96$. Перемножив табличное значение с корнем квадратным из дисперсии, получаем искомый доверительный интервал.

$$\Delta Y = U\sqrt{\sigma^2}.$$

Умножение «на корень» из дисперсии, а не на саму дисперсию следует из определения последней. Напомним, что это квадрат отклонения от точки рассеяния. Нам же при нахождении доверительного интервала интересен интервал, а не его квадрат.

Рассмотрим конкретный пример.

Пусть исследуется радиоактивный образец с помощью счетчика Гейгера, который определяет активность (радиоактивность) образца

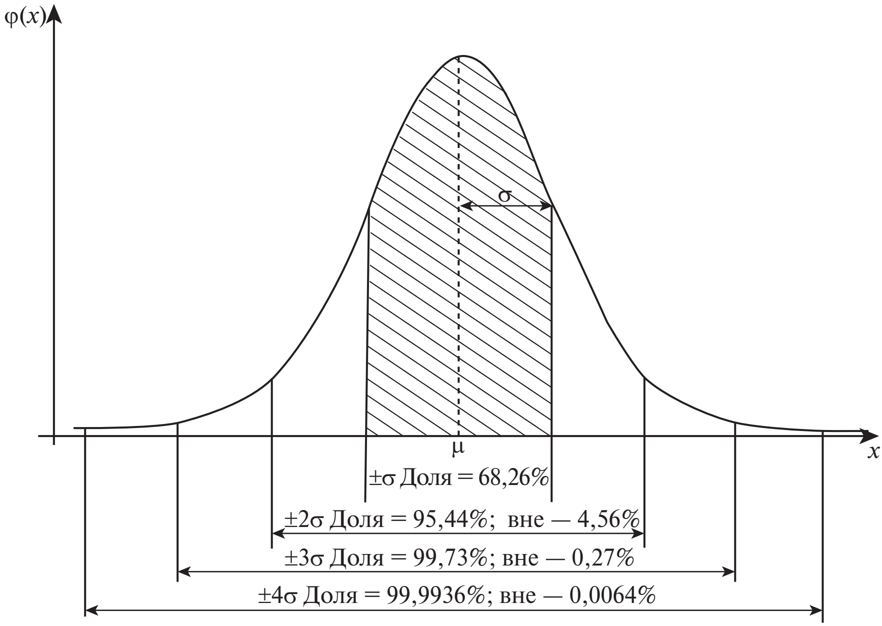

Рис. 1.6. Доверительные интервалы при разной доверительной вероятности (то есть доли под кривой)

по числу импульсов, возникающих в счетчике при воздействии на него радиоактивного излучения. При пятикратном исследовании образца были получены следующие значения: 3,28; 3,31; 3,32; 3,29; 3,30 (имп./с). Требуется определить доверительный интервал и наиболее вероятное значение активности образца.

За наиболее вероятное значение принимается среднее арифметическое:

$$\bar{Y} = \frac{3{,}28 + 3{,}31 + 3{,}32 + 3{,}29 + 3{,}30}{5} = 3{,}30 \text{ имп./с.}$$

Воспользуемся формулой (1.7) и рассчитаем дисперсию:

$$s^2 = \frac{(3{,}28 - 3{,}30)^2 + (3{,}31 - 3{,}30)^2 + (3{,}32 - 3{,}30)^2}{5(5-1)} +$$

$$+ \frac{(3{,}29 - 3{,}30)^2 + (3{,}30 - 3{,}30)^2}{5(5-1)} \approx 5{,}00 \cdot 10^{-5} (\text{имп./с})^2.$$

Сделаем предположение, что результаты измерений распределены по нормальному закону, и выберем доверительную вероятность равной 0,95.

По таблицам нормальной функции распределения найдем величину коэффициента *U*. Для выбранной доверительной вероятности он оказывается равным 1,96.

Теперь можно вычислить величину доверительного интервала:

$$\Delta Y = U\sqrt{s^2} = 1{,}96 \cdot \sqrt{5{,}00 \cdot 10^{-5}} \approx 0{,}01 \text{ имп./с.}$$

Таким образом, результат исследования образца должен быть представлен в виде:

$$3{,}30 \pm 0{,}01 \text{ имп./с.}$$

Вернемся к ситуационной задаче, согласно которой требовалось на основании 15 опытов определить качество полицейского радара. Выше было показано, что, согласно опыту, математическое ожидание результатов измерения скорости автомобиля составило величину 67,9 км/ч, а дисперсия функции распределения имела величину 7,15 км^2/ч^2. Следовательно результат исследования радара может быть представлен в виде:

$$v = 67{,}9 \mp 1{,}96 \cdot \sqrt{7{,}15} = 67{,}9 \pm 5{,}2 \text{ км/ч.}$$

Данный результат означает, что если полицейский будет измерять этим радаром скорость автомобиля, двигающегося со скоростью 67,9 км/ч, то в 95 случаев из 100 он получит результат от 62,7 до 73,1 км/ч.

Однако в статистике показано, что результаты эксперимента, строго говоря, могут быть распределены по нормальному закону, если число проведенных опытов больше 10–15. В связи с этим английский ученый Стьюдент (его настоящая фамилия — Госсет) предложил свое распределение для малого числа опытов.

Случайная величина t в этом распределении имеет вид, аналогичный формуле (1.8).

$$t = \frac{x - \mu}{s(x)}.$$

Здесь вместо генерального среднеквадратичного отклонения $\sigma(x)$ фигурирует соответствующее выборочное отклонение $s(x)$.

Функция плотности вероятности стьюдентовой величины t (t-распределение) зависит от числа степеней свободы f и определяется формулой

$$\varphi(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{f+1}{2}\right)}{(\pi f)^{0,5}\,\Gamma\left(\frac{f}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{f}\right)^{-\frac{f+1}{2}},$$

где Γ — гамма-функция Эйлера:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-y} y^{z-1} dy.$$

При значениях $f > 20$ распределение Стьюдента удовлетворительно аппроксимируется функцией распределения нормального закона, а при $f = \infty$ в точности совпадает с ней. При малых значениях f функция Стьюдента имеет меньшую максимальную ординату и значительно медленнее сближается с осью абсцисс при удалении от максимума.

Конкретный вид этого распределения зависит от числа опытов. При большом числе опытов распределение Стьюдента становится эквивалентным нормальному закону.

В распределении Стьюдента роль коэффициента U исполняет параметр t. Именно его должен найти исследователь из таблиц, в которых протабулировано распределение Стьюдента. Поскольку распределение Стьюдента зависит от числа опытов, то для нахождения параметра t необходимо знание не только доверительной вероятности, но и числа, называемого **числом степеней свободы**. Оно определяется количеством опытов и является числом, которое показывает, сколько результатов из этих опытов являются независимыми.

При расчете дисперсии среднего арифметического таких опытов на единицу меньше общего числа опытов. Это связано с тем, что при расчетах дисперсии используется среднее арифметическое, связывающее все результаты опытов.

Вернемся к рассмотренному выше примеру. Теперь нам ясно, что при расчетах доверительного интервала размера отрезка на основе пятикратных измерений корректней воспользоваться не нормальным законом распределения, а распределением Стьюдента. Число степеней свободы в данном случае оказывается равным 4. Тогда для доверительной вероятности 0,95 и числа свободы, равного 4, из таблиц можно найти t. Он оказывается равным 2,78 (см. приложение 1).

Рассчитаем доверительный интервал в предположении, что результаты опытов подчиняются распределению Стьюдента:

$$\Delta Y = t\sqrt{s^2} = 2{,}78\sqrt{0{,}01} \approx 0{,}02 \text{ имп./с.}$$

Обобщим результаты, к которым мы пришли в данной главе.

1. При проведении любых измерений нет истинного значения измеряемой величины, а есть наиболее вероятные значения. Именно эти, наиболее вероятные значения, и должен стремиться установить экспериментатор.

2. Интервал наиболее вероятных значений измеряемой величины называется доверительным интервалом.

3. Величина доверительного интервала определяется законом, по которому распределены экспериментальные результаты (функцией распределения случайной величины), доверительной вероятностью (вероятностью, с которой экспериментатор желает оценить эксперимент) и дисперсией (рассеянием экспериментальных данных измерений).

4. Обработка результатов эксперимента с целью нахождения доверительного интервала получила название *оценки погрешности (неопределенности) результатов эксперимента.*

Контрольные вопросы и задания

1. Постройте на одном рисунке (в одних и тех же осях координат) функции плотности распределения Гаусса и Стьюдента (для четырех степеней свободы).
2. Что такое вероятность?
3. В результате измерения рефракции получены следующие значения: 1,33; 1,32; 1,34; 1,31; 1,33. Определите коэффициент преломления измененного вещества.
4. В результате изучения выбросов генератора чисел получена следующая выборка: 1; 5; 3; 9; 4. По полученным данным постройте экспериментальную функцию распределения, ее плотность, вычислите математическое ожидание и дисперсию.
5. Чему численно равна площадь под участком кривой функции плотности распределения, ограниченная на оси абсцисс некоторым интервалом значений от x_1 до x_2?
6. Обозначьте на графике функции плотности распределения Гаусса доверительные интервалы для доверительных вероятностей 0,95 и 0,6.
7. Схематически изобразите функцию плотности распределения Гаусса при дисперсиях, равных 10 и 1.
8. Чему равна площадь под всеми фигурами гистограммы?