СОДЕРЖАНИЕ

Глава 1
ФУНКЦИИ

§ 1.1. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Рассмотрим сначала понятие *множества*. Оно относится к основным понятиям, которые не определяются (так же как понятие числа, точки и т. д.). Объекты, составляющие множество, называются его *элементами*.

Если x является элементом множества A, то это обозначают следующим образом: $x \in A$ (x принадлежит A). Запись $x \notin A$ означает, что x не является элементом множества A (x не принадлежит множеству A).

Далее мы ограничимся рассмотрением только *числовых множеств*.

Рассмотрим некоторые числовые множества.

1. Множество *натуральных чисел*, т. е. числа 1, 2, 3, ..., обозначают буквой N.

2. Дополнив множество натуральных чисел N целыми отрицательными числами и нулем, получим множество *целых чисел* Z: числа 0, ± 1, ± 2, ± 3, ...

3. Дополняя множество целых чисел Z дробными числами вида $\frac{m}{n}$, где m — целые числа (положительные и отрицательные), n — натуральные числа, получаем множество *рациональных чисел* Q. Рациональными числами являются, например, числа $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{3}$; $-10\frac{2}{5}$; 0,6 и т. д. (а также все целые числа).

4. Оказывается, что существуют числа, которые нельзя представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, а можно представить только в виде бесконечной непериодической десятичной дроби. Такие числа называются *иррациональными*. Их примерами являются числа $\pi = 3{,}14159...$, $\sqrt{2} = 1{,}41421...$, $\sqrt{3} = 1{,}73205...$ и многие другие. Дополняя множество рациональных чисел Q иррациональными числами, получаем множество *действительных чисел* R. Оно обозначается также $(-\infty,\ +\infty)$ и называется *числовой осью*.

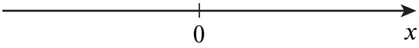

Рис. 1.1. Числовая ось

Числовая ось изображена на рис. 1.1. Любому действительному числу соответствует точка на числовой оси. И наоборот, любой точке на числовой оси соответствует действительное число — рациональное или иррациональное.

В математике часто используют промежутки на числовой оси, называемые *числовыми промежутками*. Рассмотрим определения и обозначения некоторых из них.

Отрезком от a до b называется числовой промежуток $a \le x \le b$. Отрезок обозначается квадратными скобками: $[a, b]$. Например, отрезок $[-1, 5]$.

Интервалом от a до b называется числовой промежуток $a < x < b$. Он обозначается круглыми скобками (a, b). В отличие от отрезка, граничные точки a и b в интервал не входят.

Полуинтервалом называется числовой промежуток, которому принадлежит только одна из граничных точек — либо a, либо b. Он обозначается $[a, b)$ или $(a, b]$. Граничная точка со стороны квадратной скобки принадлежит, а со стороны круглой скобки — не принадлежит полуинтервалу.

В математике часто встречаются полубесконечные числовые промежутки, иногда называемые *числовыми лучами*. Они бывают разных типов и обозначаются следующим образом:

$$[a, +\infty): x \ge a;$$

$$(a, +\infty): x > a;$$

$$(-\infty, a]: x \le a;$$

$$(-\infty, a): x < a.$$

§ 1.2. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ

При описании многих зависимостей в математике, физике, химии и других науках используются функции. Например, гидростатическое давление p в жидкости (сила, действующая на единицу поверхности) является функцией глубины. Эта функция имеет вид:

$$p = \rho g h,$$

где ρ — плотность жидкости; g — ускорение свободного падения; h — глубина.

Масса таблетки является функцией ее объема при постоянной плотности вещества:

$$m = \rho V,$$

где m — масса таблетки; ρ — плотность вещества; V — объем.

Мы ограничимся рассмотрением *числовых функций*, но слово «числовая» будем опускать, подразумевая везде под словом «функция» числовую функцию. Рассмотрим общее определение функции.

Определение. Величина y, принадлежащая некоторому множеству, называется *функцией* величины x, принадлежащей другому множеству, если каждому допустимому значению величины x по некоторому правилу соответствует определенное значение величины y. В общем случае функция записывается в виде

$$y = f(x).$$

При этом величина x называется независимой переменной, или *аргументом* функции y.

Чаще всего функция задается в виде формулы или, как говорят, *аналитически*. Например,

$$y = \sin x.$$

Однако функцию можно задавать и в виде таблицы или в виде графика. Например, график функции может иметь вид, представленный на рис. 1.2.

Рассмотрим некоторые понятия, которые применяются при анализе поведения функций.

Определение. Множество всех допустимых значений аргумента x функции называется *областью определения функции*.

Область определения функции $f(x)$ обозначается $D(f)$. Например, для функции

$$y = \sqrt{x}$$

область определения $D(f) = [0, +\infty)$. Здесь мы рассматриваем только положительные значения корня. Квадратная скобка в правой части

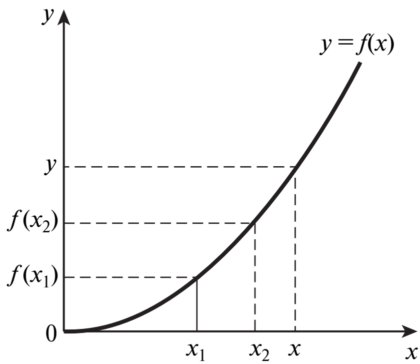

Рис. 1.2. График некоторой функции $y = f(x)$. Каждому допустимому значению x соответствует определенное значение y, как это видно на графике

последнего равенства означает, что граничная точка $x = 0$ входит в рассматриваемый промежуток.

Определение. Множество всех возможных значений функции $f(x)$ (т. е. значений y) называется *областью изменения (или множеством значений, либо областью значений) функции* и обозначается $E(f)$.

Например, для функции

$$y = \sin x$$

область значений $E(f) = [-1, 1]$.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей на интервале (a, b)*, если для любых двух значений аргумента x_1 и x_2 из области определения функции, удовлетворяющих условию $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) \le f(x_2)$. Если из условия $x_1 < x_2$ следует строгое неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, то функция называется *строго возрастающей на интервале (a, b)*.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *убывающей на интервале (a, b)*, если для любых двух значений x_1 и x_2 из области определения функции, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) \ge f(x_2)$. Если из условия $x_1 < x_2$ следует строгое неравенство $f(x_1) > f(x_2)$, то функция называется *строго убывающей на интервале (a, b)*.

Так, изображенная на рис. 1.2 функция является строго возрастающей.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если ее область определения симметрична относительно точки $x = 0$ (т. е. из условия $x \in D(f)$ следует, что $-x \in D(f)$) и для любых значений x, принадлежащих области определения, выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

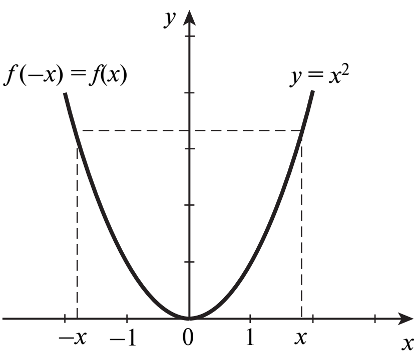

Рис. 1.3. График четной функции $y = x^2$. Он симметричен относительно оси $0y$

График четной функции симметричен относительно оси $0y$. Например, функция $y = x^2$ — четная. Ее график изображен на рис. 1.3.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *нечетной*, если ее область определения симметрична относительно точки $x = 0$ и для любых значений x, принадлежащих области определения, выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$, т. е. при изменении знака аргумента функция также меняет свой знак.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Примером нечетной функции служит функция $y = x^3$, поскольку для любых значений x выполняется равенство $(-x)^3 = -x^3$. Ее график изображен на рис. 1.4.

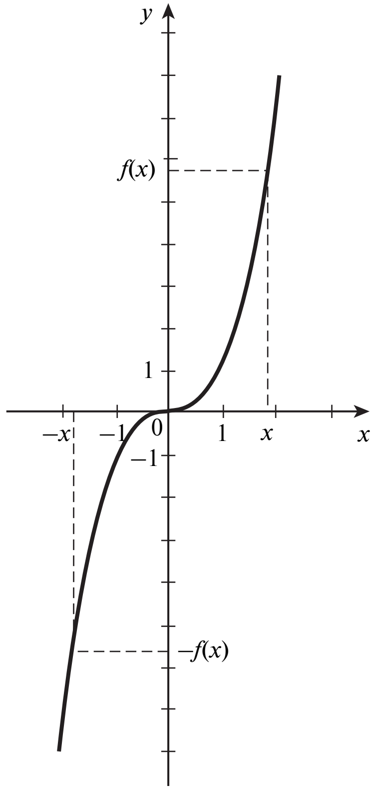

Рис. 1.4. График нечетной функции $y = x^3$

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует такое положительное число T, что для любых значений x и $x + T$, принадлежащих области определения функции, выполняется равенство $f(x + T) = f(x)$. Величина T называется *периодом функции*.

Например, функция $y = \sin x$ является периодической с периодом $T = 2\pi$, поскольку для любого значения x выполняется равенство $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, в частности $\sin(2\pi) = \sin 0$ при $x = 0$. Ее график изображен на рис. 1.5.

Иногда функция представляется не в виде $y = f(x)$, который называется явным видом функции, а в виде некоторого уравнения $F(x, y) = 0$, не разрешенного относительно y. В некоторых случаях его можно решить относительно y, т. е. найти $y = f(x)$ в явном виде. Иногда оно не решается относительно y.

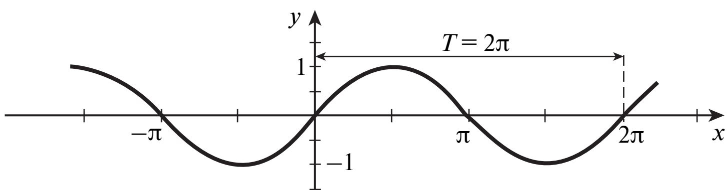

Рис 1.5. График функции $y = \sin x$, как пример нечетной периодической функции с периодом $T = 2\pi$

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$x - y^2 = 0.$$

Оно задает функцию $y = f(x)$ в неявном виде. В данном случае мы можем легко найти и явный вид функции:

$$y = \pm\sqrt{x},\ x \geq 0.$$

§ 1.3. НЕКОТОРЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Линейная функция

Линейной функцией называется функция

$$y = ax + b, \tag{1.1}$$

где a и b — постоянные коэффициенты. График линейной функции изображен на рис. 1.6. Это прямая линия. Именно поэтому функция (1.1) называется линейной.

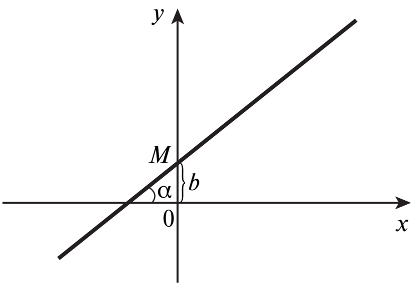

Рис. 1.6. График линейной функции $y = ax + b$

Коэффициент a равен тангенсу угла наклона графика функции, т. е. угла между прямой и положительным направлением оси $0x$:

$$a = \mathrm{tg}\alpha.$$

При $a > 0$ функция $y = ax + b$ *является возрастающей*, а при $a < 0$ — *убывающей*. При $a < 0$ тангенс угла наклона графика тоже отрицательный ($\mathrm{tg}\alpha < 0$). Если $b = 0$, то график линейной функции проходит через начало координат. Если $b \neq 0$, то график пересекает ось $0y$ в точке $(0, b)$.

Степенная функция

Степенной функцией называется функция вида

$$y = x^n, \tag{1.2}$$

где $n = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$

При $n = 2$ мы получаем функцию

$$y = x^2,$$

график которой изображен на рис. 1.3. Эта кривая называется *параболой*. График функции $y = ax^2$, где a — действительное число, $a \neq 0$, также называется параболой. Он получается умножением каждого значения функции $y = x^2$ на a. При $a > 0$ ветви параболы $y = ax^2$ направлены вверх, а при $a < 0$ — вниз.

Функция

$$y = ax^2 + bx + c,$$

где a, b и c — действительные числа, $a \neq 0$, называется *квадратической*. Ее графиком является парабола $y = ax^2$, смещенная вдоль осей $0x$ и $0y$ так, что ее вершина находится не в начале координат, а в точке с координатами $(-b/(2a);\ c - b^2/(4a))$.

Уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где a, b и c — действительные числа, $a \neq 0$, x — неизвестная величина, называется *квадратным уравнением*. Его решения x_1 и x_2, называемые *корнями квадратного уравнения*, вычисляются по следующим формулам:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},\ D = b^2 - 4ac.$$

Величина D называется *дискриминантом квадратного уравнения*. Квадратное уравнение имеет решение в действительных числах ($x \in R$), если дискриминант $D \geq 0$. При $D < 0$ действительных решений нет.

При $n = 3$ степенная функция имеет вид

$$y = x^3.$$

Ее график представлен на рис. 1.4. Эта кривая иногда называется *кубической параболой*.

При $n = -1$ степенная функция имеет вид

$$y = \frac{1}{x}.$$

Область определения этой функции — множество всех действительных чисел, кроме $x = 0$ ($D(f) = (-\infty, +\infty)$, $x \neq 0$). Ее график изображен на рис. 1.7. Он имеет две ветви — при $x > 0$ и при $x < 0$. Каждая кривая называется *гиперболой*.

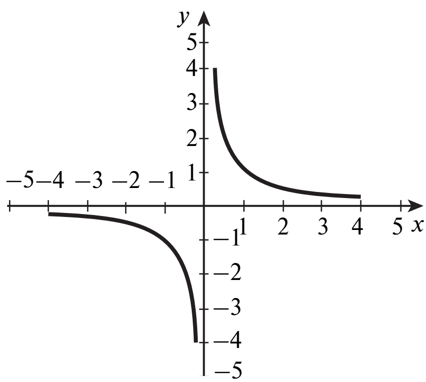

Рис 1.7. График функции $y = \frac{1}{x}$