



# СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие .....	6
Глава 1. ФУНКЦИИ .....	7
§ 1.1. Действительные числа .....	7
§ 1.2. Понятие функции .....	8
§ 1.3. Некоторые элементарные функции .....	12
§ 1.4. Предел функции .....	21
Задачи .....	29
Глава 2. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ .....	31
§ 2.1. Понятие производной функции .....	31
§ 2.2. Геометрический смысл производной функции .....	33
§ 2.3. Производные некоторых элементарных функций. Основные правила дифференцирования .....	36
§ 2.4. Производные высших порядков .....	44
§ 2.5. Дифференциал функции .....	46
Задачи .....	50
Глава 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНЫХ ..	52
§ 3.1. Возрастающие и убывающие на интервале функции .....	52
§ 3.2. Необходимые и достаточные условия максимума и минимума функции .....	56
§ 3.3. Достаточные условия выпуклости и вогнутости функции .....	61
§ 3.4. Асимптоты кривых .....	64
§ 3.5. Построение графиков функций .....	67
Задачи .....	70
Глава 4. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ АРГУМЕНТОВ .....	72
§ 4.1. Понятие функции нескольких аргументов .....	72
§ 4.2. Частные производные, частный и полный дифференциалы функции двух переменных .....	73
Задачи .....	79
Глава 5. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ .....	81
§ 5.1. Понятие неопределенного интеграла .....	81
§ 5.2. Основные свойства неопределенных интегралов. Таблица простейших интегралов .....	82
§ 5.3. Некоторые способы интегрирования .....	85
Задачи .....	91

Глава 6. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ .....	92
§ 6.1. Понятие определенного интеграла .....	92
§ 6.2. Основные свойства определенного интеграла .....	96
§ 6.3. Формула Ньютона–Лейбница .....	99
§ 6.4. Некоторые методы вычисления определенных интегралов .....	101
§ 6.5. Вычисление площадей с помощью определенного интеграла .....	105
§ 6.6. Работа переменной силы .....	107
§ 6.7. Несобственные интегралы .....	108
Задачи .....	110
Глава 7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ .....	112
§ 7.1. Понятие обыкновенного дифференциального уравнения .....	112
§ 7.2. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными .....	114
§ 7.3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка .....	119
§ 7.4. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами .....	121
§ 7.5. Примеры применения дифференциальных уравнений .....	126
Задачи .....	134
Глава 8. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ .....	136
§ 8.1. Случайные события .....	136
§ 8.2. Вероятность случайного события .....	138
§ 8.3. Некоторые теоремы теории вероятностей .....	142
§ 8.4. Формула Бернулли. Формула Пуассона .....	149
Задачи .....	151
Глава 9. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ .....	153
§ 9.1. Определение случайной величины .....	153
§ 9.2. Дискретные случайные величины .....	154
§ 9.3. Непрерывные случайные величины .....	160
§ 9.4. Нормальный закон распределения .....	167
Задачи .....	174
Глава 10. ВЫБОРОЧНЫЙ МЕТОД .....	177
§ 10.1. Генеральная и выборочная совокупности .....	178
§ 10.2. Представление результатов измерений .....	179
§ 10.3. Оценки параметров в генеральной совокупности .....	185
§ 10.4. Доверительный интервал для оценки генеральной средней .....	189
§ 10.5. Оценка погрешностей прямых измерений .....	193
§ 10.6. Оценка погрешностей косвенных измерений .....	198
Задачи .....	202
Глава 11. АНАЛИЗ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ .....	204
§ 11.1. Статистическая и корреляционная зависимости .....	204
§ 11.2. Метод наименьших квадратов .....	205

§ 11.3. Выборочное уравнение линейной регрессии . . . . .	210
§ 11.4. Выборочный коэффициент линейной корреляции . . . . .	216
Задачи . . . . .	219
Глава 12. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ГИПОТЕЗЫ . . . . .	221
§ 12.1. Проверка существенности корреляционной зависимости. Статистические гипотезы. . . . .	221
§ 12.2. Сравнение генеральных средних двух нормально распределенных случайных величин. Критерий Стьюдента . . . . .	225
§ 12.3. Сравнение генеральных средних двух случайных величин с произвольным распределением . . . . .	228
§ 12.4. Критерий знаков . . . . .	231
§ 12.5. Сравнение генеральных дисперсий . . . . .	233
§ 12.6. Проверка гипотезы о нормальном законе распределения. Критерий согласия Пирсона . . . . .	236
§ 12.7. Анализ качественных признаков, критерий $\chi^2$ . . . . .	241
§ 12.8. Точный критерий Фишера . . . . .	245
Задачи . . . . .	247
Глава 13. ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ . . . . .	249
§ 13.1. Однофакторный дисперсионный анализ . . . . .	250
§ 13.2. Двухфакторный дисперсионный анализ . . . . .	255
Задачи . . . . .	260
Глава 14. ПЛАНИРОВАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКОГО ИССЛЕДОВАНИЯ. . . . .	262
§ 14.1. Применение статистических методов в медицине. . . . .	262
§ 14.2. Рандомизация и слепой метод. . . . .	263
Задачи . . . . .	266
Глава 15. ВРЕМЕННЫЕ РЯДЫ. . . . .	268
§ 15.1. Понятие временного ряда . . . . .	268
§ 15.2. Уравнение тренда временного ряда . . . . .	269
§ 15.3. Метод скользящего среднего. . . . .	272
Задачи . . . . .	274
Ответы . . . . .	276
Литература. . . . .	286
Приложение. . . . .	288
Предметный указатель. . . . .	297

# Глава 1

## ФУНКЦИИ

### § 1.1. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Рассмотрим сначала понятие *множества*. Оно относится к основным понятиям, которые не определяются (так же как понятие числа, точки и т. д.). Объекты, составляющие множество, называются его *элементами*.

Если  $x$  является элементом множества  $A$ , то это обозначают следующим образом:  $x \in A$  ( $x$  принадлежит  $A$ ). Запись  $x \notin A$  означает, что  $x$  не является элементом множества  $A$  ( $x$  не принадлежит множеству  $A$ ).

Далее мы ограничимся рассмотрением только *числовых множеств*.

Рассмотрим некоторые числовые множества.

1. Множество *натуральных чисел*, т. е. числа 1, 2, 3, ..., обозначают буквой  $N$ .

2. Дополнив множество натуральных чисел  $N$  целыми отрицательными числами и нулем, получим множество *целых чисел*  $Z$ : числа 0,  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

3. Дополняя множество целых чисел  $Z$  дробными числами вида  $\frac{m}{n}$ , где  $m$  — целые числа (положительные и отрицательные),  $n$  — натуральные числа, получаем множество *рациональных чисел*  $Q$ . Рациональными числами являются, например, числа  $\frac{1}{2}; \frac{5}{3}; -10\frac{2}{5}; 0,6$  и т. д. (а также все целые числа).

4. Оказывается, что существуют числа, которые нельзя представить в виде дроби  $\frac{m}{n}$ , а можно представить только в виде бесконечной непериодической десятичной дроби. Такие числа называются *иррациональными*. Их примерами являются числа  $\pi = 3,14159\dots$ ,  $\sqrt{2} = 1,41421\dots$ ,  $\sqrt{3} = 1,73205\dots$  и многие другие. Дополняя множество рациональных чисел  $Q$  иррациональными числами, получаем множество *действительных чисел*  $R$ . Оно обозначается также  $(-\infty, +\infty)$  и называется *числовой осью*.

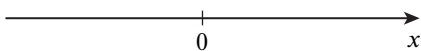


Рис. 1.1. Числовая ось

Числовая ось изображена на рис. 1.1. Любому действительному числу соответствует точка на числовой оси. И наоборот, любой точке на числовой оси соответствует действительное число — рациональное или иррациональное.

В математике часто используют промежутки на числовой оси, называемые *числовыми промежутками*. Рассмотрим определения и обозначения некоторых из них.

*Отрезком* от  $a$  до  $b$  называется числовой промежуток  $a \leq x \leq b$ . Отрезок обозначается квадратными скобками:  $[a, b]$ . Например, отрезок  $[-1, 5]$ .

*Интервалом* от  $a$  до  $b$  называется числовой промежуток  $a < x < b$ . Он обозначается круглыми скобками  $(a, b)$ . В отличие от отрезка, граничные точки  $a$  и  $b$  в интервал не входят.

*Полуинтервалом* называется числовой промежуток, которому принадлежит только одна из граничных точек — либо  $a$ , либо  $b$ . Он обозначается  $[a, b)$  или  $(a, b]$ . Граничная точка со стороны квадратной скобки принадлежит, а со стороны круглой скобки — не принадлежит полуинтервалу.

В математике часто встречаются полубесконечные числовые промежутки, иногда называемые *числовыми лучами*. Они бывают разных типов и обозначаются следующим образом:

$$[a, +\infty): x \geq a;$$

$$(a, +\infty): x > a;$$

$$(-\infty, a]: x \leq a;$$

$$(-\infty, a): x < a.$$

## § 1.2. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ

При описании многих зависимостей в математике, физике, химии и других науках используются функции. Например, гидростатическое давление  $p$  в жидкости (сила, действующая на единицу поверхности) является функцией глубины. Эта функция имеет вид:

$$p = \rho gh,$$

где  $\rho$  — плотность жидкости;  $g$  — ускорение свободного падения;  $h$  — глубина.

Масса таблетки является функцией ее объема при постоянной плотности вещества:

$$m = \rho V,$$

где  $m$  — масса таблетки;  $\rho$  — плотность вещества;  $V$  — объем.

Мы ограничимся рассмотрением *числовых функций*, но слово «числовая» будем опускать, подразумевая везде под словом «функция» числовую функцию. Рассмотрим общее определение функции.

**Определение.** Величина  $y$ , принадлежащая некоторому множеству, называется *функцией* величины  $x$ , принадлежащей другому множеству, если каждому допустимому значению величины  $x$  по некоторому правилу соответствует определенное значение величины  $y$ . В общем случае функция записывается в виде

$$y = f(x).$$

При этом величина  $x$  называется *независимой переменной*, или *аргументом* функции  $y$ .

Чаще всего функция задается в виде формулы или, как говорят, *аналитически*. Например,

$$y = \sin x.$$

Однако функцию можно задавать и в виде таблицы или в виде графика. Например, график функции может иметь вид, представленный на рис. 1.2.

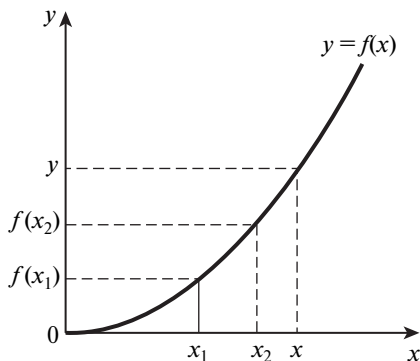
Рассмотрим некоторые понятия, которые применяются при анализе поведения функций.

**Определение.** Множество всех допустимых значений аргумента  $x$  функции называется *областью определения функции*.

Область определения функции  $f(x)$  обозначается  $D(f)$ . Например, для функции

$$y = \sqrt{x}$$

область определения  $D(f) = [0, +\infty)$ . Здесь мы рассматриваем только положительные значения корня. Квадратная скобка в правой части



**Рис. 1.2.** График некоторой функции  $y = f(x)$ . Каждому допустимому значению  $x$  соответствует определенное значение  $y$ , как это видно на графике

последнего равенства означает, что граничная точка  $x = 0$  входит в рассматриваемый промежуток.

**Определение.** Множество всех возможных значений функции  $f(x)$  (т. е. значений  $y$ ) называется *областью изменения (или множеством значений, либо областью значений) функции* и обозначается  $E(f)$ .

Например, для функции

$$y = \sin x$$

область значений  $E(f) = [-1, 1]$ .

**Определение.** Функция  $y = f(x)$  называется *возрастающей на интервале  $(a, b)$* , если для любых двух значений аргумента  $x_1$  и  $x_2$  из области определения функции, удовлетворяющих условию  $x_1 < x_2$ , выполняется неравенство  $f(x_1) \leq f(x_2)$ . Если из условия  $x_1 < x_2$  следует строгое неравенство  $f(x_1) < f(x_2)$ , то функция называется *строго возрастающей на интервале  $(a, b)$* .

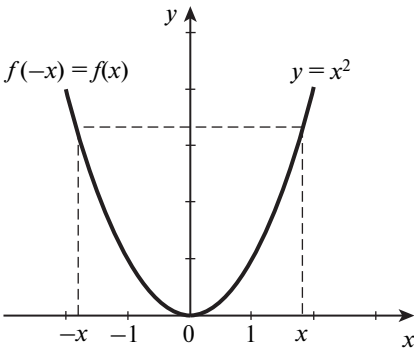
**Определение.** Функция  $y = f(x)$  называется *убывающей на интервале  $(a, b)$* , если для любых двух значений  $x_1$  и  $x_2$  из области определения функции, удовлетворяющих неравенству  $x_1 < x_2$ , выполняется неравенство  $f(x_1) \geq f(x_2)$ . Если из условия  $x_1 < x_2$  следует строгое неравенство  $f(x_1) > f(x_2)$ , то функция называется *строго убывающей на интервале  $(a, b)$* .

Так, изображенная на рис. 1.2 функция является строго возрастающей.

**Определение.** Функция  $y = f(x)$  называется *четной*, если ее область определения симметрична относительно точки  $x = 0$  (т. е. из условия  $x \in D(f)$  следует, что  $-x \in D(f)$ ) и для любых значений  $x$ , принадлежащих области определения, выполняется равенство  $f(-x) = f(x)$ .

График четной функции симметричен относительно оси  $Oy$ . Например, функция  $y = x^2$  — четная. Ее график изображен на рис. 1.3.

**Определение.** Функция  $y = f(x)$  называется *нечетной*, если ее область определения симметрична относительно точки  $x = 0$  и для любых значений  $x$ , принадлежащих области определения, выполняется равенство  $f(-x) = -f(x)$ , т. е. при



**Рис. 1.3.** График четной функции  $y = x^2$ . Он симметричен относительно оси  $Oy$



изменении знака аргумента функция также меняет свой знак.

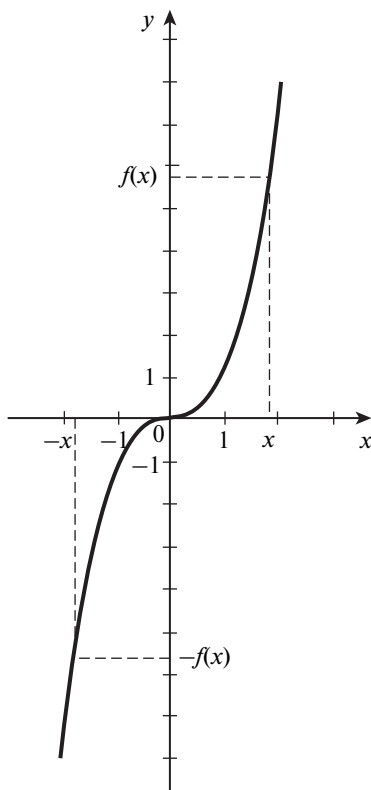
График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Примером нечетной функции служит функция  $y = x^3$ , поскольку для любых значений  $x$  выполняется равенство  $(-x)^3 = -x^3$ . Ее график изображен на рис. 1.4.

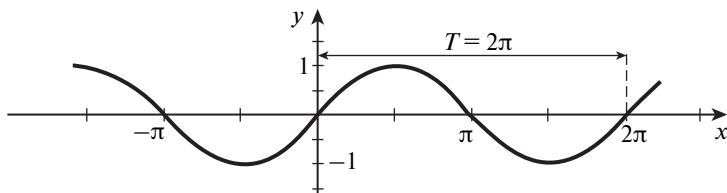
**Определение.** Функция  $y = f(x)$  называется *периодической*, если существует такое положительное число  $T$ , что для любых значений  $x$  и  $x + T$ , принадлежащих области определения функции, выполняется равенство  $f(x + T) = f(x)$ . Величина  $T$  называется *периодом функции*.

Например, функция  $y = \sin x$  является периодической с периодом  $T = 2\pi$ , поскольку для любого значения  $x$  выполняется равенство  $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ , в частности  $\sin(2\pi) = \sin 0$  при  $x = 0$ . Ее график изображен на рис. 1.5.

Иногда функция представляется не в виде  $y = f(x)$ , который называется явным видом функции, а в виде некоторого уравнения  $F(x, y) = 0$ , не разрешенного относительно  $y$ . В некоторых случаях его можно решить относительно  $y$ , т. е. найти  $y = f(x)$  в явном виде. Иногда оно не решается относительно  $y$ .



**Рис. 1.4.** График нечетной функции  $y = x^3$



**Рис 1.5.** График функции  $y = \sin x$ , как пример нечетной периодической функции с периодом  $T = 2\pi$

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$x - y^2 = 0.$$

Оно задает функцию  $y = f(x)$  в неявном виде. В данном случае мы можем легко найти и явный вид функции:

$$y = \pm\sqrt{x}, \quad x \geq 0.$$

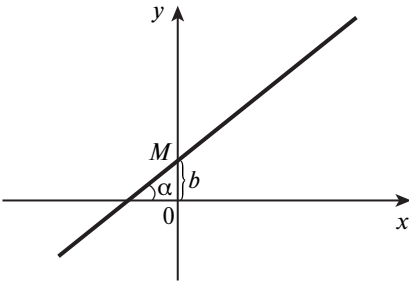
## § 1.3. НЕКОТОРЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

### Линейная функция

*Линейной функцией* называется функция

$$y = ax + b, \tag{1.1}$$

где  $a$  и  $b$  — постоянные коэффициенты. График линейной функции изображен на рис. 1.6. Это прямая линия. Именно поэтому функция (1.1) называется линейной.



**Рис. 1.6.** График линейной функции  $y = ax + b$

Коэффициент  $a$  равен тангенсу угла наклона графика функции, т. е. угла между прямой и положительным направлением оси  $Ox$ :

$$a = \operatorname{tg}\alpha.$$

При  $a > 0$  функция  $y = ax + b$  является *возрастающей*, а при  $a < 0$  — *убывающей*. При  $a < 0$  тангенс угла наклона графика тоже отрицательный ( $\operatorname{tg}\alpha < 0$ ). Если  $b = 0$ , то график линейной функции проходит через начало координат.

Если  $b \neq 0$ , то график пересекает ось  $Oy$  в точке  $(0, b)$ .

### Степенная функция

*Степенной функцией* называется функция вида

$$y = x^n, \tag{1.2}$$

где  $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

При  $n = 2$  мы получаем функцию

$$y = x^2,$$

график которой изображен на рис. 1.3. Эта кривая называется *параболой*. График функции  $y = ax^2$ , где  $a$  — действительное число,  $a \neq 0$ , также называется параболой. Он получается умножением каждого значения функции  $y = x^2$  на  $a$ . При  $a > 0$  ветви параболы  $y = ax^2$  направлены вверх, а при  $a < 0$  — вниз.

Функция

$$y = ax^2 + bx + c,$$

где  $a$ ,  $b$  и  $c$  — действительные числа,  $a \neq 0$ , называется *квадратической*. Ее графиком является парабола  $y = ax^2$ , смещенная вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$  так, что ее вершина находится не в начале координат, а в точке с координатами  $(-b/(2a); c - b^2/(4a))$ .

Уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где  $a$ ,  $b$  и  $c$  — действительные числа,  $a \neq 0$ ,  $x$  — неизвестная величина, называется *квадратным уравнением*. Его решения  $x_1$  и  $x_2$ , называемые *корнями квадратного уравнения*, вычисляются по следующим формулам:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad D = b^2 - 4ac.$$

Величина  $D$  называется *дискриминантом квадратного уравнения*. Квадратное уравнение имеет решение в действительных числах ( $x \in R$ ), если дискриминант  $D \geq 0$ . При  $D < 0$  действительных решений нет.

При  $n = 3$  степенная функция имеет вид

$$y = x^3.$$

Ее график представлен на рис. 1.4. Эта кривая иногда называется *кубической параболой*.

При  $n = -1$  степенная функция имеет вид

$$y = \frac{1}{x}.$$

Область определения этой функции — множество всех действительных чисел, кроме  $x = 0$  ( $D(f) = (-\infty, +\infty)$ ,  $x \neq 0$ ). Ее график изображен на рис. 1.7. Он имеет две ветви — при  $x > 0$  и при  $x < 0$ . Каждая кривая называется *гиперболой*.

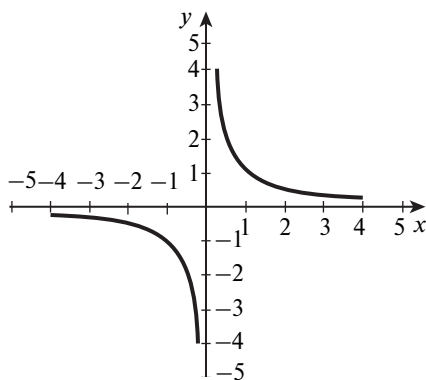


Рис 1.7. График функции  $y = \frac{1}{x}$