ПРЕДИСЛОВИЕ

Умение решать задачи, особенно олимпиадные, всегда являлось одним из показателей математической одаренности ученика. Причем главная ценность самих олимпиад состоит не в выявлении победителей и награждении особо одаренных учащихся, а в общем подъеме математической культуры, интеллектуального уровня учащихся.

И для того чтобы этот подъем культуры и интеллекта действительно произошел, к математическим олимпиадам учащихся надо готовить.

Тем более что сегодня часто по итогам олимпиад оценивают итоги внеклассной и внешкольной работы по математике в школе, районе, регионе. Школьные, районные, региональные олимпиады по математике, наряду с результатами ЕГЭ, позволяют сравнивать качество математической подготовки, оценивать состояние преподавания математики в отдельных классах школы, в отдельных школах района, а также и в различных регионах России. Также сегодня во многом результаты работы учителя определяются и тем, каких и сколько учащихся — призеров различного рода олимпиад он подготовил.

Между тем природа может распорядиться так, что в данном регионе, в данном месте не окажется одаренных детей, и что бы учитель ни предпринимал, все может быть безрезультатно.

С другой стороны, учитель математики может не предпринимать никаких особых усилий, а ученик блистает на различных соревнованиях, и прежде всего на олимпиадах самого высокого уровня. Он добивается этого благодаря своим особым математическим способностям, которые он продолжает развивать, работая с математической литературой самостоятельно, занимаясь на всевозможных математических курсах, в школах при вузах и т. п. Иногда ему в этом помогает учитель из другой школы или преподаватель вуза.

Здесь не хотелось бы дискутировать: правильно делает руководство образованием, оценивая только результат, а не то, как достиг этого результата учитель. Для нас важнее то, как учителю математики не только готовить учащихся к олимпиадам, но и сделать все от него зависящее для математического развития учащихся.

В настоящее время на основе последней редакции Закона «Об образовании» победы учащихся на олимпиадах международного и всероссийского уровней являются достаточным основанием для зачисления в вуз без экзаменов, а выдающиеся результаты, показанные в мероприятиях системы дополнительного образования, — для приема в вуз вне конкурса.

Интересно, что почти все российские математики, получившие крупные международные премии в последние годы, были победителями разного уровня олимпиад. При этом решение некоторых математических проблем, над которыми многие годы бились математики всего мира, иногда удавалось найти именно с помощью «олимпиадных» приемов. В частности, именно так были решены 10-я проблема Гильберта Ю. В. Матиясевичем и проблема Сера А. А. Суслиным. В 2010 г. медаль Филдса — математический аналог Нобелевской премии — получил российский математик из Петербурга С. Смирнов, в настоящее время работающий в университете в Женеве. Неоднократным победителем всероссийских и международных математических олимпиад был и Г. Перельман, доказавший гипотезу Пуанкаре.

Школа сегодня уже не является единственным, монопольным источником информации, знаний, умственного развития учащихся. В частности, большой вклад в образование учащихся вносит система дополнительного образования детей. А поэтому результаты, достигаемые учащимися в различных мероприятиях, проводимых в данной системе, должны учитываться при определении перспектив дальнейшего обучения.

Так как наибольших успехов в олимпиадах добиваются учащиеся с нестандартным, творческим мышлением, высокими математическими способностями, повышенной обучаемостью к математике, то одним из путей подготовки учащихся к олимпиадам является развитие их математических способностей, мышления, интеллекта. Давно известно, что люди, систематически занимающиеся умственным трудом, имеют более высокий показатель интеллекта.

Данное пособие посвящено подготовке учащихся к математическим олимпиадам. В первом разделе рассмотрены основные направления, которые можно выделить в подготовительной работе к олимпиадам. Второй раздел посвящен методике подготовки и проведения занятий по математике, целью которых является подготовка к олимпиадам. В третьем разделе приведены разработки 17 занятий по математике для учащихся 6–7 классов (при этом часть занятий можно провести и для учащихся 5 и 8 классов), каждое из занятий рассчитано на 80–90 минут. Необходимо отметить, что все разработанные занятия лично проводились автором в г. Коряжме Архангельской области в 2004–2005 годах.

В приложении приводятся тексты муниципальных олимпиад по математике в Архангельской области 1999–2005 годов.

Все пожелания, замечания по данной книге можно высылать лично автору: a.farkov@mail.ru.

Раздел 1
ОСНОВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ ПОДГОТОВКИ УЧАЩИХСЯ К МАТЕМАТИЧЕСКИМ ОЛИМПИАДАМ

I. РАБОТА УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ НА УРОКЕ

Глубоко не правы те учителя, которые не уделяют внимания при проведении уроков математики подготовке учащихся к олимпиадам. Чаще победителями олимпиад, начиная с городского (районного) тура, являются одаренные учащиеся. Учить же, развивать одаренных детей только вне урока нереально. Всегда можно найти время на уроке, когда вместе с обучающими задачами на уроке можно решать и задачу развития ученика. Например, при изучении темы «Объемы тел» (11 класс) после решения ряда задач по нахождению объема пирамиды можно предложить учащимся и такую задачу: «Найдите объем пирамиды, у которой все боковые ребра образуют между собой углы по 90°, а сами ребра имеют длины соответственно 6, 8, 10 см». Применяя подход, которым решались предыдущие задачи, можно найти стороны основания (по теореме Пифагора), затем площадь основания. Проблема возникнет при нахождении высоты пирамиды. Применив же нестандартный прием: переворачивание пирамиды таким образом, что основанием становится один из прямоугольных треугольников, а высотой — оставшееся третье ребро, мы сразу решим задачу. Подобного рода примеров можно привести много. Все они тесно связаны с темой урока, тем не менее являются и олимпиадными задачами. Интересно, что термин ***олимпиадная задача*** появился не в результате классификации задач, а в результате практики применения особых видов задач для составления текстов олимпиадных работ.

Что же понимать под олимпиадными задачами? Обычно авторы методических работ не дают четкого определения олимпиадной задачи. Большинство их считают это понятие общеизвестным, другие относят к олимпиадным задачам те, где есть идея решения, где применяются специальные методы решения и т. д. В дальнейшем будем придерживаться следующего определения олимпиадных задач по математике.

Под ***олимпиадными задачами по математике*** будем понимать задачи повышенной трудности, нестандартные по формулировке или по методам их решения.

При таком подходе к определению в число олимпиадных задач попадут как нестандартные задачи по математике, использующие необычные идеи и специальные методы решения, так и стандартные задачи, но допускающие более быстрое, оригинальное решение.

Так как классификацию олимпиадных задач построить трудно (есть задачи, которые затруднительно отнести к какому-то виду, они могут и не иметь аналогов; тем более с каждым годом появляются благодаря работе методистов и математиков все новые виды олимпиадных задач), то будем рассматривать в дальнейшем следующие основные типы олимпиадных задач по математике:

- *задачи на применение специальных методов решений* (применение принципа Дирихле, метода инвариантов, метода раскрасок, графов и др.);
- *задачи, использующие программный материал, но повышенной трудности* (арифметические задачи, алгебраические задачи, геометрические задачи);
- *комбинированные задачи, то есть те, которые используют программный материал и идеи, изучаемые на кружках, факультативах.*

Рассмотрим, как можно организовать работу с олимпиадными задачами по математике на уроке.

1. Решение олимпиадных задач, тесно связанных с темой урока

1. Вычислите: а) $90+89+88+\ldots+1+0-1-2-\ldots-90-91-$ $-92-93$;

б) $1-2+3-4+5-6+\ldots+2012-2013$.

Обе приведенные задачи являются стандартными, но, если выполнять действия по порядку, не применяя законов сложения и вычитания, на это потребуется много времени. А время на олимпиадах очень ценно. Поэтому ученик, нашедший более быстрое решение этих и подобных заданий, сэкономит время на решение других задач. На уроке данные задачи можно предложить при изучении темы «Сложение и вычитание положительных и отрицательных чисел».

2. При изучении темы «Степень с натуральным показателем» можно предложить для решения учащимся следующие типы задач.

а) Сравните: 65^{23} и 255^{17}.

б) На какую цифру оканчивается число 2007^{2014}?

Решение.

а) $65^{23} > 64^{23} = (2^6)^{23} = 2^{138}$. А

$$255^{17} < 256^{17} = (2^8)^{17} = (2^{136}).$$

Так как

$$65^{23} > 2^{138}, \quad 2^{138} > 2^{136},$$

а $2^{136} > 255^{17}$, то $65^{23} > 255^{17}$.

б) Так как последняя цифра числа 2007^{2014} определяется последней цифрой числа 7^{2014}, то найдем значения степеней 7^1, 7^2, 7^3, 7^4, 7^5 и т. д. и заметим закономерность: последней цифрой являются 7, 9, 3, 1, а далее они повторяются. Так как $2014 = 503 \cdot 4 + 2$, то 7^{2014} оканчивается той же цифрой, что и 7^2, то есть цифрой 9. Тогда и число 2007^{2014} оканчивается на цифру 9.

3. При изучении темы «Алгебраические дроби» можно решить следующую задачу: «Вычислите сумму:

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx},$$

если $xyz = 1$».

Решение. Умножим числитель и знаменатель второй дроби на x, а третьей — на xy. Учитывая, что $xyz = 1$, получим у всех дробей одинаковые знаменатели. Сложим данные три дроби, в итоге получим дробь, у которой числитель и знаменатель равны одному и тому же выражению $1 + x + xy$. А значит, искомая сумма равна 1.

4. При изучении квадратных уравнений, можно наиболее сильным учащимся класса предложить и такую задачу: «Может ли дискриминант квадратного уравнения с целыми коэффициентами равняться 2014? А 2016?»

Рассмотрим решение данной задачи.

У квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, где $a, b, c \in \mathbb{Z}$, дискриминант $D = b^2 - 4ac$. Так как $D = 2014$, то найдем целые решения уравнения $b^2 - 4ac = 2014$. Так как правая часть уравнения делится на 2, то и левая часть должна делиться на 2, поэтому $b = 2k$, тогда $4k^2 - 4ac = 2014$. Разделив обе части уравнения на 2, получим: $2k^2 - 2ac = 1007$. В левой части уравнения получилось четное число, а в правой — число нечетное. Поэтому уравнение решений в целых числах не имеет.

Для числа 2016 имеем $b^2 - 4ac = 2016$, а так как $b = 2k$, то получим: $4k^2 - 4ac = 2016$. Разделив на 4 обе части уравнения, получим: $k^2 - ac = 504$. Данное уравнение имеет решения в целых числах, например: $a = 1$, $c = 25$, $k = 23$. Тогда уравнение $x^2 + 46x + 25 = 0$ имеет дискриминант

$$D = 2116 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 2016.$$

Конечно, можно найти и другие решения.

На этом же занятии можно сказать, что с методами решения уравнений в целых числах подробно можно познакомиться на занятии факультатива или элективного курса (если, конечно, факультативы или элективные курсы по математике проводятся в данной школе).

5. При изучении арифметической прогрессии можно рассмотреть задачу: «Докажите, что если в бесконечную арифметическую прогрессию с положительной разностью входят числа 25, 43, 70 (не обязательно стоящие рядом), то в эту прогрессию входит и число 2005».

Решение. Так как 25, 43, 70 — члены арифметической прогрессии, то

$$25 = a_1 + kd; \quad 43 = a_1 + nd; \quad 70 = a_1 + md.$$

Из данных трех равенств следует, что

$$18 = (n - k)d, \quad 27 = (m - n)d.$$

Из данных двух равенств получаем: $9 = (m - 2n + k)d$. Так как $2005 = 70 + 1935$, а $1935 = 215 \cdot 9 = 215(m - 2n + k)d$, то

$$2005 = 70 + 215(m - 2n + k)d = a_1 + md + 215(m - 2n + k)d = \\ = a_1 + (216m - 430n + 215k)d$$

или $2005 = a_1 + ld$, где $l > 0$.

6. При решении текстовых задач в различных классах можно предлагать учащимся решение и задач, которые были на олимпиадах различного уровня, обязательно указывая, сколько учеников их решили.

Например.

а) Мотоциклист и велосипедист выехали одновременно из пункта A в пункт B. Проехав треть пути, велосипедист остановился и тронулся дальше лишь тогда, когда мотоциклисту оставалось проехать треть пути до B. Мотоциклист, доехав до B, без остановки поехал обратно в A. Кто приедет раньше: мотоциклист в A или велосипедист в B, если велосипедист после первой остановки больше в пути не останавливался?

Решение. Так как велосипедист стоял, дожидаясь, пока мотоциклисту останется проехать треть пути до B, то на треть всего своего пути велосипедист затратил времени меньше, чем мотоциклист на треть своего ($\frac{2}{3}AB$ от $2AB$ составляют $\frac{1}{3}$). Значит, и на весь путь велосипедист затратит времени меньше.

б) Одну овцу лев съел за 2 дня, волк — за 3 дня, собака — за 6 дней. За сколько дней они вместе съедят овцу?

Решение.

1) Так как лев съел овцу за 2 дня, то за 1 день он съел $\frac{1}{2}$ овцы.

2) Так как волк съел овцу за 3 дня, то за 1 день он съел $\frac{1}{3}$ овцы.

3) Так как собака съела овцу за 6 дней, то за 1 день она съела $\frac{1}{6}$ овцы.

4) Вместе лев, волк и собака за 1 день съедят $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$, то есть 1 овцу.

в) *Старинная задача.* «Скажи мне, знаменитый Пифагор, сколько учеников посещают твою школу и слушают твои беседы?

— Вот сколько, — ответил философ, — половина изучает математику, четверть — музыку, седьмая часть пребывает в молчании, и, кроме того, есть три женщины».

Решение. Обозначив число учеников Пифагора за x, получим, что $\frac{1}{2}x$ изучает математику, $\frac{1}{4}x$ — музыку, а $\frac{1}{7}x$ пребывает в молчании. Так как, кроме того, есть еще 3 женщины, то получаем уравнение:

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{7}x+3=x.$$

Решением данного уравнения будет $x=28$. Следовательно, школу Пифагора посещают 28 учеников.

Наибольшие трудности у учеников на олимпиадах, как показывает собственный опыт участия в олимпиадах разного уровня, а также проведения школьных и городских олимпиад, вызывают геометрические задачи. Хотя именно геометрия прекрасно развивает нестандартное мышление и выделяет людей, способных заниматься математикой. Данный тип олимпиадных задач является самым обширным. Это задачи и на разрезания, и на построение, и на нахождение углов. Но чаще всего встречаются задачи, в решении которых используют какую-то необычную идею, чаще всего дополнительное построение.

Рассмотрим несколько примеров олимпиадных задач по геометрии, которые можно разобрать на уроке, увязав их решение с темой урока.

7. При изучении геометрических построений можно предложить задачи на построение углов заданной градусной меры через известный угол. Например:

«Построить угол в 5°, если дан угол в 34°».

Решение. Если отложить 5 раз угол, равный 34°, то получится угол, равный 170°. Так как разность развернутого угла и угла, равного 170° будет равна 10°, то разделим угол в 10° на 2 равных угла и получим угол в 5°.

8. Так как на олимпиадах часто предлагают задачи, в которых используются дополнительные построения, то подобного рода задачи необходимо рассматривать и на уроках, особо обращая внимание на эти дополнительные построения. Например, рассмотрим такую задачу: «Дан параллелограмм $ABCD$. K — середина стороны BC, M — середина стороны CD, $AK = 6$ см, $AM = 3$ см, $\angle KAM = 60°$. Найдите длину стороны AD. Ответ обоснуйте».

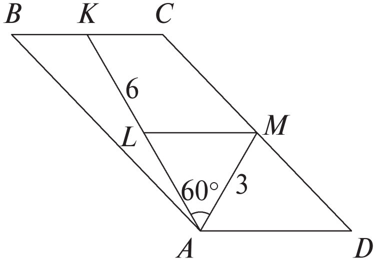

Рис. 1

Решение. Задача имеет множество решений. Рассмотрим наиболее оригинальное. Проведем в трапеции $AKCD$ среднюю линию ML (рис. 1). Она будет параллельна AD и KC, причем $AL = 3$ см. Получается, что треугольник ALM равнобедренный с углом при вершине 60°, поэтому он равносторонний, поэтому $LM = 3$ см. Обозначим $AD = 2x$, тогда $KC = x$. А тогда, используя свойство средней линии трапеции, имеем: $\frac{2x + x}{2} = 3$, откуда $x = 2$, а значит, $AD = 4$ см.

Так как решение подобного рода задач требует применения определенных качеств и приемов мышления, то на уроке необходимо уделять внимание и развитию как некоторых качеств ума (прежде всего, гибкости и глубины), так и приемов умственной деятельности (в первую очередь анализа, так как он чаще всего применяется в олимпиадных задачах, особенно геометрических).

2. Развитие качеств ума и совершенствование приемов умственной деятельности

Для развития *гибкости ума* на уроке надо:

- применять решение упражнений, в которых встречаются взаимно обратные операции;
- решать задачи несколькими способами, доказывать теоремы различными методами;
- применять различные переформулировки условия задачи;
- учить переключению с прямого хода мыслей на обратный;
- учить тому, какие знания, умения, навыки и в каком порядке применять в конкретной задаче и т. д.

Рассмотрим примеры задач, способствующих развитию данного качества.

Упражнения на развитие гибкости ума

1. У двух зрячих один брат слепой, но у слепого нет зрячих братьев. Как это может быть? (Из первой фразы как будто следует, что речь в задаче идет о братьях, тогда как на самом деле зрячими оказываются сестры.)

2. Два ученика подошли одновременно к реке. У берега реки стояла лодка (лишь для одного человека). Тем не менее оба сумели переправиться через реку в одной лодке. Каким образом? (Из первой фразы как будто кажется, что ученики подошли к реке на одном берегу, но для решения задачи получается, что они подошли к реке на разных берегах.)

3. Вам дано 5 спичек. Сложите из них 2 равносторонних треугольника. А если спичек будет 6, то сколько равносторонних треугольников вы можете сложить? Первая задача решается на плоскости (тогда получаются 2 равносторонних треугольника), а вторая — в пространстве (тогда получаются 4 равносторонних треугольника).

4. Найдите как можно больше способов решения задач.

А. Докажите, что треугольник, в котором медиана равна половине стороны, к которой она проведена, является прямоугольным.

Решение.

Способ № 1.

Пусть BD — заданная медиана треугольника ABC (рис. 2). Имеем тогда следующие соотношения для углов:

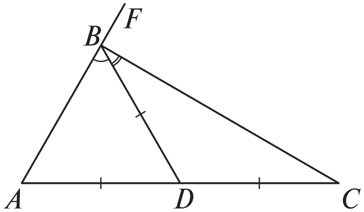

Рис. 2

1) $\angle A + \angle ABD + \angle DBC + \angle C = 180^\circ$.

2) $\angle A = \angle ABD$, $\angle C = \angle DBC$.

3) $\angle A + \angle ABD + \angle DBC + \angle C = 2 \cdot \angle ABD + 2 \cdot \angle DBC =$
$= 2(\angle ABD + \angle DBC) = 2 \cdot \angle ABC = 180^\circ$.

4) $\angle ABC = 90^\circ$, а значит, $\triangle ABC$ прямоугольный.

Вывод. При доказательстве использовались теорема о сумме углов треугольника и свойство углов при основании равнобедренного треугольника.

Способ № 2.

1) Рассмотрим треугольник ABD. $\angle BDC = \angle A + \angle ABD$.

2) Рассмотрим треугольник DBC. $\angle ADB = \angle C + \angle DBC$.

3) В треугольнике ABD имеем $\angle A = \angle ABD$.

4) В треугольнике DBC имеем $\angle C = \angle DBC$.

5) $\angle ADB + \angle BDC = 180^\circ$.

6) $\angle ADB + \angle BDC = \angle A + \angle ABD + \angle C + \angle DBC =$
$= 2 \cdot (\angle ABD + \angle DBC) = 180^\circ$. А значит, $\angle ABD + \angle DBC =$
$= \angle B = 90^\circ$.

Вывод. В данном способе использовались теорема о внешнем угле треугольника, свойство углов при основании равнобедренного треугольника, теорема о смежных углах.

Способ № 3.

Пусть AF — прямая, содержащая сторону AB (см. рис. 2). Имеем тогда следующие соотношения для углов:

1) $\angle FBC = \angle A + \angle C$.

2) $\angle A = \angle ABD$, $\angle C = \angle DBC$.

3) $\angle FBC = \angle ABD + \angle DBC = \angle ABC$.

4) $\angle FBC + \angle ABC = 180^\circ$, $\angle FBC = \angle ABC \Rightarrow \angle ABC = 90^\circ$.

Вывод. Применялись те же рассуждения, что и во втором способе, но в других комбинациях.

Б. Высоты треугольника ABC, проведенные из точек A и C, пересекаются в точке M. Найдите угол AMC, если $\angle A = 70^\circ$, $\angle C = 80^\circ$.

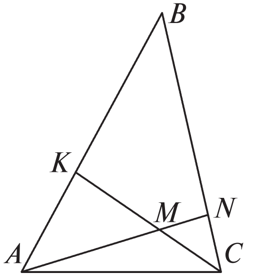

Рис. 3

Решение.

Способ № 1. Рассмотрим прямоугольные треугольники AKC и ANC (рис. 3). Из треугольника AKC находим $\angle KCA = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$. Из треугольника ANC находим $\angle NAC = 90^\circ - 80^\circ = 10^\circ$. Рассмотрим треугольник AMC и найдем $\angle AMC = 180^\circ - (20^\circ + 10^\circ) = 150^\circ$.

Способ № 2. Рассмотрим треугольник ABC. Имеем: $\angle B = 180^\circ - (80^\circ + 70^\circ) = 30^\circ$. Из треугольника KCB находим $\angle KCB = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Из треугольника MNC находим $\angle NMC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. Так как углы NMC и AMC смежные, то $\angle AMC = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.

Способ № 3. Из треугольника ABC находим $\angle B = 30^\circ$. Из треугольника ABN находим $\angle BAN = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Из треугольника AKM находим $\angle KMA = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. Так как углы KMA и AMC смежные, то $\angle AMC = 150^\circ$.

Способ № 4. Из треугольника ABC находим $\angle B = 30^\circ$. Так как

$$\angle KBN + \angle BNM + \angle NMK + \angle MKB = 360^\circ$$

(данный факт легко доказывается, если провести диагональ в четырехугольнике $KBNM$), то

$$\angle KMN = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 150^\circ.$$