ББК 22.18я73
Л 93

Любимов В. В.
Л 93 Математическая теория устойчивости с приложениями: Учебное пособие. — СПб.: Издательство «Лань», 2018. — 180 с. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-3218-9

Изложены основные понятия и теоремы современной теории устойчивости для систем в первом приближении, консервативных систем, систем с учетом диссипативных и гироскопических сил, систем с малым параметром. Основное внимание уделяется второму методу Ляпунова и его модификациям. Теоретический материал в пособии сопровождается разнообразными примерами применения теории устойчивости в авиации и космонавтике. Рассматриваются интересные динамические явления: биения, автоколебания, флаттер, внешняя устойчивость резонансов.

Пособие предназначено для студентов вузов, обучающихся по направлениям подготовки и специальностям, входящим в УГС: «Математика и механика», «Физика и астрономия», «Электроника, радиотехника и системы связи», «Электро- и теплотехника», «Физико-технические науки и технологии», «Машиностроение», «Технологии материалов», «Авиационная и ракетно-космическая техника», и другим инженерно-техническим направлениям подготовки. Книга будет полезна аспирантам, преподавателям и специалистам в области динамики твердого тела и механики космического полета.

ББК 22.18я73

Рецензенты:
И. А. БЛАТОВ — доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой высшей математики Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики;
Ю. М. ЗАБОЛОТНОВ — доктор технических наук, профессор кафедры программных систем Самарского национального исследовательского университета им. академика С. П. Королева.

Обложка
Е. А. ВЛАСОВА

ПРЕДИСЛОВИЕ

Развитие современной науки и техники сопровождается постоянным совершенствованием научных методов и прикладных технологий. Одним из важнейших вопросов, связанных с безаварийным функционированием разнообразных технических устройств и аппаратов, на практике продолжает являться обеспечение устойчивости рассматриваемых динамических систем. В данном пособии содержится описание традиционных методов исследования устойчивости динамических систем: первого и второго метода Ляпунова, линейных систем при действии диссипативных и гироскопических сил. Кроме того, в пособии представлены традиционные теоремы, представляющие собой развитие второго метода Ляпунова: о неустойчивости положения равновесия Четаева, об устойчивости при постоянно действующих возмущениях Малкина, об устойчивости Барбашина-Красовского, теорема об оптимальной стабилизации по части переменных. Также в пособие включены теоремы, обобщающие второй метод Ляпунова для задач с малым параметром: теорема об устойчивости в кольцевой области, теорема об устойчивости на конечном интервале. Значительное внимание в пособии уделяется применению методов исследования устойчивости положений равновесия в различных задачах авиации и космонавтики. В частности, содержатся исследования устойчивости: в задаче о возникновении флаттера крыла самолета, при движении космического аппарата в задаче трех тел, при одноосной оптимальной стабилизации спутника на круговой орбите, в задаче о внешней устойчивости резонанса при движении спускаемых космических аппаратов в атмосфере, в задаче о внешней устойчивости резонанса при движении спутников с магнитно-маховичной системой ориентации. Следует отметить, что в пособии также рассматриваются биения и устойчивость автоколебаний в динамических системах.

Автор выражает свою признательность доктору технических наук Ю. М. Заболотнову, доктору физико-математических наук И. А. Блатову, кандидату технических наук Ю. Л. Файницкому за внимание к данной работе и ценные замечания.

Глава 1

ПОНЯТИЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Понятие устойчивости является фундаментальным понятием науки и техники и изучается в различных аспектах: устойчивость решения системы уравнений математики, устойчивость законов функционирования систем автоматического регулирования, устойчивость формы тела и т. д. В данном учебном пособии в основном рассматривается устойчивость тривиального решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Речь идет об исследовании устойчивости точки покоя — тривиальное решение: $x_i = 0$.

Рассмотрим явление устойчивости применительно к системам дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy_i}{dt} = \Phi_i(t, y_1, y_2, ..., y_n)\,(i = 1, 2, ...n). \tag{1.1}$$

Начальные условия движения $y_i(t_0) = y_{i0}$ $(i = 1, 2, ..., n)$

На практике начальные условия являются результатом измерений, поэтому они получены с некоторой погрешностью. В связи с этим возникает вопрос об учете влияния малого изменения начальных значений условий на искомое решение. Если сколько угодно малое изменение начальных условий способно качественно (количественно) изменить решение, определяемое с помощью неточных начальных данных, то применяемая математическая модель изучаемого явления никакого практического значения не имеет. Следовательно, возникает вопрос: в каком случае малое изменение начальных условий вызывает малое изменение решения. Если переменная t изменяется на отрезке $t_0 \le t \le T$, то ответ на этот вопрос дает теорема о непрерывной зависимости решений от начальных условий. Если t может принимать сколько угодно большие условия, то этим вопросом занимается теория устойчивости.

Предположим, что получены решения $y_i(t)$ и $\varphi_i(t)$ системы (1.1) при начальных условиях $y(t)\big|_{t=t_0} = y_i(t_0)$ и $\varphi_i(t)\big|_{t=t_0} = \varphi_i(t_0)$.

Определение 1.1. Решение $\varphi_i(t)$ системы (1.1) называется устойчивым или устойчивым по Ляпунову, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (\forall y_i(t) \forall \varphi_i(t) |y_i(t_0) - \varphi_i(t_0)| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \forall t > t_0 |y_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon). \tag{1.2}$$

Сформулируем это определение в словесной форме.

Решение $\varphi_i(t)$ системы (1.1) называется устойчивым, если для всякого положительного числа ε существует такое положительное число $\delta(\varepsilon)$, что для функции $y_i(t)$, также являющейся решением системы (1.1), справедливо следующее утверждение. Если начальные значения функций $\varphi_i(t)$ и $y_i(t)$ удовлетворяют условию $|y_i(t_0) - \varphi_i(t_0)| < \delta(\varepsilon)$, то при t таких, что $t > t_0$, для указанных функций справедливо неравенство $|y_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon$).

Другими словами, при близких начальных условиях решения системы (1.1) остаются близкими для $\forall t \geq t_0$.

Замечание. Если система (1.1) удовлетворяет условиям теоремы о непрерывной зависимости от начальных условий, то в определении устойчивости следует писать $t \geq T \geq t_0$.

Определение 1.2. Если при сколько угодно малом $\delta > 0$ хотя бы для одной функции $y_i(t)$ в формуле (1.2) соотношение $\exists t > t_0 |y_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon$ не выполняется, то решение $\varphi_i(t)$, при котором оно несправедливо, называется неустойчивым.

Неустойчивые решения представляют интерес только в редких случаях.

Определение 1.3. Решение $\varphi_i(t)$ называется асимптотически устойчивым, если оно является устойчивым и, кроме того, удовлетворяет условию

$$\lim_{t\to\infty} \left| y_i(t) - \varphi_i(t) \right| = 0. \tag{1.3}$$

В этом случае справедливо соотношение $|y_i(t) - \varphi_i(t)| < \delta_1$, где $\delta_1 > 0$. Отметим, что из одного только условия (1.3) устойчивость решения $\varphi_i(t)$ не следует.

Исследование на устойчивость некоторого решения системы уравнений (1.1) может быть сведено к исследованию устойчивости тривиального решения — точки покоя. Действительно преобразуем (1.1) в новых переменных. Пусть $\overline{y_i}(t)$ — исследуемое решение и

$$x_i = y_i - \overline{y}_i(t), \tag{1.4}$$

где x_i — новая неизвестная функция, которая показывает отклонение y_i от $\overline{y}_i$.

С учетом условия (1.4) система (1.1) примет вид

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{d\overline{y_i}}{dt} + \Phi_i(t, x_1 + \overline{y_1}(t), \ldots, x_n + \overline{y_n}(t)). \tag{1.5}$$

Следовательно, исследуемому решению $\overline{y_i}(t)$ системы (1.1) в силу равенства (1.4) соответствует тривиальное решение $x_i \equiv 0$ системы (1.5). Иными словами, исследование устойчивости решения $\overline{y_i}(t)$ заменяется исследованием тривиального решения x_i системы (1.5). Поэтому в дальнейшем будем считать, что на устойчивость исследуется тривиальное решение (точка x_i расположена в начале координат).

П р и м е р. Исследовать на устойчивость решение дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dt} = -a^2 y$$

при начальных условиях $y(t_0) = y_0$. Здесь a — постоянная, $a \neq 0$.

Решением этой задачи является функция $y = y_0 e^{-a^2(t-t_0)}$. Оно асимптотически устойчиво. Действительно, зададим $\varepsilon > 0$ и начальные условия $y(t_0) = y_0$ и $\overline{y}(t_0) = \overline{y}_0$ такие, что $\left| y_0 - \overline{y_0} \right| < \delta(\varepsilon)$, где $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$. Тогда

$$\left| y(t) - \overline{y}(t) \right| = \left| y_0 e^{-a^2(t-t_0)} - \overline{y_0} e^{-a^2(t-t_0)} \right| = e^{-a^2(t-t_0)} \left| y_0 - \overline{y_0} \right| < \varepsilon,$$

что и означает устойчивость решения.

Кроме того, при $t \geq t_0$ выполнено равенство $\lim\limits_{t \to +\infty} (e^{-a^2(t-t_0)} \left| y_0 - \overline{y_0} \right|) = 0$.

Глава 2

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

2.1. Дифференциальные уравнения и их линеаризация

Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что общие решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и некоторых линейных уравнений могут быть получены в аналитической форме. Поэтому исследование устойчивости данных решений не представляет особых затруднений и может быть успешно выполнено путем анализа указанных решений. Однако функционирование большинства реальных динамических систем описывается нелинейными дифференциальными уравнениями, не имеющими аналитических решений. По указанной причине традиционным подходом при исследовании устойчивости решений уравнений является замена исходных нелинейных уравнений на упрощенные линейные уравнения первого порядка. Этот метод является простым и эффективным. Он нашел свое распространение в науке и технике второй половины XIX — начала XX века. Рассмотрим этот метод более подробно.

С целью исследования на устойчивость точки покоя $x_{i0} = 0$ рассмотрим нелинейные дифференциальные уравнения:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \ldots x_n). \tag{2.1}$$

Здесь f_i — функция, непосредственно не содержит зависимости от времени (автономная функция) и является дифференцируемой в начале координат функцией своих аргументов x_i. При этом точка покоя $x_{i0} = 0$ является частным решением системы (2.1).

Выполним разложение правых частей (2.1) в ряд Маклорена по степеням x_i:

$$\begin{gathered} f_i(x_1, x_2, \ldots x_n) = f_i(0,0,\ldots 0) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\right)_0 x_1 + \\ \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\right)_0 x_2 + \ldots + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_n}\right)_0 x_n + F_i. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Здесь F_i — функция, содержащая нелинейные члены, т. е. члены выше первого порядка относительно x_i.

Учитывая разложение (2.2) в уравнениях (2.1) при $F_i = 0$ и $f_i(0, 0,...0) = 0$, получаем систему линейных уравнений первого приближения

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \tag{2.3}$$

где коэффициенты $a_{ij} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{x_j=0}$, $i, j = 1, \ldots, n$, в общем случае представляют собой функции времени.

Таким образом, исследование устойчивости точки покоя на основе исходной системы (2.1) заменяется исследованием устойчивости точки покоя для более простой линейной системы (2.3).

Рассмотрим процедуру линеаризации на следующем простом примере.

П р и м е р. Произвести линеаризацию дифференциального уравнения $\frac{dx}{dt} = \sin x$, если $x(0) = 0$.

Решение. Раскладывая правую часть уравнения в ряд Маклорена, получаем

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots.$$

Отбросим члены выше первого порядка: $\sin x \approx x$. Окончательно получаем линеаризованное уравнение $\frac{dx}{dt} = x$.

2.2. Первый метод Ляпунова об устойчивости в первом приближении

Как показал А. М. Ляпунов, описанный выше метод не может быть применен к нелинейным динамическим системам произвольного вида. Действительно, в отличие от исходных уравнений (2.1), линейные относительно координат x_i уравнения (2.3) приближенно описывают поведение системы (2.1) в окрестности исследуемой точки покоя $x_{i0} = 0$. Поэтому в общем случае отбрасывание нелинейных членов после линеаризации может не позволить произвести достоверное исследование устойчивости исходной системы (2.1), если для этой цели применить линейную систему (2.3).

Выдающийся русский математик, академик А. М. Ляпунов сформулировал метод, позволяющий применять линейные уравнения первого приближения при исследовании устойчивости точки покоя $x_{i0} = 0$ исходной нелинейной системы. Отмеченный метод носит название первого метода Ляпунова или метода исследования устойчивости по первому приближению. Остановимся на первом методе Ляпунова более подробно.

Рассматривается исходная нелинейная неавтономная система

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \ldots x_n), \tag{2.4}$$

где f_i — дифференцируемая в начале координат функция координат x_i и времени t.

А. М. Ляпунов предложил при исследовании на устойчивость точки покоя $x_{i0} = 0$ выделить в исходной системе (2.4) линейную и нелинейную составляющие. С этой целью применяется процедура линеаризации системы (2.4). В результате эта система принимает вид

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j + R(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{2.5}$$

где R_i — функции, имеющие порядок выше 1-ого относительно величины $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x^2{}_i}$.

Система уравнений (2.5) заменяется более простой системой первого приближения

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j, \tag{2.6}$$

устойчивость точки покоя $x_{i0} = 0$, которой исследуется. Затем результаты исследования применяются для системы вида (2.5).

Условия применимости данного метода, которым пользовались ученые всего мира, были детально исследованы Ляпуновым и расширены в трудах других математиков. Следует выделить работы О. Перрона, И. Г. Малкина, К. П. Персидского, Н. Г. Четаева.

Исследование на устойчивость системы уравнений первого приближения является задачей более легкой, чем исследование исходной нелинейной системы.

Из курса обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что при $a_{ij} = \text{const}$ система (2.6) имеет известное аналитическое решение. Анализ данного решения в этом случае позволяет произвести исследование на устойчивость системы (2.6).

Основной результат первого метода Ляпунова содержит следующая теорема.

Теорема 2.1 (А. М. Ляпунов). Если система уравнений (2.5) стационарна в первом приближении, все члены R_i в достаточно малой окрестности начала координат при $t \geq T \geq t_0$ удовлетворяют неравенствам

$$\left|R_i\right| \leq N(\sum_{i=1}^{n} x^2{}_i)^{\frac{1}{2}+\alpha},$$

где N и α — постоянные, $\alpha > 0$. Если R_i не зависит от t, то порядок R_i выше первого относительно $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x^2{}_i}$ и все корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn}-k \end{vmatrix} = 0 \tag{2.7}$$

имеют отрицательные действительные части.

Тогда тривиальное решение $x_i = 0$ системы (2.5) асимптотически устойчиво. Следовательно, в этом случае возможно исследование на устойчивость по 1-му приближению.

Замечание 1. Если корень уравнения (2.7) имеет положительную часть, то точки покоя $x_i = 0$ системы (2.5) и (2.6) неустойчивы, следовательно, в этом случае также возможно исследование на устойчивость по первому приближению.

Замечание 2. Теорема 2.1 не охватывает критический случай, когда все действительные части корней характеристического уравнения неположительные, причем действительная часть хотя бы одного корня равна 0. В данном случае исследование на устойчивость тривиального решения системы (2.5) становится невозможным.

П р и м е р 1. Исследовать устойчивость точки покоя

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases}$$

следующей системы