Оглавление

Глава 5. Элементы теории вероятностей и комбинаторики

Глава 6. Повторение

Уважаемые старшеклассники!

Этот учебник продолжает курс алгебры 7—9 классов. В течение следующих двух лет вы расширите и углубите свои математические знания. И, главное, научитесь их применять.

Знать математику — значит уметь решать задачи. Именно задачи вам предстоит решать на ЕГЭ.

В учебнике задания разной степени сложности. В заданиях, номера которых не имеют специальных обозначений, вы не должны испытывать никаких затруднений.

Значком «○» отмечены задания, в которых путь к ответу связан с некоторыми техническими сложностями.

Задания, над которыми следует подумать, имеют обозначение «●». План решения таких заданий полезно обсудить в классе с учителем.

Номера самых трудных заданий имеют обозначение «*».

Значком «■» отмечены задания, которые следует выполнять с помощью калькулятора. В учебнике рассматривается калькулятор операционной системы Windows.

При изучении математики вам предстоит строить много графиков. В некоторых случаях работу в тетради полезно совмещать, а иногда и заменять работой на компьютере в одной из компьютерных программ построения и исследования графиков функций и уравнений. Такие программы свободно и бесплатно распространяются в Интернете. Мы рекомендуем две русифицированные программы GeoGebra и WinPlot.

В тексте учебника рекомендация использовать какую-нибудь компьютерную программу обозначается символом .

Выполненные в этих программах решения задач красивы и наглядны. Многие из них размещены школьниками и учителями математики в Интернете, где их можно поискать. Надеемся, что и ваши решения можно будет там найти.

Вместе с основным материалом, изучение которого обязательно, в учебнике есть и дополнительный материал, знакомство с которым желательно. Начало такого материала обозначается значком «▼», а конец — «△».

В конце учебника в разделе «Основные формулы» вы можете найти нужную формулу.

Решив задачу, сравните свой ответ с ответом в учебнике. Если выполнить задание вы не можете, то прочитайте совет к задаче или посмотрите её решение. В этом вам помогут разделы «Ответы», «Советы» и «Решения».

Каждый пункт учебника завершается контрольными вопросами и заданиями, а к главам учебника предлагаются домашние контрольные работы с указанием примерного времени, на которое рассчитано их выполнение.

Задания домашних контрольных работ разбиты на три уровня, которые соответствуют удовлетворительной, хорошей и отличной оценке. Так что вы сами сможете оценить свои математические достижения.

В конце учебника имеется предметный указатель, особенно полезный при повторении.

В учебник не вошли многие важные и интересные математические вопросы, поэтому для тех, кто интересуется математикой, в справочном разделе учебника имеется список дополнительной литературы и интернет-ресурсов.

Авторы желают вам успехов!

Глава 1

ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

Вы уже знакомы с понятием функции из курса алгебры. Однако и в различных разделах математики, и в разных школьных учебниках определение функции даётся по-разному. Будем использовать одно из самых простых определений этого важнейшего математического понятия. С этим определением, а также с некоторыми связанными с понятием функции обозначениями и математическими терминами вы познакомитесь в первом пункте главы. Во втором пункте вы встретитесь с некоторыми уже знакомыми функциями и графиками, в третьем речь пойдёт о важных свойствах функций, часто применяемых при решении уравнений и неравенств, а в четвёртом — об основных преобразованиях графиков.

1. Понятие функции

В окружающем нас мире многие величины взаимосвязаны, например количество букв на странице этого учебника зависит от номера страницы, время разморозки в СВЧ-печи зависит в основном от массы продукта, а площадь квадрата — от длины его стороны. Во всех трёх случаях каждому *допустимому* (возможному) значению второй из величин соответствует одно значение первой. Понятно, что в первом примере за номер страницы учебника можно взять любое натуральное число, не большее 319, во втором примере масса продукта ограничена рабочим объёмом печи, а длина стороны квадрата из третьего примера, конечно, положительна.

Мы привели здесь простые примеры зависимостей между двумя величинами. Однако на практике всё несколько сложнее. Так, например, время разморозки зависит не только от массы продукта, но и от его формы и от мощности микроволнового излучения.

В математике обычно отвлекаются (абстрагируются) от физической природы величин и рассматривают зависимости между числовыми переменными.

Переменную y называют **функцией** переменной x, если каждому допустимому значению x соответствует единственное значение y.
Переменную x называют **аргументом** функции y.

Правило, по которому для каждого допустимого значения x находят соответствующее ему значение функции, обозначают какой-либо буквой. Так, например, чтобы указать, что значения y получают из значений x по правилу f, пишут:

$$y = f(x).$$

Множество допустимых значений аргумента называют **областью определения функции** и обозначают $D(f)$ или $D(y)$.
Множество, которое составляют все значения функции, называют **областью значений функции** и обозначают $E(f)$ или $E(y)$.

Пример 1. Найти область определения функции $y = \frac{4}{x}$ и вычислить значения функции при x, равном: 2, $\frac{3}{4}$, –6.

Решение. На аргумент x формула $y = \frac{4}{x}$ накладывает единственное ограничение: $x \neq 0$, поэтому областью определения данной функции является объединение двух числовых промежутков (интервалов): $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Значение функции, которое соответствует, например, $x = 2$, обозначают $y(2)$:

$$y(2) = \frac{4}{2} = 2, \quad y\left(\frac{3}{4}\right) = 4 : \frac{3}{4} = \frac{4 \cdot 4}{3} = \frac{16}{3}, \quad y(-6) = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3}.$$

Ответ: $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; $y(2) = 2$, $y\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{16}{3}$, $y(-6) = -\frac{2}{3}$.

Примечание 1. В этом примере правило, по которому по значению аргумента находят значение функции, было представлено выражением $\frac{4}{x}$. Такой способ задания функции называют

аналитическим. Этим способом задано большинство функций, которые встретятся на страницах этого учебника.

Другая ситуация с областью определения возникает, если, например, буквами x и y обозначены длины сторон в сантиметрах прямоугольника, имеющего площадь 4 см^2. Тогда в силу положительности длин область определения функции $y = \frac{4}{x}$ представляет собой числовой интервал $(0; +\infty)$.

Рассматривая функцию $y = \frac{4}{x}$ на множестве натуральных чисел, имеют дело с ***бесконечной последовательностью***. Обычно для последовательностей используют специальные обозначения: n — для аргумента и y_n — для соответствующего значения функции, которое называют n-м *членом* последовательности.

Саму формулу $y_n = \frac{4}{n}$ называют формулой n-го *члена* последовательности.

Примечание 2. Знак «$\cup$», который использовался для ***объединения*** промежутков, в математике объединяет любые множества, например: $\{1; 2; 3\} \cup \{3; 4\} = \{1; 2; 3; 4\}$.

Перевернув знак объединения, получим математический символ для ***пересечения*** множеств: $\{1; 2; 3\} \cap \{3; 4\} = \{3\}$. Если повернуть знак объединения «$\cup$» на 90°, то получим знак, который показывает, что все элементы одного из множеств являются элементами другого, например: $\{1; 2; 3\} \subset \{1; 2; 3; 4\}$. Как говорят в таких случаях, первое множество является ***подмножеством*** второго, или второе множество ***включает в себя*** первое.

Пример 2. Функция $y = f(x)$ задана *графически* (рис. 1). Найти: 1) $D(f)$; 2) $f(-1)$; 3) значения аргумента, при которых значение функции равно 2; 4) нули функции; 5) наибольшее и наименьшее значения функции.

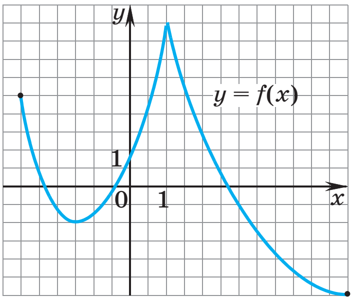

Рис. 1

Решение. 1) Область определения этой функции — числовой промежуток $[-3; 6]$; 2) $f(-1) \approx \approx -0,7$; 3) $f(x) = 2$ при $x \approx -2,9$, $x \approx 0,4$ и $x \approx 1,7$; 4) нули функции, т. е. значения x, при которых $f(x) = 0$: $x \approx -2,3$, $x \approx -0,4$ и $x \approx 2,7$; 5) наибольшее значение функции: $\max f(x) = f(1) = 4,5$, наименьшее значение функции:

$$\min f(x) = f(6) = -3.$$

Пример 3. На рисунке 2 изображён график функции $x = f(y)$, аргументом которой является переменная y. Является ли это множество точек координатной плоскости графиком функции y?

Решение. Чтобы некоторое множество точек координатной плоскости представляло собой график функции y, все эти точки должны иметь разные абсциссы — *любая прямая, перпендикулярная оси абсцисс, или имеет единственную точку, или не имеет ни одной общей точки с графиком функции y*. На рисунке видно, что ось ординат (прямая $x = 0$) пересекает данную кривую в двух точках, значит, эта кривая не является графиком функции y.

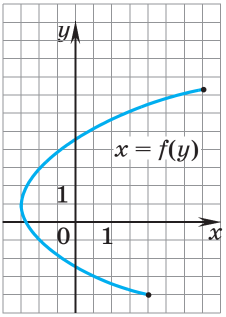

Рис. 2

Упражнения

1. Приведите свои примеры зависимостей между двумя величинами, и в каждом случае укажите множество допустимых значений второй из них.

2. Является ли y функцией x, если y — это:
1) площадь прямоугольника, а x его: а) диагональ; б) периметр; в) отношение длин сторон; 2) число десятых в десятичной записи x; 3) двузначное число, а x — сумма его цифр; 4) дата, а x — температура воздуха в конкретном городе в 10 ч; 5) дата, а x — количество автомобилей, выпущенных за данные сутки заводом АВТОВАЗ; 6) атмосферное давление в данной точке земной поверхности, x — конкретное время суток? В каких случаях x является функцией y?

3.° В книге 300 страниц. Петя каждый день прочитывает по 50 страниц этой книги. Обозначив буквой y количество не прочитанных Петей страниц, а буквой x — число дней, когда Петя читает данную книгу: 1) задайте аналитически функцию y; 2) укажите её естественную и реальную области определения.

4. Дана функция:

1) $f(x) = 2x + 3$;
2) $f(x) = -4x + 5$;
3) $f(x) = x^2 + 3x + 4$;
4) $f(x) = x^2 + 7x - 4$.

Найдите: а) $f(3)$; б) значения x, при которых $f(x) = 4$.

5. Правило f, задающее функцию $y = f(x)$, ставит в соответствие каждому двузначному числу сумму его цифр. Найдите: 1) $D(f)$; 2) $f(17)$, $f(35)$, $f(59)$; 3) при каких значениях x функция $f(x)$ принимает значение, равное 3; 4) наибольшее и наименьшее значения функции; 5)* какое значение функции соответствует наибольшему количеству значений аргумента.

6. По каждому из графиков функций, изображённых на рисунках 3—8, найдите: 1) $D(f)$; 2) $E(f)$; 3) $f(-2)$; 4) при каком значении аргумента значение функции равно 3; 5) нули функции; 6) наибольшее и наименьшее значения функции.

7. Подумайте и определите, существуют ли такие значения аргумента, при которых функции, заданные графиками: 1) на рисунках 3 и 5; 2) на рисунках 5 и 8 — принимают одни и те же значения. Найдите их.

8. Найдите область определения функции y:

1) $y = 2x^2 - 7x + 9$;
2) $y = x^3 + \dfrac{5}{x} - 7$;
3) $y = \dfrac{1}{x^2 - 4}$;
4) $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$;
5) $y = \dfrac{1}{x^4 - 5x^2 + 4}$;
6) $y = \dfrac{1}{x^4 - 8x^2 - 9}$;
7) $y = \dfrac{1}{x - |x|}$;
8) $y = \dfrac{1}{x + |x|}$.

9. 1) Найдите область определения функции y:

а) $y = \sqrt{x - 2} \cdot \sqrt{x + 2}$;
б) $y = \sqrt{x - 2} + \sqrt{x + 2}$;
в) $y = \sqrt{(x + 2)(x - 2)}$;
г) $y = \dfrac{\sqrt{x + 2}}{\sqrt{x - 2}}$;
д) $y = \sqrt{x + 5} \cdot \sqrt{x + 3}$;
е) $y = \sqrt{x + 5} \cdot \sqrt{x - 3}$;
ж) $y = \sqrt{x + 5} + \sqrt{x + 3}$
з) $y = \sqrt{(x + 5)(3 - x)}$;
и) $y = \dfrac{\sqrt{x + 2}}{\sqrt{x - 2} - 3}$;
к) $y = \dfrac{\sqrt{x + 5}}{\sqrt{x + 3} - 2}$.

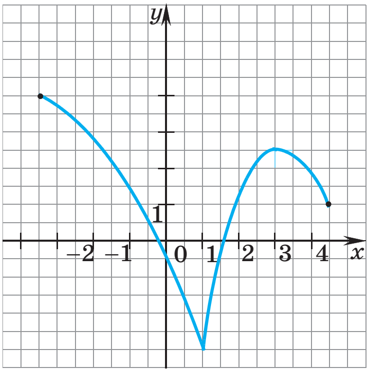

Рис. 3

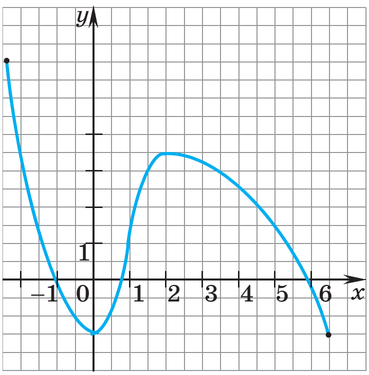

Рис. 4

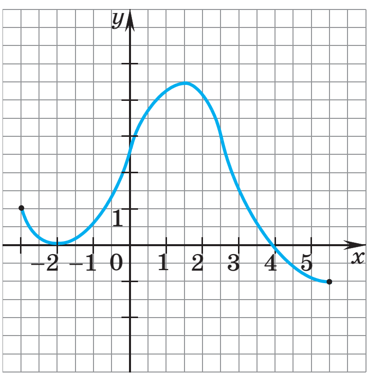

Рис. 5

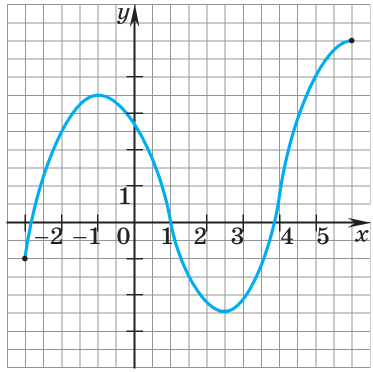

Рис. 6

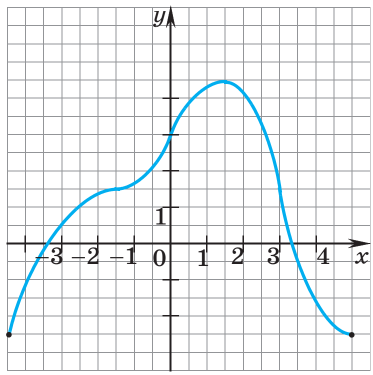

Рис. 7

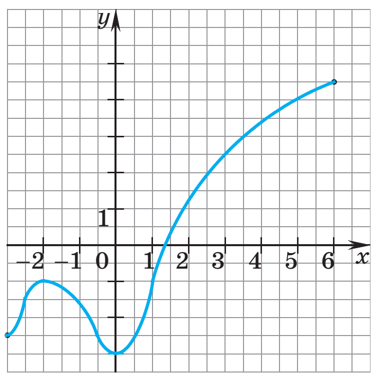

Рис. 8

2) ■ С помощью калькулятора вычислите с точностью до сотых значения функций при x, равном $\sqrt{2}$, если это возможно.

10. Постройте график какой-нибудь функции $f(x)$, для которой выполняются условия:
1) $D(f) = [-1; 5]$, $E(f) = [-3; 3]$;
2) $D(f) = [-3; 2]$, $E(f) = [-2; 4]$.

11. На графике (рис. 9) показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток, начиная с 0 часов 11 июля. На оси абсцисс отмечается время суток, на оси ординат — значение температуры в градусах.
1) Когда была самая высокая, а когда самая низкая температура?
2) Какая температура воздуха была 12 июля в 18 ч?
3) Сколько раз в течение трёх дней температура достигала 12 °C?
4) Определите по графику, до какой наибольшей температуры прогрелся воздух 13 июля. Ответ дайте в градусах Цельсия.

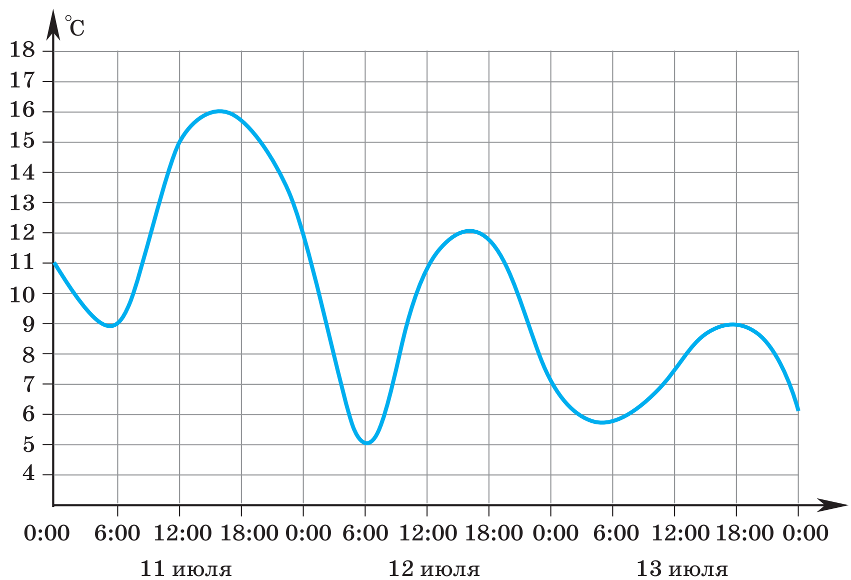

Рис. 9

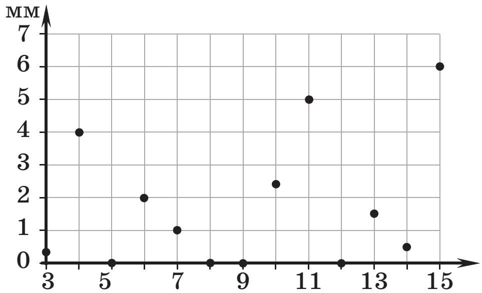

Рис. 10

12. На рисунке 10 точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Казани с 3 по 15 февраля. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах.

1) Сколько дней из данного периода не выпадало осадков?

2) Сколько миллиметров осадков выпало 10 февраля, 4 февраля?

3) Какого числа выпало 2 мм, 1 мм осадков?

4) Какого числа выпало наибольшее количество осадков?

13. Из квадрата со стороной 10 см вырезаны квадратики со стороной x см, и из полученной фигуры сделана открытая коробка (рис. 11). Выразите объём V (см^3) этой коробки через x. Укажите область определения функции $y = V(x)$.

14. В прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см вписан прямоугольник (рис. 12). Обозначив буквой x (см) длину его стороны, параллельной меньшему катету, выразите периметр P (см) прямоугольника. Укажите область определения и область значений функции $y = P(x)$.

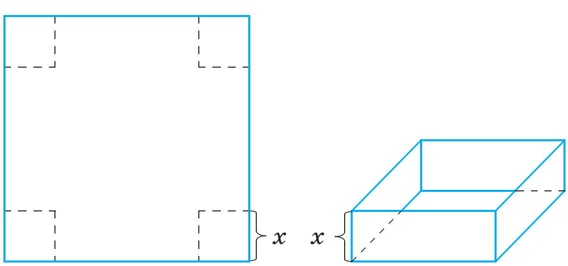

Рис. 11

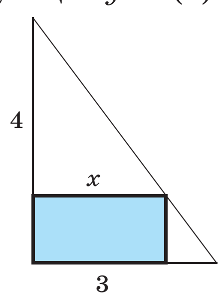

Рис. 12

15. Запишите площадь:
1) правильного шестиугольника как функцию от длины его стороны;
2) квадрата как функцию радиуса вписанной в него окружности.

16. Задайте формулой функцию $S(x)$ — наибольшую площадь треугольника ABC, если известно, что:
1) $AB = 4$, $BC = x$; 2) две его медианы по x каждая.

17. Найдите значение функции $f(3)$, $f(-2)$, $f(0)$, если
$$f(x) = x + |x|.$$

18. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке:
1) $[0; 1]$; 2) $[-1; 0]$; 3) $[-1; 2]$; 4) $[1; 2]$.

Найдите область определения функции:
а) $y = f(-x)$; в) $y = f(x - 1)$; д)* $y = f(x + |x|)$;
б) $y = f(2x)$; г) $y = f(x^2)$; е)* $y = f(x - |x|)$.

19. В математике за некоторыми числовыми множествами закреплены стандартные обозначения: $\boldsymbol{N}$ — множество натуральных чисел, $\boldsymbol{Z}$ — множество целых чисел, $\boldsymbol{Q}$ — множество рациональных чисел, $\boldsymbol{R}$ — множество действительных чисел, $\boldsymbol{R}_+$ — множество положительных действительных чисел.
Вставьте вместо многоточия один из знаков «$\cap$», «$\cup$», «$\subset$» так, чтобы получилось верное утверждение:
1) $\boldsymbol{N} \ldots \boldsymbol{Q}$; 3) $\boldsymbol{N} \ldots \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{N}$; 5) $\boldsymbol{R} \ldots \boldsymbol{N} = \boldsymbol{R}$;
2) $\boldsymbol{N} \ldots \boldsymbol{R}_+$; 4) $\boldsymbol{R}_+ \ldots \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{N}$; 6) $\boldsymbol{N} \ldots \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}$.

! Контрольные вопросы и задания

1. В каких случаях одна переменная является функцией другой?
2. Что такое естественная область определения функции?
3. Приведите пример функции, нуль которой больше, чем $f(0)$.
4. Найдите $D(y)$ и $y(3)$, если $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x - 1}$.

2. Прямая, гипербола, парабола и окружность

С линиями, названия которых приведены в заглавии этого пункта, вы не раз встречались. В нашем курсе им также отводится важная роль. Следующие три рисунка напомнят вам о линейной функции.