Учебник для вузов

В.В. Афанасьев

Теория вероятностей

Рекомендовано Учебно-методическим объединением по специальностям педагогического образования в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности «Математика»

Москва

ГУМАНИТАРНЫЙ ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР ВЛАДОС

2007

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.171я73-1
А94

Афанасьев В.В.

А94 Теория вероятностей : учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности «Математика» / В.В. Афанасьев. — М. : Гуманитар. изд. центр ВЛАДОС, 2007. — 350 с. — (Учебник для вузов).

ISBN 978-5-691-01525-0.

Агентство CIP РГБ.

В пособии изложены основные идеи теории вероятностей, математической статистики, энтропии и информации. Каждая глава содержит перечень опорных понятий, теорем, умений, навыков, методов и алгоритмов. В начале параграфов даются краткие теоретические сведения, содержание которых раскрывается вопросами для самоконтроля, решенными примерами и трехуровневой системой задач.

Учебное пособие адресовано студентам высших учебных заведений.

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.171я73-1

© Афанасьев В.В., 2007
© ООО «Гуманитарный издательский центр ВЛАДОС», 2007
© Оформление. ООО «Гуманитарный издательский центр ВЛАДОС», 2007

ISBN 978-5-691-01525-0

Содержание

Введение 6

Глава I. Элементы комбинаторики 9
1.1. Опорная таблица 10
1.2. Методы 12
1.3. Алгоритмы 12
1.4. Спираль фундирования понятия комбинаторной задачи 12
§ 1. Выборки и случай 13
§ 2. Основные правила комбинаторики 16
§ 3. Методы комбинаторики 20
§ 4. Графы 25

Глава II. Случайные события 32
2.1. Опорная таблица 33
2.2. Методы 35
2.3. Алгоритмы 35
2.4. Спираль фундирования понятия вероятности случайного события 35
§ 1. Классическая вероятность 36
§ 2. Условные вероятности 43
§ 3. Формула полной вероятности и формула Байеса 48
§ 4. Схема Бернулли 53
§ 5. Приближенные формулы для схемы Бернулли 57
§ 6. Вероятность и числовые ряды 61
§ 7. Цепи Маркова 70
§ 8. Аксиоматика теории вероятностей 78

Глава III. Случайные величины 84
3.1. Опорная таблица 85
3.2. Методы 89

3.3. Алгоритмы ... 89
3.4. Спираль фундирования случайных величин ... 89
§ 1. Закон и функция распределения дискретной случайной величины ... 90
§ 2. Числовые характеристики дискретных случайных величин ... 95
§ 3. Классические распределения ... 102
§ 4. Случайные величины и азартные игры ... 109
§ 5. Закон больших чисел ... 117
§ 6. Непрерывные случайные величины и их характеристики ... 123
§ 7. Нормальный закон распределения ... 130
§ 8. Двумерные случайные величины ... 135
§ 9. Характеристики двумерных случайных величин ... 141
§ 10. Корреляционный граф многомерных случайных величин ... 148

Глава IV. Энтропия и информация ... 156
4.1. Опорная таблица ... 156
4.2. Методы ... 159
4.3. Алгоритмы ... 159
4.4. Спираль фундирования энтропии и информации ... 159
§ 1. Энтропия как мера неопределенности ... 160
§ 2. Условные энтропии ... 164
§ 3. Энтропия случайных величин ... 170
§ 4. Энтропия цепей Маркова ... 173
§ 5. Количество информации ... 179
§ 6. Информация и логические задачи ... 184
§ 7. Кодирование и декодирование ... 190
§ 8. Блочные коды ... 196
§ 9. Коды Фано и Хаффмана ... 200

Глава V. Математическая статистика ... 208
5.1. Опорная таблица ... 209
5.2. Методы ... 213
5.3. Алгоритмы ... 213
5.4. Спираль фундирования выборочных характеристик ... 213
§ 1. Вариационный и статистический ряд ... 214

§ 2. Выборочные характеристики вариационного ряда 223
§ 3. Доверительный интервал 231
§ 4. Выборочный коэффициент корреляции 237
§ 5. Ранговая корреляция 248
§ 6. Статистические гипотезы 257
§ 7. Критерии Пирсона и Стьюдента 265
§ 8. Математическая статистика в психологии 277
§ 9. Статистические методы в педагогике 291

Ответы 305
Указатель обозначений 322
Приложения 327
Литература 349

Введение

В новых стандартах для средней (полной) школы введена стохастическая линия. Введение нового школьного предмета стохастики, который представляет собой соединение элементов теории вероятностей и математической статистики, предполагает и новые подходы к преподаванию одноименного курса в педагогическом вузе. Автор в течение двух десятилетий читал курс теории вероятностей с элементами математической статистики, исходя из посылки о широком применении изучаемого материала в разных областях науки, в практической деятельности человека и как предмет, способствующий развитию математической и общекультурной составляющей будущего учителя математики. Теперь добавляются и чисто профессиональные требования — овладение предметом, который студент математического отделения будет преподавать в школе.

Лаплас называл теорию вероятностей здравым смыслом, сведенным к исчислению, и говорил о ней, что «нет науки, более достойной наших размышлений», и что «было бы полезно ввести ее в систему народного просвещения». И этот призыв был наконец-то услышан в нашем обществе.

Вводимому курсу предписывается не только образовательное, но и большое воспитательное значение. Так, академик Б.Б. Голицын в начале XX в. говорил: «Признаю за таким курсом высокообразовательное значение, как введение ко всяким стохастическим исследованиям и методам, имеющим такое широкое применение в различных областях знания и в практической жизни. Большое значение имеет этот курс и для более сознательного и глубокого усвоения отечествоведения, этому курсу я придаю первенствующее значение в средней школе».

Особенностью авторского курса теории вероятностей является изложение предмета с систематическим использованием графов, что делает более наглядным и доступным рассматриваемый

материал. Эффективность применения графов в теории вероятностей демонстрируется, в частности, получением некоторых результатов из математического анализа (сходимость последовательностей, суммирование числовых рядов) вероятностными средствами. Успех применения графов можно объяснить тем, что они являются удобным языком (наряду с матричными записями и теоретико-множественным языком) для формулировки и эффективным инструментом для решения задач, относящихся к весьма широкому кругу научных проблем.

Предлагаемое пособие представляет собой проработанную в деталях совместную педагогическую деятельность преподавателя и студента. За счет уровневой теоретической и практической подготовки, фундирования школьных математических знаний, продуктивности методики преподавания устраняется формализм в усвоении материала, усиливаются логико-наглядные связи школьной и вузовской стохастической линии.

Академический материал курса теории вероятностей распределен по пяти главам: элементы комбинаторики, случайные события, случайные величины, энтропия и информация, математическая статистика. Каждая глава содержит несколько учебных элементов.

Фрейм базовых учебных элементов содержит опорную таблицу основных знаний, умений, навыков, методов и алгоритмов по курсу. Определен оптимальный объем учебной информации, необходимой для успешного освоения программного материала. Кодирование информации, использование символики математической логики для записи определений, теорем при достаточной информационной насыщенности фрейма создают определенную четкость, отражают сущность базовых понятий и утверждений. Указан конкретизирующий набор уровневых упражнений, задач и вопросов для самоконтроля.

Фрейм аннотированной учебной программы является звеном диагностируемого целеполагания будущего учителя математики для вероятностного образования и задает необходимый объем учебной информации. Предполагается, что овладение вероятностными методами, построение алгоритмов решения задач, их трансформация в другие разделы математики и дальнейшие обобщения способствуют творческой активности студентов.

По многим позициям пособие расширяет и углубляет традиционный материал стохастической линии физико-математического факультета высшего педагогического учебного заведения, в нем сделан акцент на использование методов математической

статистики в педагогике и психологии. Учитель математики имеет возможность использовать пособие для модернизации школьного курса стохастики, применить идею модульного построения курса в своей педагогической работе.

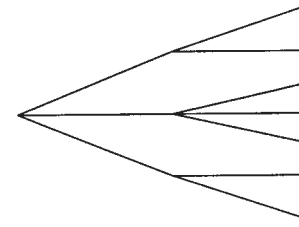
Глава I
ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Комбинаторная математика занимается в основном задачами о существовании и подсчете различных комбинаций, которые можно составить из элементов заданного конечного множества. Эту область математики так назвал Готфрид Вильгельм Лейбниц в 1666 г. в своей диссертации об искусстве комбинаторики, в которой он решает основные комбинаторные задачи, приводящие к биномиальным коэффициентам и к факториалу. Теоретическое исследование вопросов комбинаторики предприняли в XVII в. Паскаль, Ферма, Яков Бернулли и Эйлер, рассматривая азартные игры и всевозможные лотереи. В XVIII—XIX вв. в германских государствах Европы была предпринята попытка создать (Гинденбург, Штейнер, Эшенбах, Роте) комбинаторный анализ как единую науку, чему помешали громоздкость символического аппарата и слабость его оперативно-вычислительных возможностей.

В связи с развитием вычислительной техники резко расширились возможности перебора и повысился интерес к дискретным моделям, что обусловило новый подъем комбинаторной математики. Комбинаторные методы применяются сейчас в теории кодирования, планировании эксперимента, топологии, математической логике, теории игр, кристаллографии, биологии, статистической физике, экономике и т. д.

В нашем случае комбинаторика является основой для изучения теории вероятностей и математической статистики.

1.1. Опорная таблица

<table>
<tr><td colspan="3">ОСНОВНЫЕ</td></tr>
<tr><td colspan="2">ЗНАНИЯ</td><td rowspan="2">УМЕНИЯ НАВЫКИ</td></tr>
<tr><td>ПОНЯТИЯ</td><td>ТЕОРЕМЫ</td></tr>
<tr><td>Выборки</td><td>Основные правила комбинаторики
$|A + B| = |A| + |B|$,
$A \cdot B = \varnothing$
$|A \times B| = |A| \cdot |B|$</td><td>Выделять подмножества
Строить дерево исходов
  </td></tr>
<tr><td>Размещения

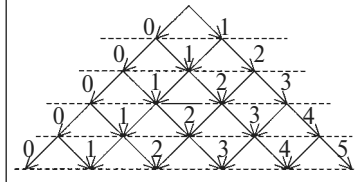
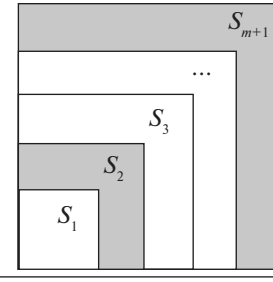
Перестановки

Сочетания</td><td>$A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$
$\bar{A}_n^m = n^m$
$P_n = n!$
$P_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \dfrac{n!}{n_1! \ldots n_k!}$
$C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$
$\bar{C}_m^m = C_{n+m-1}^m$</td><td>Подсчитывать число различных комбинаций
Приводить геометрические иллюстрации комбинаторных утверждений</td></tr>
<tr><td>Треугольник Паскаля

Производящие функции

Свертка Вандермонда

Линейные однородные рекуррентные соотношения

Числа Фибоначчи</td><td>Свойства сочетаний:
$C_n^k = C_n^{n-k}$
$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$
$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$
$C_{m-1}^{m+1} + C_m^{m-1} + C_{m+1}^{m-1} + \ldots +$
$+ C_{m+n-1}^{m-1} = C_{n+m}^m$
$\bar{C}_m^0 + \bar{C}_m^1 + \bar{C}_m^2 + \ldots +$
$+ \bar{C}_m^n = \bar{C}_{m+1}^m$
Следствия:
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + m(m+1) = \dfrac{m(m+1)(m+2)}{3}$
$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + m(m+1)(m+2) = \dfrac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{4}$</td><td> 
Использовать орграф для получения свойств сочетаний
Приводить геометрические интерпретации некоторых конечных сумм
  </td></tr>
</table>